

刘永健, 柴 亮, 邢子寒, 等. 薄壁杆件组合扭转中约束扭转占比研究[J]. 长安大学学报(自然科学版), 2024, 44(2): 46-56.
LIU Yong-jian, CHAI Liang, XING Zi-han, et al. Research on the proportion of constrained torsion in the mixed torsion of thin-walled bar[J].
Journal of Chang'an University (Natural Science Edition), 2024, 44(2): 46-56.

DOI: 10.19721/j.cnki.1671-8879.2024.02.005

薄壁杆件组合扭转中约束扭转占比研究

刘永健^{1,2}, 柴 亮¹, 邢子寒¹, 李江江¹, 封博文¹

(1. 长安大学 公路学院, 陕西 西安 710064;

2. 长安大学 公路大型结构安全教育部工程研究中心, 陕西 西安 710064)

摘 要: 为确定在不同边界条件下薄壁杆件以组合扭转方式抗扭时自由扭转和约束扭转的比例关系, 首先, 基于 Vlasov 薄壁结构理论建立组合扭转微分方程, 并按照初参数法推导出薄壁杆件在集中扭矩和均布扭矩作用下的约束扭转占比公式。以简支边界为基准, 通过引入约束刚度系数 β , 分析边界条件对于约束扭转占比的影响。然后, 使用有限元软件 ABAQUS 对公式进行验证。最后, 给出钢结构桥梁常见截面的约束扭转特征系数 κ 的计算公式, 并统计双工字钢板组合梁桥与钢箱梁桥的 κ 分布范围。研究结果表明: 所推导的约束扭转占比公式与 ABAQUS 计算结果吻合良好; 约束扭转占比与截面的 κ 和边界条件有关; κ 越大, 约束扭转占比越小, 且随着 κ 变化, 边界条件对于约束扭转占比的影响程度发生变化; β 可以表征边界条件对约束扭转占比的影响程度; 简化分析时, 当 $0 < \kappa \leq 0.6$ 时可以忽略自由扭转的影响, 仅按约束扭转进行分析, 当 $\kappa \geq 40$ 时可以忽略约束扭转的影响, 仅按自由扭转进行分析, 当 $0.6 < \kappa < 40$ 时需按组合扭转进行分析; 所统计的双工字钢板组合梁桥的 κ 为 $0.71 \sim 1.58$, 钢箱梁桥的 $\kappa > 39$ 。

关键词: 桥梁工程; 薄壁杆件; 有限元模型; 自由扭转; 约束扭转; 边界条件

中图分类号: U441

文献标志码: A

文章编号: 1671-8879(2024)02-0046-11

Research on proportion of constrained torsion in mixed torsion of thin-walled bar

LIU Yong-jian^{1,2}, CHAI Liang¹, XING Zi-han¹, LI Jiang-jiang¹, FENG Bo-wen¹

(1. School of Highway, Chang'an University, Xi'an 710064, Shaanxi, China; 2. Research Center of Highway Large Structure Engineering on Safety of Ministry of Education, Chang'an University, Xi'an 710064, Shaanxi, China)

Abstract: In order to determine the proportional relationship between pure torsion and constrained torsion of thin-walled bar under mixed torsion with different boundary conditions, firstly, the mixed torsion differential equation was established based on Vlasov thin-walled structure theory. The proportion formula for constrained torsion of thin-walled bar under concentrated torque and uniform torque was derived using the initial parameter method. Based on

收稿日期: 2023-11-15

基金项目: 中央高校基本科研业务费专项资金项目(300102219310); 宁波市交通运输科技项目(202301)

作者简介: 刘永健(1966-), 男, 江西玉山人, 教授, 博士研究生导师, E-mail: lyj.chd@gmail.com。

simply supported boundary, the influence of boundary conditions on the proportion of constrained torsion was analyzed by introducing the constraint stiffness coefficient β . Then, the formula was verified using the finite element software ABAQUS. Finally, the calculation formula for the constrained torsion characteristic coefficient κ of the common section of steel bridge was provided, and the distribution range of κ for the steel-concrete composite twin I-girder bridge and the steel box girder bridge were counted. The results show that the derived formula for constrained torsion ratio agrees well with the calculation results obtained from ABAQUS. The proportion of constrained torsion is affected by the section's κ and boundary conditions. A larger κ corresponds to a smaller proportion of constraint torsion, and the influence of boundary conditions on the proportion of constraint torsion changes with κ . The β can effectively characterize the influence of boundary conditions on the proportion of constraint torsion. In simplified analysis, when $0 < \kappa \leq 0.6$, the influence of pure torsion can be disregarded, and the analysis can focus solely on constrained torsion. When κ exceeds 40, the impact of constrained torsion can be neglected, and the analysis can be based solely on pure torsion. In the case where $0.6 < \kappa < 40$, a mixed torsion analysis is required. The calculated κ range for the steel-concrete composite twin I-girder bridge is 0.71 to 1.58, and the κ for the steel box beam bridge is greater than 39. 8 tabs, 10 figs, 26 refs.

