

赫中营,龙一鸣,王根会. 自锚式悬索桥索力优化的双矩阵法[J]. 长安大学学报(自然科学版),2023,43(5):51-60.

HE Zhong-ying, LONG Yi-ming, WANG Gen-hui. Double matrix method for optimizing cable force of self-anchored suspension bridge[J]. Journal of Chang'an University (Natural Science Edition), 2023, 43(5): 51-60.

DOI:10.19721/j.cnki.1671-8879.2023.05.006

自锚式悬索桥索力优化的双矩阵法

赫中营¹, 龙一鸣¹, 王根会²

(1. 河南大学 土木建筑学院, 河南 开封 475004; 2. 兰州交通大学 土木工程学院, 甘肃 兰州 730070)

摘要: 为了确定自锚式悬索桥在目标优化状态下的最优索力, 针对传统影响矩阵法进行索力优化时需要多次迭代计算、对初始条件敏感等问题, 提出索力优化双矩阵法。首先, 考虑主梁存在巨大轴力的结构特点, 根据恒载、初始索力与加劲梁内力确定结构初始刚度, 经过非线性有限元计算, 利用叠加原理得到自锚式悬索桥的 2 个影响矩阵; 随后, 基于影响矩阵基本理论, 推导矩阵方程, 建立结构内力状态与位移状态间的关系, 求解矩阵方程可得指定约束条件下的目标索力, 通过算例阐明双矩阵法的主要计算过程, 并将双矩阵法与传统影响矩阵法进行对比, 分析迭代过程并讨论初始施调索力的影响; 最后, 以三跨自锚式悬索桥为例, 应用双矩阵法实现索力优化。研究表明: 算例中双矩阵法与传统影响矩阵法的计算结果相对偏差最大为 0.14%; 双矩阵法通过矩阵方程直接建立缆索内力与位移约束条件间的关系, 其本质是结构内力与变形间的线性关系, 因此无需进行迭代计算; 双矩阵法不需要限定初始施调索力与索力施加方式, 避免了传统影响矩阵法受初始索力影响导致的无法收敛等问题; 此外, 根据实际应用中索力优化的不同情况, 双矩阵法中的位移约束条件可拓展为塔梁弯矩、截面应力等约束条件, 便于在大跨度悬索桥设计中应用。

关键词: 桥梁工程; 自锚式悬索桥; 索力优化; 双矩阵法; 影响矩阵; 非线性效应

中图分类号: U442.5 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-8879(2023)05-0051-10

Double matrix method for optimizing cable force of self-anchored suspension bridge

HE Zhong-ying¹, LONG Yi-ming¹, WANG Gen-hui²

(1. School of Civil Engineering and Architecture, Henan University, Kaifeng 475004, Henan, China;

2. School of Civil Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, Gansu, China)

Abstract: In order to determine the optimal cable force of a self-anchored suspension bridge under the target optimization state, aiming at the problems of the traditional influence matrix method for cable force optimization, which requires multiple iteration calculations and is sensitive to the initial conditions, the double-matrix method was proposed to optimize cable force. Firstly, considering the structural characteristics of the main girder with huge axial force, the initial stiffness of the structure was determined according to the dead load, the initial cable force and the

收稿日期: 2022-12-27

基金项目: 国家自然科学基金项目(52162043); 河南省科技发展计划项目(182300410150, 162102210173);

甘肃省科技重大专项计划项目(19ZD2GA002); 河南省交通厅项目(2016Y2)

作者简介: 赫中营(1980-), 男, 河南周口人, 副教授, 工学博士, E-mail: hezhzy89@henu.edu.cn.

internal force of the stiffening girder. After nonlinear finite element calculations, two influence matrices of the self-anchored suspension bridge were obtained using the superposition principle. Subsequently, based on the basic theory of the influence matrix, the matrix equation was deduced, and the relationship between internal force state and displacement state of the structure was established. The matrix equation was solved to obtain the target cable force under the specified constraint conditions. Through a calculation example, the main process of the double matrix method was explained, and the double matrix method was compared with the traditional influence matrix method to analyze the iterative process and discuss the impact of initial cable force application. Finally, a three-span self-anchored suspension bridge was taken as an example, the double matrix method was applied to optimize the cable force. The results show that the maximum relative difference between the calculation results of the double matrix method and the traditional influence matrix method in the calculation example is 0.14%. The double matrix method directly establishes the relationship between cable internal force and displacement constraint through the matrix equation, and its essence is the linear relationship between structural internal force and deformation. Therefore, no iterative calculation is required. The double matrix method does not need to limit the initial adjustment cable force and the method of applying cable force, which avoids the problem of inconvergence caused by the influence of initial cable force in the traditional influence matrix method. In addition, according to different situations of cable force optimization in practical applications, the displacement constraint conditions in the double matrix method can be extended to the main tower bending moment, main girder bending moment, section stress and other constraints, which is convenient for application in the design of long-span suspension bridges. 3 tabs, 6 figs, 28 refs.

Key words: bridge engineering; self-anchored suspension bridge; cable force optimization; double matrix method; influence matrix; non-linear effect

0 引言

自锚式悬索桥成桥状态包括体系各部分的内力和线形,它们对悬索桥设计和施工控制尤为重要。其中,索力是求解主缆线形的基础,也决定了自锚式悬索桥加劲梁的内力分布^[1-3]。如何确定 1 组索力,使结构体系在恒载作用下,某些反映受力性能或材料指标的目标达到最优,求解该索力属于典型的成桥索力优化问题。

很多国内外学者对确定自锚式悬索桥索力或成桥状态展开研究,提出了梁段重量法、刚性支撑连续梁法、弯曲应变能最小法、影响矩阵法等多种方法。早期悬索桥设计根据桥面荷载集度及吊杆间距确定恒载索力,活载索力以恒载索力按一定比例估计后得到总索力,这种“梁段重量”计算方式起源于 Melan 提出的悬索桥挠度理论,其概念简单、精确度低。Kim 等在确定韩国永宗大桥成桥索力时采用了此方式^[4-5]。谭冬莲基于有限位移理论以主缆为切入点提出了合理成桥状态解析计算思路,其方法