Key words: bridge engineering; thin-walled bar; FEM; pure torsion; constrained torsion; boundary condition

0 引言

薄壁结构由于其自重轻、力学性能良好等特点,在建筑、桥梁以及车辆船舶等结构中有着广泛应用^[1]。在桥梁结构中,钢板组合梁桥、钢箱组合梁桥以及钢箱梁桥都可以采用薄壁结构理论进行分析^[2-4],薄壁结构扭转分析是薄壁问题分析中的重点。薄壁杆件的截面有开口截面和闭口截面2种形式,在受到偏离剪切中心的荷载作用时,薄壁杆件发生扭转变形,通常以组合扭转方式抗扭,即自由扭转与约束扭转2种抗扭方式共同抵抗外扭矩,通常认为开口截面短杆主要以约束扭转抗扭,闭口截面长杆以自由扭转抗扭^[5]。

在对薄壁杆件扭转效应进行近似分析时,确定自由扭转扭矩与约束扭转扭矩占总扭矩的比例,就能对其进行简化计算;在薄壁杆件抗扭设计时,按占据主导地位的扭转进行控制设计,即可满足设计要求^[6]。对于薄壁杆件的受扭分析,《美国钢结构设计标准》中第12.6.1节和第12.6.2节、《欧洲规范》(EN 1993-1-1)中第6.2.7(7)节和日本《道路桥示方书》中第11.2.4节中均规定可以忽略自由扭转对开口截面杆件进行近似计算,忽略约束扭转对闭口截面杆件进行近似计算^[7-9];韩国《公路桥梁设计标准2010》中第3.8.2.3节中指出,薄壁杆件受扭分

析时自由扭转或约束扭转是否可以忽略取决于约束扭转特征系数 κ ,当 $0 < \kappa < 0.4$ 时,可以忽略自由扭转引起的应力,当 $\kappa > 10$ 时,可以忽略约束扭转引起的应力^[10];中国规范《钢结构设计标准》(GB 50017—2017)未列出受扭杆件的设计内容^[11]。因此有必要对组合扭转中自由扭转与约束扭转的比例关系进行研究,从而确定是否可以仅按自由扭转或约束扭转来进行分析。

以约束扭转占比表示组合扭转中自由扭转与约束扭转的比例关系,薄壁杆件的约束扭转占比由截面刚度和约束刚度共同决定,截面刚度与薄壁杆件的截面形式有关,采用约束扭转特征系数 κ 来表征杆件的截面刚度;约束刚度与边界条件有关。Lebet等通过建立组合扭转微分方程,给出了简支杆件受到均布扭矩以及跨中集中扭矩作用时 κ 与约束扭转占比的关系曲线图^[12]。Kollbrunner等提出了简支杆件在均布扭矩和跨中集中扭矩以及两端双力矩作用下的约束扭转占比公式并给出了相关曲线^[13]。Nakai等研究了连续梁在均布扭矩和集中扭矩作用下特定截面中的约束扭转占比^[14]。Komatsu等给出了曲线梁桥的组合扭转微分方程,并统计了3种不同截面实桥的 κ 分布^[15]。Okeil等给出了变截面桥梁的 κ 计算公式,并统计了不同圆心角下开口截面和闭口截面曲线梁桥的 κ 分布范围^[16]。综上,目

前的研究大多针对简支边界,在实际工程中还存在两端固结、一端固结一端铰接、悬臂等边界条件,如在连续刚构桥的施工阶段会出现悬臂状态^[17-18],在成桥阶段,边跨可采用一端固结、一端铰接,中跨可近似采用两端固结的力学模型^[19],而对于这些边界条件下的约束扭转占比研究较少。

本文通过初参数法推导不同边界条件下薄壁杆件在受集中扭矩和均布扭矩作用时的约束扭转占比公式,通过定义约束刚度系数 β 来考虑边界条件对薄壁杆件约束扭转占比的影响,对于不同截面形式的薄壁杆件给出 κ 的计算公式,并统计实际桥梁工程中双工字钢板组合梁桥与钢箱梁桥的 κ 分布范围,研究结果可为实际工程分析提供依据。

1 约束扭转占比计算方法

薄壁杆件受扭时,通常由自由扭转和约束扭转2种抗扭方式共同抵抗外扭矩^[20],即

$$T = T_v + T_\omega = GK \frac{d\varphi(x)}{dx} - E_1 I_\omega \frac{d^{(3)}\varphi(x)}{dx^{(3)}} \quad (1)$$

式中: T 为截面外扭矩; T_v 、 T_ω 分别为自由扭转扭矩与约束扭转扭矩; G 为材料的剪切模量; K 为自由扭转惯性矩; $\varphi(x)$ 为截面 x 处的扭转角; E_1 为材料的折算弹性模量, $E_1 = \frac{E}{1-\nu^2}$, E 为材料的弹性模量, ν 为材料的泊松比; I_ω 为主扇性惯性矩。

在式(1)中对 x 求1阶导数且令 $m_T = -\frac{dT}{dx}$ 得

$$m_T = -GK \frac{d^{(2)}\varphi(x)}{dx^{(2)}} + E_1 I_\omega \frac{d^{(4)}\varphi(x)}{dx^{(4)}} \quad (2)$$

式中: m_T 为薄壁杆件沿着杆长分布的外扭矩集度。

令 $\kappa = l \sqrt{\frac{GK}{E_1 I_\omega}}$,表征薄壁杆件的截面转动刚度;

l 为薄壁杆件的长度,则式(2)可简化为

$$\varphi^{(4)}(x) - \frac{\kappa^2}{l^2} \varphi^{(2)}(x) = \frac{m_T}{E_1 I_\omega} \quad (3)$$