中成桥索力由吊索间的梁段质量控制,实质还是沿用梁段重量的计算方式^[6]。刚性支撑连续梁法将主梁作为研究对象,在吊索与主梁的锚固点布置刚性支承,计算恒载作用下各支承反力。作为近似算法,其忽略了吊索对主梁的作用是弹性支撑。肖海波等最早应用此方法,将加劲梁简化为刚性支承梁,通过力法求得支承反力作为吊杆力,并基于 Karoumi 提出的悬链线索元节点力与索单元投影的函数关系式确定了成桥主缆线形^[7-8]。弯曲应变能最小法以结构弯曲应变能作为目标函数,寻找在恒载作用下使弯曲能量最小的索力作为合理成桥索力,该方法以集中力代替吊索力代入弯曲应变能求和公式,对集中力求偏导得到弯曲应变能最小时的吊索力。胡建华等通过最小应变能原理求出初步索力和恒载弯矩,并与活载弯矩叠加得到控制弯矩后对索力和弯矩进行调整,该方法实现了同时考虑恒载与活载的索力优化^[9]。刘厚军等提出无限轴向刚度法用以确定吊索合理索力,本质上属于弯曲应变能最小法的具体应用^[10]。对于自锚式悬索桥,通过对比力学图

式与计算公式的物理意义,可知刚性支承连续梁法与弯曲应变能最小法实为同种方法,其主要差别在于选取的目标函数不同^[11]。

随着桥梁建设水平的提高,悬索桥计算理论由平面缆索向空间缆索过渡,计算方法不断向更精细、更高效的目标发展。张志国等由边界条件建立非线性方程组,采用拟牛顿法通过改变参数最终得到成桥状态相关计算公式,结果表明该方法收敛较快、精度较高^[12]。Kim等考虑了加劲梁和主塔轴向压缩的特点,基于弹性悬链线单元提出了一种结合恒载作用下目标构型(TCUD)法和逐次替代初始力法的新算法,结果表明所提出的方法同时适用于悬索桥和斜拉桥^[13]。Zhang等综合考虑不同构件间的相互作用,提出了一种通过有限元模拟实现循环调整的悬索桥找形与内力计算方法,该方法为悬索桥有限元解法提供了新思路^[14]。彭苗等通过建立几何非线性有限元模型,进行迭代计算并不断修改单元无应力长度及刚度矩阵,最终确定了空间缆索的成桥状态^[15]。邢德华等对空间索面悬索桥主缆线形提出了新的解析算法,并编制了相应的MATLAB程序,配合MIDAS/Civil迅速收敛得到了精确的有限元模型^[16]。综上,目前国内外研究对悬索桥线形及内力的计算方法较为完善,计算方式由传统的数值解析计算到与有限元仿真模拟相结合。然而,初始索力依然基于刚性支撑连续梁法或弯曲应变能最小法确定,所能选取的控制条件或目标函数较为单一,此方面的研究相对较少;成桥索力则依赖于利用有限元软件不断调整和迭代计算,应用过程较复杂,且由于不同软件间程序内部索力计算原理存在差异,索力结果易受影响。

影响矩阵法多用于确定斜拉桥、拱桥的索(杆)力,可根据不同优化目标与约束条件,将优化模型转化为前述方法,得到不同的加权优化结果,还可以计入预应力、活载、混凝土收缩徐变等因素的影响,是一种综合索力优化工具^[17-19]。Asgari等基于影响矩阵基本原理,以主梁弯矩和应力为优化目标实现了斜拉桥索力快速优化^[20]。Modano等利用影响矩阵法得到线性方程组,以弯矩为目标提出了尼尔森拱桥索力优化方法^[21]。Mascolo等提出了结合数学敏感分析和影响矩阵法的索力优化程序,其方法可用于悬索桥、斜拉桥、系杆拱桥的设计^[22]。对于自锚式悬索桥,也有学者采用传统影响矩阵法进行索力优化方面的研究,但由于悬索桥属于非线性结构,传统影响矩阵法求解过程中需要多次迭代计算

以逼近真实解,相应的也需要多次调整有限元模型实现优化过程^[23-25]。因此对于大跨度悬索桥,应用传统影响矩阵法比较繁琐,计算时间较长,且迭代收敛过程易受初始施调索力影响。

为克服传统影响矩阵法进行索力优化时需要多次迭代、结果敛散性取决于初始施调索力等问题,本文提出自锚式悬索桥索力优化的双矩阵法。将影响矩阵基本原理与自锚式悬索桥结构特点相结合,以恒载、主缆张力、吊索索力与加劲梁内力作为初始荷载形成初始刚度,建立非线性有限元模型,计算结构响应并构建2个影响矩阵,通过求解矩阵方程代替传统影响矩阵法中多次迭代过程,实现目标状态下索力的快速优化。通过算例阐明双矩阵优化法主要步骤,分析双矩阵法相对于传统影响矩阵法不需迭代、不受初始施调索力限制的优势,最后应用其对自锚式悬索桥工程实例进行索力优化。本文方法可在确定自锚式悬索桥成桥状态阶段为求解特定目标条件下的索力提供参考。

1 双矩阵法基本原理

1.1 影响矩阵基本理论

影响矩阵法应用于悬索桥索力优化时需要建立以下向量和矩阵:

(1)受调向量。结构中关键截面或节点上 n 个独立元素所组成的列向量 \mathbf{D} ,记为

$$\mathbf{D} = (d_1, d_2, \dots, d_n)^T \quad (1)$$

式中:元素 d_i ($i=1, 2, \dots, n$)在不同优化条件下可以是结构内力、截面应力或节点位移。

(2)施调向量。结构中可以实现调整的 m 个独立元素所组成的列向量 \mathbf{X} ,记为

$$\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T \quad (2)$$

式中:元素 x_j ($j=1, 2, \dots, m$)的物理意义同 d_i 。

(3)影响向量。施调向量中第 k 个元素($k=1, 2, \dots, m$)发生单位变化时引起的受调向量改变量 \mathbf{C}_k ,记为

$$\mathbf{C}_k = (c_{1k}, c_{2k}, \dots, c_{nk})^T \quad (3)$$

式中: c_{ik} 为施调向量中第 k 个元素发生单位变化时,引起受调向量中第 i 个元素的改变量。

(4)影响矩阵。施调向量中全部元素发生单位变化时,形成的影响向量依次排列所组成的矩阵 \mathbf{C} ,一般记为

$$\mathbf{C} = (\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \dots, \mathbf{C}_m) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nm} \end{bmatrix} \quad (4)$$

施调向量的改变将引起受调向量的改变,假设结构满足线性叠加原理,则有以下矩阵关系^[26]

$$\mathbf{C}\mathbf{X}=\mathbf{D} \quad (5)$$

式中: \mathbf{C} 为施调向量 \mathbf{X} 对受调向量 \mathbf{D} 的影响矩阵。

需要说明,悬索桥初期找形过程具有较强的非线性,但考虑初始刚度后悬索桥基本属于线性结构,因此可通过叠加原理得到影响矩阵^[27]。换言之,影响矩阵的形成过程基于线性结构假定。线性假定与非线性实际情况的偏差,是造成传统影响矩阵法需要多次迭代计算才能得到收敛结果的根本原因。

自锚式悬索桥主梁的轴向压力对结构变形和计算的影响不可忽略,故本文考虑加劲梁内力与恒载、主缆张力和吊索索力共同构成初始荷载,形成自锚式悬索桥的初始刚度。双矩阵法也适用于地锚式悬索桥,只需考虑恒载、主缆张力和吊索索力构成初始荷载,形成结构初始刚度,其他计算步骤与自锚式悬索桥相同。

1.2 影响矩阵构建

本文提出的双矩阵法需要用到2个影响矩阵:施调索力对缆索内力的影响矩阵 \mathbf{C}^c 以及施调索力对关键节点位移的影响矩阵 \mathbf{C}^d 。其中: \mathbf{C}^c 中元素 $\mathbf{C}_{i_1 j_1}^c$ 为对第 j_1 段缆索施加单位施调索力时,引起第 i_1 段缆索内力的改变量; \mathbf{C}^d 中元素 $\mathbf{C}_{i_1 j_1}^d$ 为对第 j_1 段缆索施加单位施调索力时,引起节点 i_1 位移的改变量。

需要说明,这里“索段”的概念有别于有限元建模时的“单元”。缆索分段规则是:主缆以吊索在主缆上的吊点和索鞍位置作为分段依据,对吊索而言每个吊索就是1个索段。而有限元建模时的单元划分取决于操作者的习惯,每个索段在建模时可能会被划分为1个或者多个单元。

矩阵 \mathbf{C}^c 及 \mathbf{C}^d 的构建过程如下:

第1步,考虑恒载、假定的初始索力与加劲梁内力作为初始荷载,计算初始荷载作用下悬索桥缆索的内力向量 \mathbf{T}_0 及各关键节点的位移向量 \mathbf{D}_0 ,关键节点可选择吊索在主缆上的吊点与主缆在索鞍位置处的相应节点。

第2步,对第 j_1 段缆索施加单位施调索力,计算在初始荷载和第 j_1 段缆索单位施调索力共同作用下悬索桥缆索的内力向量 \mathbf{T}_{j_1} 及各关键节点的位移向量 \mathbf{D}_{j_1} 。

第3步,根据叠加原理,通过 $\mathbf{C}_{j_1}^c=\mathbf{T}_{j_1}-\mathbf{T}_0$ 得到在初始荷载与第 i_1 段缆索单位施调索力共同作用下缆索的内力变化向量 $\mathbf{C}_{j_1}^c$,通过 $\mathbf{C}_{j_1}^d=\mathbf{D}_{j_1}-\mathbf{D}_0$ 得到

各关键节点的位移变化向量 $\mathbf{C}_{j_1}^d$ 。

第4步,重复第2步、第3步,得到2个影响矩阵 $\mathbf{C}^c=(\mathbf{C}_1^c, \mathbf{C}_2^c, \dots, \mathbf{C}_n^c)$ 及 $\mathbf{C}^d=(\mathbf{C}_1^d, \mathbf{C}_2^d, \dots, \mathbf{C}_n^d)$ 。

上述过程中,实际应用时会出现由于所施加的单位力相较于原结构内力而言很小,导致求出的内力变化量或位移变化量也很小,需要在提取有限元软件结果时设置相应的有效数字精确位数才能得到影响矩阵。对于大跨度悬索结构,当软件无法达到指定精确位数而导致运行错误或结果为0时,可对施调索力适当放大,得到更大的结构响应后再单位化从而便于应用。具体方法是将上述第2步~第4步作如下调整,以 \mathbf{C}^d 为例:

第2步,对第 i_1 段缆索施加施调索力 Δ ,计算在初始荷载和施调索力 Δ 共同作用下悬索桥各关键节点的位移向量 \mathbf{D}_{i_1} 。

第3步,通过 $\mathbf{C}_{i_1}^d=(\mathbf{D}_{i_1}-\mathbf{D}_0)\Delta^{-1}$ 得到各关键节点的位移变化向量 $\mathbf{C}_{i_1}^d$ 。

第4步,重复第2步、第3步,得到影响矩阵 $\mathbf{C}^d=(\mathbf{C}_1^d, \mathbf{C}_2^d, \dots, \mathbf{C}_n^d)$ 。

1.3 双矩阵法原理

根据式(5),施调索力向量 \mathbf{X} 与缆索内力改变向量 \mathbf{T} 的关系为

$$\mathbf{C}^c\mathbf{X}=\mathbf{T} \quad (6)$$

施调索力向量 \mathbf{X} 与关键节点位移改变向量 \mathbf{D} 的关系为

$$\mathbf{C}^d\mathbf{X}=\mathbf{D} \quad (7)$$

由式(6)可得

$$\mathbf{X}=(\mathbf{C}^c)^{-1}\mathbf{T} \quad (8)$$

将式(8)代入式(7)得

$$\mathbf{C}^d(\mathbf{C}^c)^{-1}\mathbf{T}=\mathbf{D} \quad (9)$$

由式(9)可得

$$\mathbf{T}=(\mathbf{C}^d(\mathbf{C}^c)^{-1})^{-1}\mathbf{D} \quad (10)$$

在实际应用过程中,式(10)中 \mathbf{T} 的含义是缆索内力相对于初始内力的改变向量,若记优化后的目标索力向量为 \mathbf{T}_t ,优化前的初始索力向量为 \mathbf{T}_0 ,则有 $\mathbf{T}_t=\mathbf{T}_0+\mathbf{T}$ 。同样地, \mathbf{D} 的含义是各关键节点相对于初始位置的位移改变向量,若记位移优化目标为 \mathbf{D}_t ,优化前的初始位移向量为 \mathbf{D}_0 ,则有 $\mathbf{D}_t=\mathbf{D}_0+\mathbf{D}$ 。化简后式(10)即成为

$$\mathbf{T}_t=\mathbf{T}_0+\mathbf{C}^c(\mathbf{C}^d)^{-1}(\mathbf{D}_t-\mathbf{D}_0) \quad (11)$$