式(3)为4阶非齐次微分方程,其通解为

$$\varphi(x) = c_1 + c_2 x + c_3 \operatorname{sh}\left(\frac{\kappa}{l}x\right) + c_4 \operatorname{ch}\left(\frac{\kappa}{l}x\right) + \bar{\varphi}(x) \quad (4)$$

式中: c_1 、 c_2 、 c_3 、 c_4 均为与边界条件有关的参数; $\bar{\varphi}$ 为满足式(3)的一个特解。

对于通解式(4)分别求1阶、2阶、3阶导数,且翘曲双力矩 $M_\omega = -E_1 I_\omega \varphi^{(2)}(x)$,联立式(1)可得

$$\begin{cases} \varphi(x) = c_1 + c_2 x + c_3 \operatorname{sh}\left(\frac{\kappa}{l}x\right) + c_4 \operatorname{ch}\left(\frac{\kappa}{l}x\right) + \bar{\varphi}(x) \\ \varphi^{(1)}(x) = c_2 + c_3 \frac{\kappa}{l} \operatorname{ch}\left(\frac{\kappa}{l}x\right) + c_4 \frac{\kappa}{l} \operatorname{sh}\left(\frac{\kappa}{l}x\right) + \bar{\varphi}^{(1)}(x) \\ M_\omega(x) = -GK \left[c_3 \operatorname{sh}\left(\frac{\kappa}{l}x\right) + c_4 \operatorname{ch}\left(\frac{\kappa}{l}x\right) + \frac{l^2}{\kappa^2} \bar{\varphi}^{(2)}(x) \right] \\ T(x) = GK \left[c_2 + \bar{\varphi}^{(1)}(x) - \frac{l^2}{\kappa^2} \bar{\varphi}^{(2)}(x) \right] \end{cases} \quad (5)$$

式中: $\bar{\varphi}^{(1)}(x)$ 为截面 x 处的扭率; $M_\omega(x)$ 为截面 x 处的翘曲双力矩; $T(x)$ 为截面 x 处总扭矩。

对式(5)采用初参数解法可求解得到薄壁杆件在不同荷载条件下任意截面的状态向量^[20]。以一个长度为 l 的简支杆件在 $x=t$ 位置作用有集中扭矩 T 为例,如图1所示,对于简支边界条件, A 点的边界状态向量为 $\mathbf{X}_0 = \left(0, \varphi_0^{(1)}, 0, \frac{T_0}{GK}\right)^T$, B 点的边界状态向量为 $\mathbf{X}(l) = \left(0, \varphi^{(1)}(l), 0, \frac{T(l)}{GK}\right)^T$,杆件的荷载状态向量为 $\mathbf{X}(t) = \left(0, 0, 0, \frac{T}{GK}\right)^T$ 。根据初参数法可得任意截面的状态向量。

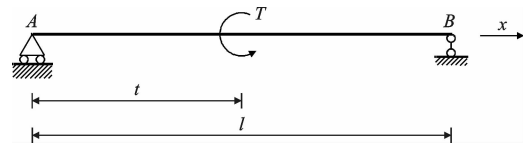


图1 简支杆件承受集中扭矩

Fig. 1 Simple supported bar subjected to concentrated torque

$0 \leq x \leq t$ 段,状态向量部分元素可表示为

$$\begin{cases} \varphi(x) = \frac{T}{GK} \left\{ 1 - \frac{t}{l} - \frac{1}{\operatorname{sh}(\kappa)} \operatorname{sh}\left[\frac{\kappa}{l}(l-t)\right] \right\} \cdot \left[\frac{l}{\kappa} \operatorname{sh}\left(\frac{\kappa}{l}x\right) \right] + \frac{T}{GK} \left(1 - \frac{t}{l}\right) \cdot \left[x - \frac{l}{\kappa} \operatorname{sh}\left(\frac{\kappa}{l}x\right) \right] \\ \varphi^{(1)}(x) = \frac{T}{GK} \left\{ 1 - \frac{t}{l} - \frac{1}{\operatorname{sh}(\kappa)} \operatorname{sh}\left[\frac{\kappa}{l}(l-t)\right] \right\} \cdot \left[\operatorname{ch}\left(\frac{\kappa}{l}x\right) \right] + \frac{T}{GK} \left(1 - \frac{t}{l}\right) \left[1 - \operatorname{ch}\left(\frac{\kappa}{l}x\right) \right] \\ M_\omega(x) = T \left[\frac{l}{\kappa} \operatorname{sh}\left(\frac{\kappa}{l}x\right) \right] \left\{ \frac{1}{\operatorname{sh}(\kappa)} \operatorname{sh}\left[\frac{\kappa}{l}(l-t)\right] \right\} \\ T(x) = T \left(1 - \frac{t}{l}\right) \end{cases} \quad (6)$$