若已知结构初始索力状态 \mathbf{T}_0 和初始位移状态 \mathbf{D}_0 ,并通过第1.2节方法求出2个影响矩阵 \mathbf{C}^c 和 \mathbf{C}^d 。给定目标位移状态 \mathbf{D}_t ,则可直接通过式(11)的矩阵方程求得优化后的目标索力向量 \mathbf{T}_t 。

2 双矩阵法优化过程

双矩阵法索力优化流程如图 1 所示。结构初始内力效应是几何非线性效应的来源之一^[28],在设定恒载之后,一般可以根据内力平衡法来假定初始索力与加劲梁内力,形成结构初始刚度。

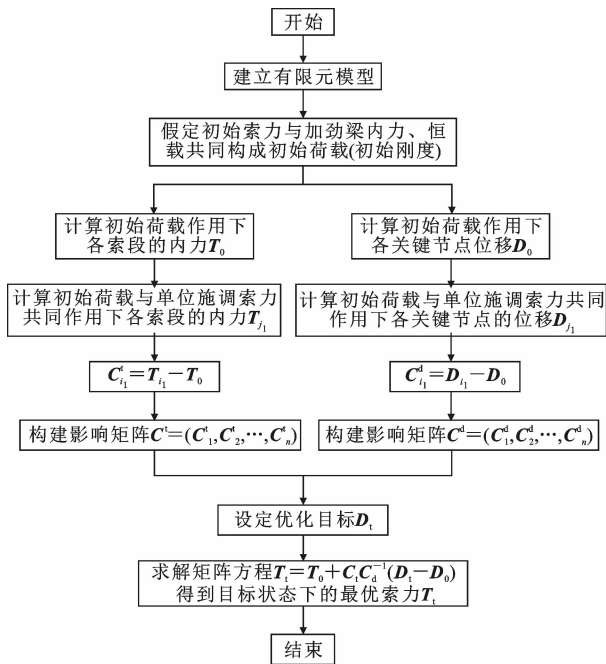


图 1 双矩阵法索力优化流程

Fig. 1 Cable force optimization process of double matrix method

通过图 2 所示算例详细说明双矩阵法的应用过程,并验证其可行性。在该自锚式悬索结构中,主梁和主缆的跨度均为 24 m。主缆和吊索采用高强平行钢丝,材料弹性模量为 195 GPa。主缆截面面积为 0.019 69 m²,吊索截面面积为 0.007 854 m²,主缆和吊索不承担弯矩。主梁材料采用 Q345 钢材,弹性模量为 206 GPa。主梁截面面积为 0.895 m²,抗弯惯性矩为 0.022 5 m²。在主梁上作用竖向均布荷载 200 kN·m⁻¹。

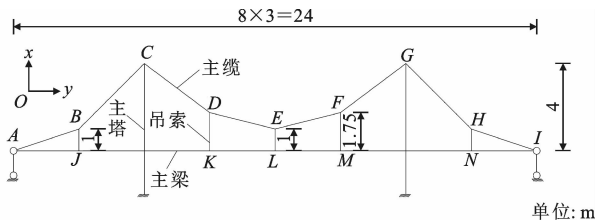


图 2 自锚式悬索结构

Fig. 2 Self-anchored suspension structure

2.1 优化目标

自锚式悬索桥进行索力优化的目标是达到合理成桥状态,包括内力状态和线形状态,内力状态

应包括主梁、索塔和缆索的受力状态;线形状态主要是主梁成桥线形和主缆几何线形^[28]。结合算例,索力优化最终目标是使结构具有以下内力及位移状态:

(1)吊索保持竖直,B、D、E、F 和 H 点没有水平位移,即 $d_{xB} = d_{xD} = d_{xE} = d_{xF} = d_{xH} = 0$;

(2)索塔轴心受压,C 和 G 点没有水平位移,即 $d_{xC} = d_{xG} = 0$;

(3)主梁弯曲应变能最小,J、K、L、M 和 N 点没有竖向位移,即 $d_{yJ} = d_{yK} = d_{yL} = d_{yM} = d_{yN} = 0$;

(4)主缆的矢高不变,跨中没有竖向位移,即 $d_{yE} = 0$ 。

2.2 计算过程

根据图 2 采用 MIDAS/Civil 软件建立有限元模型,按照内力平衡法估算并设置主缆初始索力为 1 000 kN(+),吊索初始索力为 500 kN(+),主梁初始内力为 1 000 kN(-) (“+”、“-”分别表示缆索内力与主梁内力方向相同、相反),与恒载共同组成结构初始荷载。根据前述分段规则将缆索分为 8 个主缆索段和 5 个吊索索段,并将各索段内力记作索力向量 $(T_{AB}, T_{BC}, T_{CD}, T_{DE}, T_{EF}, T_{FG}, T_{GH}, T_{HI}, T_{BJ}, T_{DK}, T_{EL}, T_{FM}, T_{HN})^T$,将第 2.1 节优化控制目标写作位移向量 $(d_{xB}, d_{xC}, d_{xD}, d_{xE}, d_{xF}, d_{xG}, d_{xH}, d_{yJ}, d_{yK}, d_{yL}, d_{yM}, d_{yN}, d_{yE})^T$ 。利用软件进行非线性分析,可得该悬索结构在初始荷载作用下的索力向量与位移向量分别为: $T_0 = (575.90, 772.21, 721.33, 594.41, 594.41, 721.33, 772.21, 575.90, 363.55, 288.84, 289.30, 288.84, 363.55)^T$ kN; $D_0 = (0.275, 2.358, 0.196, 0, -0.196, -2.358, -0.275, 0.470, -4.549, -7.040, -4.549, 0.470, -6.860)^T$ mm。

对 AB 段主缆施加 500 kN 施调索力后,再次利用有限元软件计算,可得索力向量为: $T_1 = (1 075.90, 1 432.76, 1 248.47, 1 027.85, 1 025.22, 1 241.63, 1 424.93, 1 062.93, 670.98, 499.57, 498.59, 496.11, 670.53)^T$ kN。

作差可得单位索力改变向量为: $C_1 = T_1 - T_0 = (500.00, 660.55, 527.14, 433.44, 430.81, 520.30, 652.72, 487.03, 307.43, 210.73, 209.29, 207.27, 306.98)^T \times \frac{1}{500}$ kN。

该向量就是 C^e 矩阵的第 1 列,对其余缆索采取同样的方法可以得到其他列从而形成 C^e 矩阵如下 $C_{13 \times 13} =$

$$\begin{bmatrix}
 1.00 & 0.74 & 0.81 & \cdots & 1.90 & 1.85 & 1.50 \\
 1.32 & 1.00 & 1.09 & \cdots & 2.55 & 2.48 & 2.01 \\
 1.05 & 0.80 & 1.00 & \cdots & 2.34 & 2.28 & 1.60 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0.42 & 0.32 & 0.40 & \cdots & 1.00 & 0.89 & 0.64 \\
 0.41 & 0.31 & 0.39 & \cdots & 0.90 & 1.00 & 0.65 \\
 0.61 & 0.46 & 0.50 & \cdots & 1.20 & 1.19 & 1.00
 \end{bmatrix} \text{ kN}$$

同理,以位移向量代替索力向量重复上述计算过程,可得 C^d 矩阵如下

$$C_{13 \times 13}^d = \begin{bmatrix}
 9.39 & 8.35 & 0.73 & \cdots & 1.76 & 1.76 & 14.54 \\
 7.11 & 5.36 & 2.46 & \cdots & 5.82 & 5.70 & 10.89 \\
 1.42 & 1.07 & 10.72 & \cdots & 18.95 & 18.52 & 2.20 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
 5.27 & 3.97 & 5.21 & \cdots & 12.44 & 12.32 & 8.03 \\
 0.18 & 0.14 & 0.40 & \cdots & 0.94 & 0.96 & 0.15 \\
 8.64 & 6.51 & 8.49 & \cdots & 67.45 & 19.80 & 13.22
 \end{bmatrix} 10^{-3} \text{ mm}$$

根据优化目标,目标位移向量为 $D_t = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$, 于是将 T_0 、 D_0 、 C^e 、 C^d 、 D_t 代入式(11)求解矩阵方程即可得到目标索力向量 T_t 。将 T_t 中的索力列于表 1 中,同时为了对比和验证,利用传统影响矩阵法对本算例进行索力优化,经过迭代计算之后的索力结果如表 1 所示。

表 1 双矩阵法与传统影响矩阵法优化结果对比

Tab. 1 Comparison of optimization results between double matrix method and traditional influence matrix method

缆索编号	双矩阵法优化结果/kN	传统影响矩阵法优化结果/kN	相对偏差/%
AB	1 303.65	1 301.88	0.14
BC	1 710.23	1 709.55	0.04
CD	1 556.01	1 556.23	-0.01
DE	1 253.26	1 252.83	0.03
EF	1 253.26	1 252.85	0.03
FG	1 556.01	1 556.23	-0.01
GH	1 710.23	1 709.56	0.04
HI	1 303.65	1 301.87	0.14
BJ	751.41	751.42	0.00
DK	694.15	694.35	-0.03
EL	531.31	531.59	-0.05
FM	694.15	694.35	-0.03
HN	751.41	751.42	0.00

由表 1 可得,本文所提出的双矩阵法与传统影响矩阵法索力计算结果基本一致,优化结果的相对偏差最大为 0.14%,由此说明本文方法精确度较高。本文算例以关键节点位移作为优化目标,在实

际的工程应用中,优化目标还包括塔梁弯矩、截面应力等。具体应用方法是根据指定的优化目标,在构建影响矩阵时以塔梁弯矩改变量、截面应力改变量替换关键节点位移改变量,并在求解矩阵方程时以相应状态量替换位移状态量。

2.3 计算分析

通过优化过程可以发现,相较于传统影响矩阵法,双矩阵法最大的特点在于不需要进行多次迭代,在求出影响矩阵后仅需要通过解 1 个矩阵方程就能得到索力优化结果。为分析其中原因,对第 2.2 节算例应用传统影响矩阵法(初始条件不变),采用不同的初始施调索力进行迭代计算,结果见表 2。程序内最大迭代次数设置为 900,表 2 中无法得到收敛结果的原因是随着迭代次数的增加,索力结果无限增大。

表 2 传统影响矩阵法不同初始施调索力计算结果对比

Tab. 2 Comparison of calculation results of different adjustment cable forces using traditional influence matrix method

初始施调索力/kN	得到收敛结果所需迭代计算次数
100(主缆),100(吊索)	3
500(主缆),500(吊索)	2
1 000(主缆),1 000(吊索)	1
5 000(主缆),5 000(吊索)	4
10 000(主缆),10 000(吊索)	无法得到收敛结果
1 000(主缆),10 000(吊索)	无法得到收敛结果

悬索桥属于几何非线性结构,传统影响矩阵法所建立的施调索力与节点位移的关系采用了线性假定,即假定结构刚度在迭代过程中保持不变。可以推测,若初始施调索力接近目标索力,则施加的结构刚度与真实刚度接近,计算过程收敛较快;若初始施调索力与目标索力差异较大,则施加的结构刚度不合理,计算过程不易收敛。这与表 2 的结果相吻合。

本文提出的双矩阵法,通过矩阵运算直接建立了结构内力与位移间的关系,在不考虑材料非线性的前提下,两者之间为线性关系。因此,双矩阵法不需要进行迭代,仅需求解矩阵方程即可得到结果。此外,双矩阵法相较于传统影响矩阵法的优势还在于不需要选定初始施调索力,避免了可能无法得到收敛结果的问题。

2.4 施调索力的施加方式

在 MIDAS/Civil 中对索单元施加的初拉力分为体内力和体外力 2 种类型,其含义不同。若为体内力类型,程序将初拉力以变形的的方式加载到单元上,其作用效果与施加温度荷载相似,单元最终内力与两端的锚固条件或连接情况有关。例如:当两端

完全固结时,单元内力等于所加载的初拉力;而当单元两端完全自由时,单元内力为 0。若为体外力类型,程序将初拉力荷载以作用力的方式加载到单元上,在求解之前就对单元两端节点施加了 1 个恒定力,无论两端锚固条件或连接情况如何,该单元内力就是初拉力。

在第 2.3 节算例索力优化过程中,施调索力采取的是体外力施加方式,其中 C^e 矩阵的主对角线元素均为 1,这与 C^e 元素的物理意义及体外力含义相符。当采取体内力施加方式时,所得 C^e 矩阵和 C^d 矩阵如式(12)、式(13)所示,最终优化结果见表 3。2 种方式计算结果不完全相同的原因来源于软件非线性分析功能内部计算差异,本文不做讨论。