$t < x \leq l$ 段,状态向量中的部分元素可表示为

$$\left\{ \begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{T}{GK} \left\{ 1 - \frac{t}{l} - \frac{1}{\text{sh}(\kappa)} \text{sh} \left[\frac{\kappa}{l} (l-t) \right] \right\} \cdot \\ &\quad \left[\frac{l}{\kappa} \text{sh} \left(\frac{\kappa}{l} x \right) \right] + \frac{T}{GK} \left(1 - \frac{t}{l} \right) \left[x - \frac{l}{\kappa} \cdot \right. \\ &\quad \left. \text{sh} \left(\frac{\kappa}{l} x \right) \right] - \frac{T}{GK} \left\{ x - t - \frac{l}{\kappa} \text{sh} \left[\frac{\kappa}{l} (x-t) \right] \right\} \\ \varphi^{(1)}(x) &= \frac{T}{GK} \left\{ 1 - \frac{t}{l} - \frac{1}{\text{sh}(\kappa)} \text{sh} \left[\frac{\kappa}{l} (l-t) \right] \right\} \cdot \\ &\quad \left[\text{ch} \left(\frac{\kappa}{l} x \right) \right] + \frac{T}{GK} \left(1 - \frac{t}{l} \right) \left[1 - \text{ch} \left(\frac{\kappa}{l} x \right) \right] - \\ &\quad \frac{T}{GK} \left\{ 1 - \text{ch} \left[\frac{\kappa}{l} (x-t) \right] \right\} \\ M_w(x) &= T \left[\frac{l}{\kappa} \text{sh} \left(\frac{\kappa}{l} x \right) \right] \left\{ \frac{1}{\text{sh}(\kappa)} \text{sh} \left[\frac{\kappa}{l} (l-t) \right] \right\} + \\ &\quad T \left\{ -\frac{l}{\kappa} \text{sh} \left[\frac{\kappa}{l} (x-t) \right] \right\} \\ T(x) &= -\frac{t}{l} T \end{aligned} \right. \quad (7)$$

式(6)、式(7)中的 $T(x)$ 从 0 到 l 的积分面积为杆件的总扭矩 T ; $\varphi^{(1)}(x)$ 从 0 到 l 的积分面积乘 GK 为自由扭转扭矩 T_v , 即

$$\left\{ \begin{aligned} T &= \left| \int_0^m T(x) dx \right| + \left| \int_m^l T(x) dx \right| \\ T_v &= \left| \int_0^m GK \varphi^{(1)}(x) dx \right| + \left| \int_m^l GK \varphi^{(1)}(x) dx \right| \end{aligned} \right. \quad (8)$$

式中: m 为 $T(x)$ 与 $\varphi^{(1)}(x)$ 和 x 轴的交点, 当集中扭矩作用在位置 t 时, $m=t$ 。

因此, 约束扭转扭矩 $T_w = T - T_v$, 令式(6)、式(7)中的 $t=al$, 可得

$$\frac{T_w}{T} = \frac{\text{sh}(a\kappa) \text{sh}[\kappa(1-a)]}{\kappa a(1-a) \text{sh}(\kappa)} \quad (9)$$

式中: T_w/T 为薄壁杆件的约束扭转占比; a 为集中扭矩作用位置坐标与薄壁杆件长度 l 的比值。

分别取 a 为 0.01、0.05、0.1、0.2、0.3、0.4、0.5, 绘制薄壁杆件的 κ 与约束扭转占比关系, 如图 2 所示。由图 2 可知, 薄壁杆件的约束扭转占比不仅与 κ 有关, 也与集中扭矩的作用位置有关。在相同的 κ 下, 集中扭矩的作用位置越靠近跨中, 约束扭转占比就越小。

2 不同边界条件下的约束扭转占比

薄壁杆件在不同边界条件下承受集中扭矩和均布扭矩时的边界状态向量与荷载状态向量见表 1。表 1 中未包含一端固结一端铰接薄壁杆件在均布扭矩作用下的状态向量, 原因是式(8)中 m 的位置与

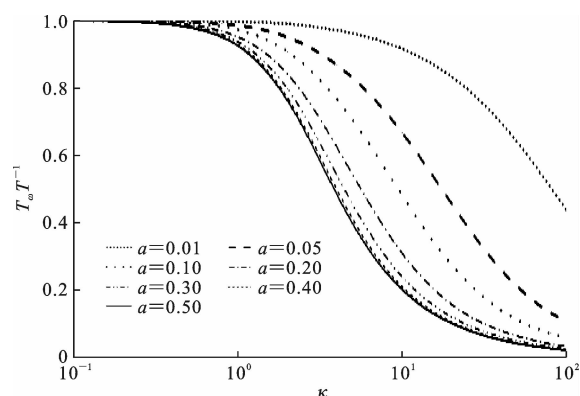


图 2 集中扭矩作用在不同位置处时薄壁杆件的约束扭转占比
Fig. 2 Proportions of constrained torsion of thin-walled bar with concentrated torque acting at different locations

截面的 κ 有关, 经笔者推导无法得出约束扭转占比公式, 因此本文不讨论这种情况。

不同边界条件下薄壁杆件在集中扭矩与均布扭矩作用时的约束扭转占比公式推导步骤与简支杆件在集中扭矩下的推导步骤相同, 只需代入不同的边界状态向量与荷载状态向量并采用初参数法进行推导求解即可, 推导结果见表 2。将表 2 中各种情况下的 κ 值与约束扭转占比绘制于图 3 中。

一般认为当约束扭转占比 $T_w/T \geq 0.9$, 近似分析时可以认为 $T_w \approx T$, 即可以忽略自由扭转的影响; 当约束扭转占比 $T_w/T \leq 0.1$, 近似分析时可以认为 $T_v \approx T$, 即可以忽略约束扭转的影响; 而当约束扭转占比 $0.1 < T_w/T < 0.9$ 时, 则需要按照组合扭转来进行分析计算。表 3 给出了不同边界条件与荷载条件下满足 $T_w/T \geq 0.9$ 与 $T_w/T \leq 0.1$ 的 κ 范围。由表 3 可知: 梁端约束程度越高, 满足 $T_w/T \geq 0.9$ 的 κ 分布范围越大, 满足 $T_w/T \leq 0.1$ 的 κ 分布范围越小。综合考虑不同荷载条件与边界条件, 当 $0 < \kappa \leq 0.6$, $T_w/T \geq 0.9$; 当 $\kappa \geq 40$, $T_w/T \leq 0.1$ 。因此在近似分析时, 当 $0 < \kappa \leq 0.6$ 时, 认为可以忽略自由扭转的影响, 仅按约束扭转进行分析; 当 $\kappa \geq 40$ 时, 认为可以忽略约束扭转的影响, 仅按自由扭转进行分析; 当 $0.6 < \kappa < 40$ 时需按组合扭转进行分析。

图 3 中的曲线是基于 Vlasov 薄壁结构理论所得出, 曲线中 κ 较大的区域通常为闭口截面薄壁杆件, 对其进行约束扭转分析时, 必须考虑剪切变形对于翘曲位移的影响, 目前一般采用乌曼斯基理论来对其进行分析, 本文所采用的 Vlasov 薄壁结构理论忽略了剪切变形对结构翘曲位移的影响, 使得本文

表 1 不同边界条件下杆件的状态向量与计算图示

Tab. 1 State vector and calculation diagram of bar under different boundary conditions

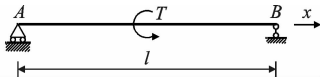

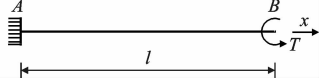
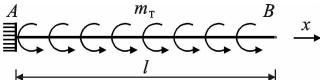
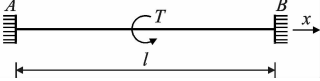
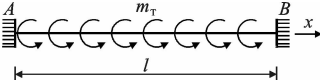
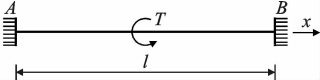
边界条件	边界状态向量	计算图示	荷载状态向量
简支	$\mathbf{X}(0)=\left(0,\varphi_0^{(1)},0,\frac{T_0}{GK}\right)^T$		$\mathbf{X}(l)=\left(0,0,0,\frac{T}{GK}\right)^T$
	$\mathbf{X}(l)=\left(0,\varphi^{(1)}(l),0,\frac{T(l)}{GK}\right)^T$		$\mathbf{X}(l)=\left(0,0,0,\frac{m_\tau}{GK}\right)^T$
悬臂	$\mathbf{X}(0)=\left(0,0,-\frac{M_0}{GK},\frac{T_0}{GK}\right)^T$		$\mathbf{X}(l)=\left(0,0,0,\frac{T}{GK}\right)^T$
	$\mathbf{X}(l)=\left(\varphi_0,\varphi_0^{(1)},0\right)^T$		$\mathbf{X}(l)=\left(0,0,0,\frac{m_\tau}{GK}\right)^T$
两端固结	$\mathbf{X}(0)=\left(0,0,-\frac{M_0}{GK},\frac{T_0}{GK}\right)^T$		$\mathbf{X}(l)=\left(0,0,0,\frac{T}{GK}\right)^T$
	$\mathbf{X}(l)=\left(0,0,-\frac{M(l)}{GK},\frac{T(l)}{GK}\right)^T$		$\mathbf{X}(l)=\left(0,0,0,\frac{m_\tau}{GK}\right)^T$
一端固结 一端铰接	$\mathbf{X}(0)=\left(0,0,-\frac{M_0}{GK},\frac{T_0}{GK}\right)^T$		$\mathbf{X}(l)=\left\{0,0,0,\frac{T}{GK}\right\}^T$
	$\mathbf{X}(l)=\left\{0,\varphi^{(1)}(l),0,\frac{T(l)}{GK}\right\}^T$		

表 2 约束扭转占比公式

Tab. 2 Constrained torsion ratio formulas

边界条件	集中扭矩	均布扭矩
简支	$\frac{T_\omega}{T}=\frac{2\text{th}(\kappa/2)}{\kappa}$	$\frac{T_\omega}{T}=\frac{8}{\kappa^2}-\frac{8}{\kappa^2\text{ch}(\kappa/2)}$
悬臂	$\frac{T_\omega}{T}=\frac{\text{th}(\kappa)}{\kappa}$	$\frac{T_\omega}{T}=\frac{2}{\kappa}\text{sh}(\kappa)+\frac{2}{\kappa}\cdot\left[\text{th}(\kappa)+\frac{1}{\kappa\text{ch}(\kappa)}\right]\cdot[1-\text{ch}(\kappa)]$
两端固结	$\frac{T_\omega}{T}=\frac{4\left[\text{ch}(\kappa/2)-1\right]}{\kappa\text{sh}(\kappa/2)}$	$\frac{T_\omega}{T}=\frac{4\left[\text{ch}(\kappa/2)-1\right]}{\kappa\text{sh}(\kappa/2)}$
一端固结 一端铰接	$\frac{T_\omega}{T}=\frac{2\text{sh}(\kappa/2)\left[-3\kappa\text{ch}(\kappa/2)+2\text{sh}(\kappa/2)+2\kappa\right]}{\kappa\left[\text{sh}(\kappa)-\kappa\text{ch}(\kappa)\right]}$	