式(12)、式(13)可表示为

$$C_{13 \times 13}^e = \begin{bmatrix} 3.97 & 7.09 & 5.00 & \cdots & 1.33 & 2.32 & 1.96 \\ 5.32 & 9.53 & 6.71 & \cdots & 1.78 & 3.11 & 2.62 \\ 4.24 & 7.58 & 6.18 & \cdots & 1.64 & 2.86 & 2.09 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1.70 & 3.03 & 2.47 & \cdots & 0.68 & 1.12 & 0.84 \\ 1.70 & 3.03 & 2.47 & \cdots & 0.64 & 1.20 & 0.84 \\ 2.51 & 4.47 & 3.16 & \cdots & 0.84 & 1.46 & 1.27 \end{bmatrix} \text{ kN} \quad (12)$$

$$C_{13 \times 13}^d = \begin{bmatrix} 38.61 & 80.67 & 38.61 & \cdots & 1.24 & 2.15 & 18.98 \\ 28.91 & 51.60 & 28.91 & \cdots & 4.09 & 7.14 & 14.19 \\ 5.84 & 10.44 & 5.84 & \cdots & 13.28 & 23.17 & 2.85 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 21.32 & 38.05 & 21.32 & \cdots & 8.64 & 15.18 & 10.43 \\ 0.71 & 1.26 & 0.71 & \cdots & 0.65 & 1.18 & 0.26 \\ 35.06 & 62.56 & 35.06 & \cdots & 47.96 & 24.59 & 17.20 \end{bmatrix} 10^{-3} \text{ mm} \quad (13)$$

由表 3 可得,对于双矩阵法中的施调索力,采取体外力与体内力施加方式最终得到的索力结果基本一致。其原因可从两方面分析:一方面,对确定的结构体系和优化目标,采取同一方法其结果由体系自身决定,与荷载施加方式无关;另一方面,双矩阵法建立的是结构位移与内力之间的矩阵关系,对缆索施加荷载后,其形变量与索力是唯一对应的线性关系,与荷载施加方式无关。

当采用传统影响矩阵法进行索力优化时,所施加的施调索力只能是体内力类型。因为在迭代过程中,施调索力计算值可能为负,即为压力。此时选择体内力类型,其作用效果与温度荷载相似;若选择体外力类型,则由于不能直接对缆索施加压力而不具实际物理意义。

表 3 双矩阵法不同索力施加方式优化结果对比

Tab. 3 Comparison of optimization results of different cable force application methods using double matrix method

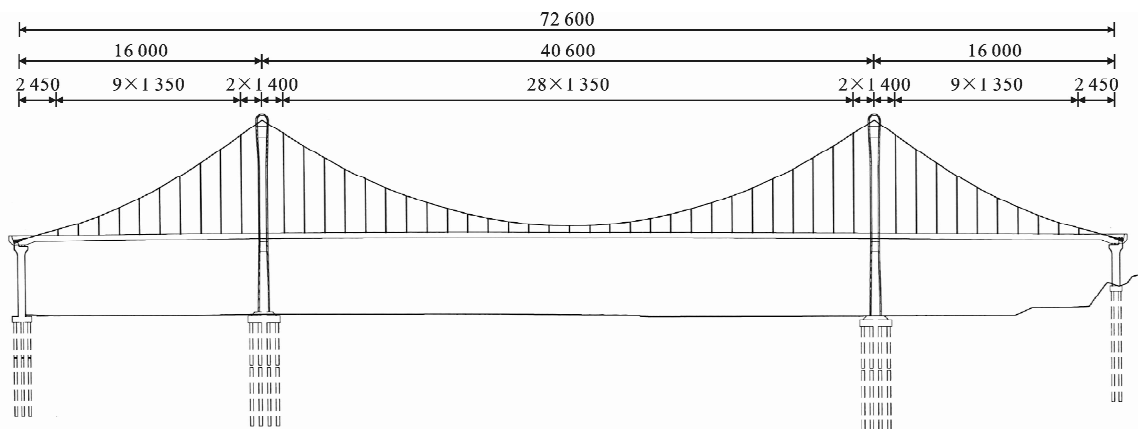
缆索编号	体外力施加方式 优化结果/kN	体内力施加方式 优化结果/kN	相对偏差/ %
AB	1 303.65	1 301.73	0.15
BC	1 710.23	1 709.70	0.03
CD	1 556.01	1 556.69	-0.04
DE	1 253.26	1 253.54	-0.02
EF	1 253.26	1 253.54	-0.02
FG	1 556.01	1 556.69	-0.04
GH	1 710.23	1 709.70	0.03
HI	1 303.65	1 301.73	0.15
BJ	751.41	751.47	-0.01
DK	694.15	694.30	-0.02
EL	531.31	531.84	-0.10
FM	694.15	694.30	-0.02
HN	751.41	751.47	-0.01

由此可见,虽然都需要用到有限元软件的非线性分析功能,但是相较于传统影响矩阵法,双矩阵法不需要限定施调索力的施加方式,无论采用哪种方式,经过同一优化流程所得结果一致。因此,双矩阵法在应用层面更具便捷性。

3 工程算例

某双塔三跨自锚式悬索桥跨径布置为 160+406+160=726 m,桥梁宽度为 39 m。主梁采用整体式钢箱梁,钢梁主体结构采用 Q345D 钢。主缆为平面线形,布置于钢箱梁两侧,缆索中心线横桥向间距 36 m,中跨矢跨比为 1/5.8。2 个边跨分别设置 10 对吊索,中跨设置 29 对吊索。吊索基本间距为 13.5 m,桥塔两侧的吊索距桥塔中心线 14 m。主缆与吊索均采用公称抗拉强度为 1 670 MPa 的高强镀锌钢丝。桥塔采用门式塔,由塔柱、上下横梁、塔冠及塔座组成,采用 C50 混凝土。桥塔总高 135.56 m(左塔)、138.06 m(右塔),2 座桥塔在桥面以上的高度均为 78.913 m。该悬索桥立面布置如图 3 所示。

采用有限元软件 MIDAS/Civil 建立全桥模型如图 4 所示。考虑自锚式悬索桥几何非线性效应和各构件的受力特点,确定主缆与吊索均以考虑大变形的索单元模拟,主梁与主塔以一般梁/变截面梁单元模拟。边界条件设置如下:桥塔处下横梁布置的竖向支撑采用纵向活动支座,同时在塔柱内侧与钢箱梁外腹板之间设置横桥向限位装置;边墩处主梁一侧设置多向活动支座,另一侧设置纵向活动支座;