计算的约束扭转占比偏小。由文献[20]可知,乌曼斯基理论与 Vlasov 理论所得的微分方程区别在于引入了翘曲系数 $\nu=1-K/I_p$,其中 I_p 为截面的方向惯性矩,与截面形状有关。因此对于不同截面的薄壁杆件采用乌曼斯基理论不能得出图 3 中曲线,图 3 中主要以自由扭转抗扭的区域为本文所得曲线误差较大的部分。

图 3 给出了不同边界条件下 κ 与约束扭转占比 T_ω/T 的关系曲线,通过查阅图 3 可得到给定截面薄壁杆件的约束扭转占比。但图 3 中曲线较多,为简化图 3 同时建立不同曲线之间的关系来评价边界

表 3 不同条件下 κ 分布范围

Tab. 3 Range of κ under different conditions

边界条件	荷载条件	$T_\omega T^{-1}\geqslant 0.9$	$T_\omega T^{-1}\leqslant 0.1$
简支	跨中集中扭矩	$0<\kappa\leqslant 1.2$	$\kappa\geqslant 20.0$
	均布扭矩	$0<\kappa\leqslant 1.0$	$\kappa\geqslant 8.8$
悬臂	自由端集中扭矩	$0<\kappa\leqslant 0.6$	$\kappa\geqslant 10.0$
	均布扭矩	$0<\kappa\leqslant 0.7$	$\kappa\geqslant 18.9$
两端固结	跨中集中扭矩	$0<\kappa\leqslant 2.3$	$\kappa\geqslant 40.0$
	均布扭矩	$0<\kappa\leqslant 2.3$	$\kappa\geqslant 40.0$
一端固结一端铰接	跨中集中扭矩	$0<\kappa\leqslant 1.8$	$\kappa\geqslant 30.2$

条件对薄壁杆件约束扭转占比的影响,以简支边界下的约束扭转占比为基准,引入约束刚度系数 β ,定义 β 为其他边界条件下的约束扭转占比与简支边界条件下约束扭转占比的比值。表 4 为跨中集中扭矩和均布扭矩作用下一端固结一端铰接、两端固结杆件的 β 。由于悬臂边界条件下集中扭矩的作用位置为自由端而非跨中,故不讨论悬臂杆件在集中扭矩下的 β 。

图 4(a)、图 4(b)为均布扭矩作用下悬臂杆件和两端固结杆件下的 κ 与 β 的关系曲线。曲线的斜率大于 0,表示边界条件对约束扭转占比为正向影响,即边界条件使得约束扭转占比增大;曲线斜率小于 0 为负向影响;斜率为 0 时表示边界条件对

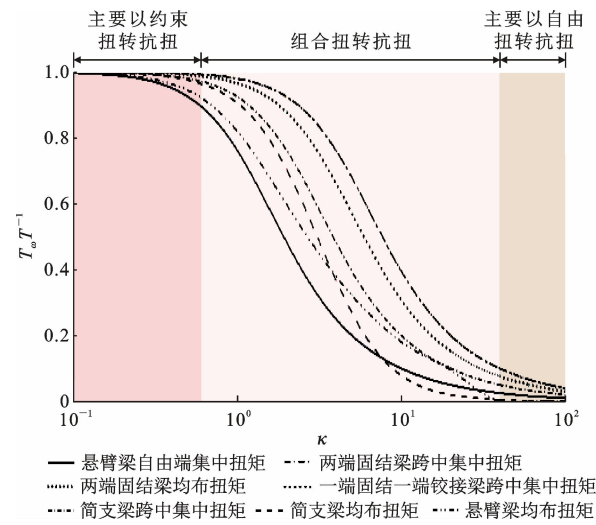


图 3 不同荷载条件与边界条件下薄壁杆件的约束扭转占比

Fig. 3 Proportions of constrained torsion of thin-walled bar under different load conditions and boundary conditions

约束扭转占比影响反向处或边界条件对约束扭转占比影响程度不变,斜率绝对值的大小表示边界条件影响程度变化的大小。由图 4(a)、图 4(b)可知:在悬臂边界条件下,随着 κ 的增大,边界条件对约束扭转占比的影响先为负向影响后转为正向影

响,当 $\kappa=2$ 时,曲线斜率为 0, β 最小值为 0.85,此时边界条件对约束扭转占比的负向影响达到最大;当 $\kappa>2$ 时,边界条件对约束扭转占比的影响转为正向影响,影响程度与 κ 呈线性相关。两端固结的边界条件下,边界条件对约束扭转占比的影响为正向,影响程度与 κ 呈线性相关,且在两端固结边界条件下曲线的斜率始终大于悬臂边界条件下曲线的斜率,即边界约束越强,对约束扭转占比影响程度的变化越大。