单位: cm

图3 某三跨自锚式悬索桥立面布置示意

Fig. 3 Schematic of elevation layout of a three-span self-anchored suspension bridge

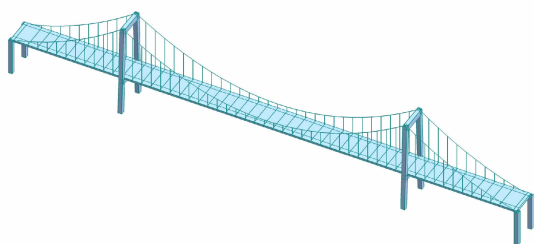


图4 全桥有限元模型

Fig. 4 Finite element analysis model of entire bridge

塔底与墩底均固结。程序内考虑结构自重,二期恒载以线荷载的形式进行模拟。结构中单侧主缆编号为1~52,吊索编号为53~101。

采用双矩阵法计算,得到全桥索力优化结果如图5、图6所示,同时给出采用传统影响矩阵法经过迭代计算所得结果。对比可得,双矩阵法主缆张力与吊索索力计算结果与传统影响矩阵法基本一致,同时双矩阵法不需要多次迭代计算,说明该方法应用于自锚式悬索桥索力优化时具有可行性与高效性。图6中边墩处吊索索力偏大的原因是该位置主梁节段较长,桥塔处吊索索力发生突变的原因是桥塔横梁上的支座和塔柱内侧限位装置对主梁的约束作用。

4 结 语

(1) 双矩阵法所推导的矩阵方程依据缆索内力与结构位移的关系,其本质是结构内力与变形间的线性关系,因此不需要迭代计算。

(2) 双矩阵法在优化过程中无需选定初始施调索力代入矩阵方程、无需限定索力施加方式,避免了无法收敛的问题。该方法继承了传统影响矩阵法的优点,简化了计算流程,提高了计算效率,便于在大

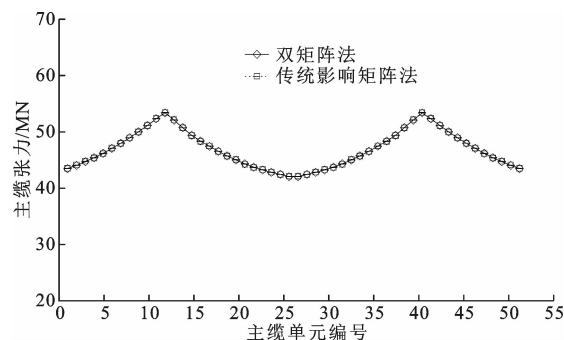


图5 给定目标状态下主缆张力优化结果

Fig. 5 Optimization results of main cable tension under given target state

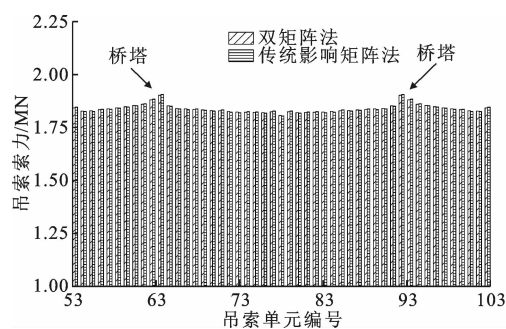


图6 给定目标状态下吊索索力优化结果

Fig. 6 Optimization results of cable force under given target state 跨度悬索桥中的应用。

(3) 除了指定位移约束条件的优化,双矩阵法还可应用于指定塔梁弯矩、特定截面应力等目标状态下的索力优化,使其具有更广泛的实用价值。

(4) 双矩阵法应用过程中,体系初始内力对结构刚度和计算结果有一定影响,本文通过内力平衡法估算初始刚度,后续可对此开展进一步研究,可考虑优化初始刚度计算方法、深入分析不同初始刚度对最终索力结果的影响规律,以确定初始荷载计算准

则,精细计算初始刚度。

参考文献:

References:

- [1] 武芳文,罗建飞,郑 伟,等.基于稳健回归法的自锚式悬索桥荷载效率系数优化[J].长安大学学报(自然科学版),2020,40(2):74-82.
WU Fang-wen,LUO Jian-fei,ZHENG Wei,et al. Optimization of load efficiency coefficient of self-anchored suspension bridge based on method of robust regression[J]. Journal of Chang'an University (Natural Science Edition),2020,40(2):74-82.
- [2] 袁 毅,易伦雄.武汉古田桥:自锚式悬索桥设计及关键技术[J].桥梁建设,2019,49(2):80-85.
YUAN Yi,YI Lun-xiong. Design and key techniques of Gutian Self-anchored Suspension Bridge in Wuhan [J]. Bridge Construction,2019,49(2):80-85.
- [3] 薛 雄,高宝峰.贵港市同济大桥自锚式悬索桥总体设计[J].世界桥梁,2016,44(1):10-14.
XUE Xiong,GAO Bao-feng. Overall design of self-anchored suspension bridge of Tongji Bridge in Guigang City[J]. World Bridges,2016,44(1):10-14.
- [4] KIM H K,LEE M J,CHANG S P. Non-linear shape-finding analysis of a self-anchored suspension bridge [J]. Engineering Structures,2002,24(12):1547-1559.
- [5] 张元凯,肖汝诚,金成棣.自锚式悬索桥的设计[J].桥梁建设,2002,32(5):30-32.
ZHANG Yuan-kai,XIAO Ru-cheng,JIN Cheng-di. Design of self-anchored suspension bridge[J]. Bridge Construction,2002,32(5):30-32.
- [6] 谭冬莲.大跨径自锚式悬索桥合理成桥状态的确定方法[J].中国公路学报,2005,18(2):51-55.
TAN Dong-lian. Decision method on reasonable design state of self-anchored suspension bridge [J]. China Journal of Highway and Transport,2005,18(2):51-55.
- [7] 肖海波,俞亚南,高庆丰.自锚式悬索桥主缆成桥线形分析[J].浙江大学学报(工学版),2004,38(11):1470-1473.
XIAO Hai-bo,YU Ya-nan,GAO Qing-feng. Analysis of finished main cable shape of self-anchored suspension bridges[J]. Journal of Zhejiang University (Engineering Science),2004,38(11):1470-1473.
- [8] KAROUMI R. Some modeling aspects in the nonlinear finite element analysis of cable supported bridges [J]. Computers & Structures,1999,71(4):397-412.
- [9] 胡建华,唐茂林,崔建峰,等.自锚式悬索桥恒载吊索力的设计方法研究[J].桥梁建设,2007,37(2):39-42.
HU Jian-hua,TANG Mao-lin,CUI Jian-feng,et al. Research of design method for dead load hanger forces of self-anchored suspension bridges[J]. Bridge Construction,2007,37(2):39-42.
- [10] 刘厚军,刘 钊.自锚式悬索桥吊索张力及主缆线形的设计研究[J].土木工程学报,2008,41(3):79-83.
LIU Hou-jun,LIU Zhao. Design of hanger tension and cable configuration for self-anchored suspension bridges[J]. China Civil Engineering Journal,2008,41(3):79-83.
- [11] 李小年,张小月,马如进,等.自锚式悬索桥合理成桥状态的实用计算方法[J].公路交通科技,2013,30(6):82-87.
LI Xiao-nian,ZHANG Xiao-yue,MA Ru-jin,et al. Practical calculation method of rational completion status of self-anchored suspension bridge[J]. Journal of Highway and Transportation Research and Development,2013,30(6):82-87.
- [12] 张志国,张庆芳,邹振祝.悬索桥成桥状态计算方法[J].长安大学学报(自然科学版),2006,26(1):59-62,66.
ZHANG Zhi-guo,ZHANG Qing-fang,ZOU Zhen-zhu. Analytical methods of suspension bridge geometry under dead loads[J]. Journal of Chang'an University (Natural Science Edition),2006,26(1):59-62,66.
- [13] KIM H K,KIM M Y. Efficient combination of a TCUD method and an initial force method for determining initial shapes of cable-supported bridges[J]. International Journal of Steel Structures,2012,12(2):157-174.
- [14] ZHANG W M,CHANG J Q,TIAN G M. FEM-based shape-finding and force-assessment of suspension bridges via completed loop adjustment[J]. Journal of Bridge Engineering,2022,27(1):71-79.
- [15] 彭 苗,卢哲安.空间缆索自锚式悬索桥成桥状态的确定方法[J].公路交通科技,2008,25(11):101-104.
PENG Miao,LU Zhe-an. A method for determining dead-load state of spatial-cable self-anchored suspension bridge[J]. Journal of Highway and Transportation Research and Development,2008,25(11):101-104.
- [16] 邢德华,刘化涤.基于MATLAB空间索面自锚式悬索桥主缆成桥线形精确计算[J].公路,2019,64(6):131-135.
XING De-hua,LIU Hua-di. Precise calculation of main cable shape of spatial cable plane self-anchored

- suspension bridge based on MATLAB[J]. Highway, 2019, 64(6): 131-135.
- [17] 戴杰, 秦凤江, 狄谨, 等. 斜拉桥成桥索力优化方法研究综述[J]. 中国公路学报, 2019, 32(5): 17-37.
DAI Jie, QIN Feng-jiang, DI Jin, et al. Review on cable force optimization method for cable-stayed bridge in completed bridge state[J]. China Journal of Highway and Transport, 2019, 32(5): 17-37.
- [18] LEE T Y, KIM Y H, KANG S W. Optimization of tensioning strategy for asymmetric cable-stayed bridge and its effect on construction process [J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2008, 35(6): 623-629.
- [19] 刘迎春. 上承式拉索组合拱桥索力优化与受力性能研究[D]. 北京: 北京工业大学, 2012.
LIU Ying-chun. Study on cable force optimization and mechanical performance of through cable composite arch bridge[D]. Beijing: Beijing University of Technology, 2012.
- [20] ASGARI B, OSMAN S A, ADNAN A. A new multi-constraint method for determining the optimal cable stresses in cable-stayed bridges [J]. The Scientific World Journal, 2014, 2014: 503016.
- [21] MODANO M, MAJUMDER A, SANTOS F, et al. Fast and optimized calculation of the cable pretension forces in arch bridges with suspended deck[J]. Frontiers in Built Environment, 2020, 6: 114.
- [22] MASCOLO I, MODANO M. Optimisation of suspended-deck bridge design: A case study[J]. Australian Journal of Structural Engineering, 2020, 21(3): 244-253.
- [23] 吕哲, 郑力. 确定自锚式悬索桥索力的影响矩阵法[J]. 沈阳大学学报(自然科学版), 2014, 26(5): 404-407.
LYU Zhe, ZHENG Li. Determining construction sus-
pender force of self-anchored suspension bridge based on influence matrix[J]. Journal of Shenyang University (Natural Science), 2014, 26(5): 404-407.
- [24] 贾一全, 刘世忠. 刘家峡大桥吊索长度计算及索力优化[J]. 公路工程, 2015, 40(3): 42-45, 69.
JIA Yi-quan, LIU Shi-zhong. The hanger length calculation and forces optimization analysis of Liujiaxia Suspension Bridge[J]. Highway Engineering, 2015, 40(3): 42-45, 69.
- [25] 王会利, 秦泗凤, 李盛洋. 基于影响矩阵理论的悬索桥索力优化[J]. 中国铁道科学, 2017, 38(2): 49-54.
WANG Hui-li, QIN Si-feng, LI Sheng-yang. Optimization of cable force for suspension bridge based on influence matrix theory[J]. China Railway Science, 2017, 38(2): 49-54.
- [26] 肖汝诚, 项海帆. 斜拉桥索力优化的影响矩阵法[J]. 同济大学学报(自然科学版), 1998, 26(3): 235-240.
XIAO Ru-cheng, XIANG Hai-fan. Influence matrix method of cable tension optimization for cable-stayed bridges[J]. Journal of Tongji University (Natural Science), 1998, 26(3): 235-240.
- [27] 肖海珠, 张晓勇, 徐恭义. 武汉杨泗港长江大桥主桥静、动力特性研究[J]. 世界桥梁, 2019, 47(6): 70-73.
XIAO Hai-zhu, ZHANG Xiao-yong, XU Gong-yi. Study of static and dynamic property of main bridge of Yangsigang Changjiang River Bridge in Wuhan[J]. World Bridges, 2019, 47(6): 70-73.
- [28] 周云岗. 基于迭代分析的多塔悬索桥合理成桥状态确定方法[J]. 郑州大学学报(工学版), 2014, 35(1): 99-103.
ZHOU Yun-gang. Determination method of reasonable finished dead state of multi-town suspension bridges based on iterative analysis [J]. Journal of Zhengzhou University (Engineering Science), 2014, 35(1): 99-103.