图 4(c)、图 4(d)为跨中集中扭矩作用下一端固结一端铰接杆件和两端固结杆件 κ 与 β 的关系曲线。由图 4(c)、图 4(d)可知:在一端固结一端铰接和两端固结边界条件下,曲线斜率始终为正值,即边界条件对约束扭转占比为正向影响。当 κ 从 0.1 增大至 10 时,曲线斜率逐渐减小为 0,且在两端固结边界条件下的斜率始终大于一端固结一端铰接边界下的斜率,表示边界条件对约束扭转占比影响程度的变化逐渐减小,且边界约束越强,边界条件对约束扭转占比影响程度的变化越大;当 $\kappa>10$ 时,边界条件对约束扭转占比的影响程度不再变化。

表 4 不同边界条件下 β 的计算公式

Tab. 4 Calculation formula for β under different boundary conditions

边界条件	跨中集中扭矩	均布扭矩
悬臂		$\beta = \frac{\text{sh}(\kappa) [\kappa \text{ch}(\kappa/2) - \text{sh}(\kappa/2)]}{8\text{ch}^3(\kappa/2) - 8\text{ch}^2(\kappa/2) - 4\text{ch}(\kappa/2) + 4}$
两端固结	$\beta = \frac{2\text{ch}(\kappa/2) [\text{ch}(\kappa/2) - 1]}{\text{sh}^2(\kappa/2)}$	$\beta = \frac{\kappa}{2\text{th}(\kappa/2)}$
一端固结一端铰接	$\beta = \frac{-3\kappa \text{ch}^2(\kappa/2) + \text{sh}(\kappa) + 2\kappa \text{ch}(\kappa/2)}{\text{sh}(\kappa) - \kappa \text{ch}(\kappa)}$	

3 有限元验证

以截面尺寸如图 5 所示的工字梁为例,采用有限元软件 ABAQUS 对上述所得的约束扭转占比公式进行验证,工字梁长为 10 m,材料弹性模量为 2.06×10^5 MPa,泊松比为 0.3。截面的各个参数计算结果见表 5。对于集中扭矩,悬臂杆件在自由端施加集中扭矩,其余边界条件下在跨中处施加集中扭矩 800 N·m;对于均布扭矩,在全跨范围内施加均布扭矩 8 N·m/m。

有限元结果见表 6、表 7。从表 6、表 7 可以看出:按照 ABAQUS 模型计算得到的不同边界条件和荷载条件下的约束扭转占比与本文公式计算值吻合良好,因此可以认为本文所推导的公式是正确的。

4 实际工程中的 κ

在工程中要方便、快速地估算自由扭转与约束扭转的比例时,首先应计算出薄壁杆件的 κ ,为方便计算,本节给出桥梁工程中一些常见薄壁截面的 κ 计算公式,并统计了桥梁中常见薄壁截面的 κ 分布,为实际工程分析提供了便利。

4.1 常见截面的 κ 计算

4.1.1 槽形截面

如图 6 所示的槽形截面^[21],翼缘的宽厚分别为 b, t' ,翼缘中面距离为 h ,腹板厚为 t_w ,可得

$$K = \frac{1}{3} (2bt'^3 + ht_w^3) \tag{10}$$

$$I_w = \frac{t'b^3h^2}{12} \left(\frac{3t'b + 2t_w h}{6t'b + t_w h} \right) \tag{11}$$

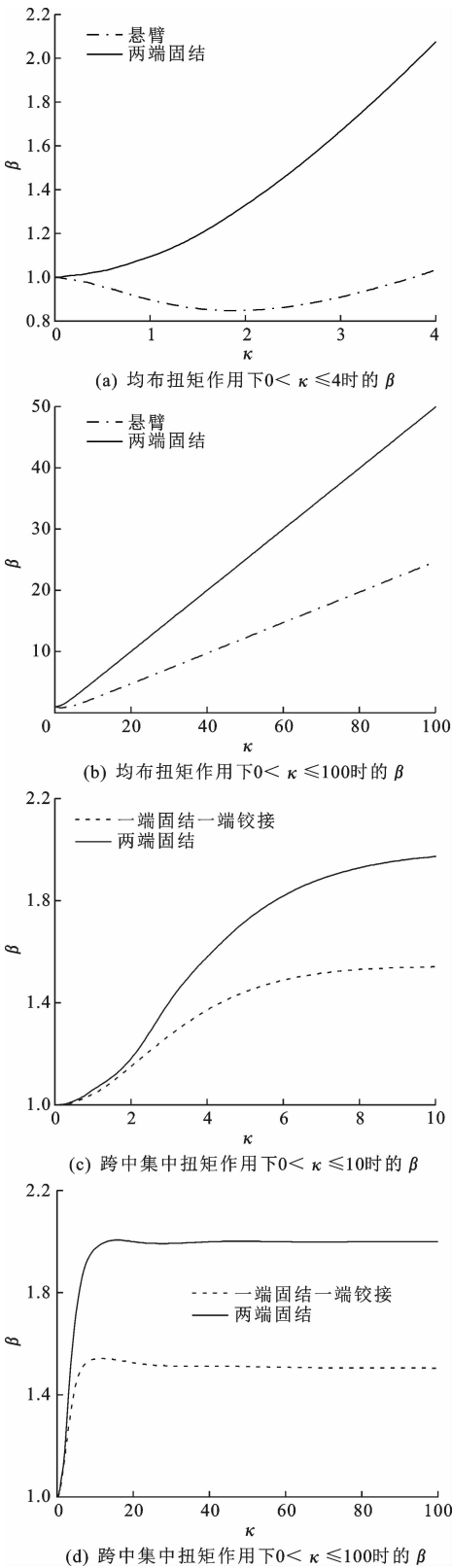
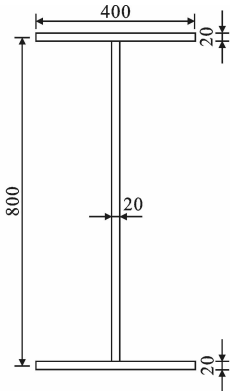


图 4 不同荷载条件下的 β

Fig. 4 β under different load conditions

将各个参数的表达式代入 $\kappa = l \sqrt{\frac{GK}{E_1 I_\omega}}$ 即可求

得杆件的 κ 。



单位: mm

图 5 有限元模型横截面

Fig. 5 Cross section of finite element model

表 5 截面参数计算结果

Tab. 5 Calculation results of section parameters

参数	G/MPa	E/MPa	ν	K/mm^4	I_ω/mm^6	κ
参数值	7.9×10^4	2.06×10^5	0.3	4.27×10^6	3.41×10^{13}	2.09

表 6 集中扭矩作用下 $T_\omega T^{-1}$ 比较

Tab. 6 Comparisons of $T_\omega T^{-1}$ under concentrated torque

边界条件	有限元值	本文公式计算值	相对偏差/%
简支	0.737 5	0.746 3	1.19
悬臂	0.454 5	0.464 1	2.10
一端固结一端铰接	0.851 4	0.867 4	1.88
两端固结	0.905 6	0.917 9	1.36

表 7 均布扭矩作用下 T_ω 比较

Tab. 7 Comparisons of T_ω under uniform torque

边界条件	有限元值	本文公式计算值	相对偏差/%
简支	0.679 9	0.685 0	0.76
悬臂	0.595 4	0.581 8	2.29
两端固结	0.906 7	0.917 9	1.24

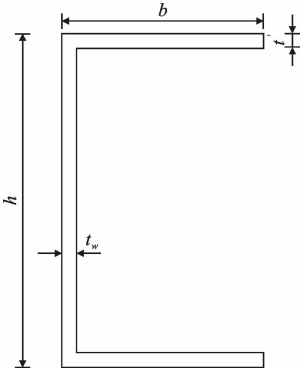


图 6 槽形截面

Fig. 6 Channel section

4.1.2 工字形截面

如图 7 所示的工字形截面,上翼缘的宽厚为 b_1 、 t_1 ,下翼缘的宽厚为 b_2 、 t_2 ,上下翼缘中面距离为 h_1 ,腹板厚为 t_{w1} ,可得

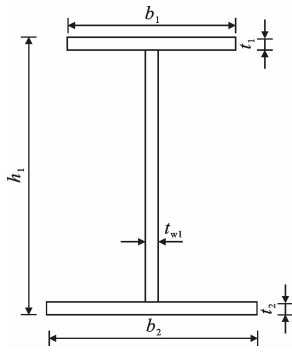


图7 工字形截面

Fig. 7 I-section

$$K = \frac{1}{3}(b_1 t_1^3 + b_2 t_2^3 + h_1 t_{w1}^3) \quad (12)$$

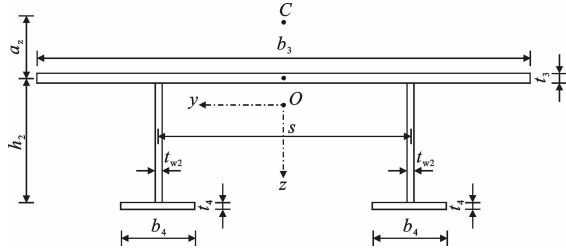
$$I_\omega = a_x^2 \frac{t_1 b_1^3}{12} + (h_1 - a_x)^2 \frac{t_2 b_2^3}{12} \quad (13)$$

式中: a_x 为剪切中心至上翼缘的距离, $a_x = \frac{t_2 b_2^3}{t_1 b_1^3 + t_2 b_2^3} h_1$ 。

将各个参数的表达式代入 $\kappa = l \sqrt{\frac{GK}{E_1 I_\omega}}$ 即可求得杆件的 κ 。

4.1.3 π 形截面

如图8所示的 π 形截面^[22],上翼缘的宽厚为 b_3 、 t_3 ,下翼缘的宽厚为 b_4 、 t_4 ,腹板厚为 t_{w2} ,上下翼缘中面距离为 h_2 ,C点为其剪切中心。

图8 π 形截面Fig. 8 π -section

可得

$$K = \frac{1}{3}(b_3 t_3^3 + 2h_2 t_{w2}^3 + b_4 t_4^3) \quad (14)$$

$$I_\omega = a_1^2 I_{zb1} + a_2^2 I_{zb2} + \frac{1}{3}(a_1^2 + a_2^2 - a_1 a_2) \cdot$$

$$I_{zbw} + \frac{1}{4}(a_3^2 - a_2^2) A_{t2} s^2 \quad (15)$$

式中: a_z 为剪切中心至上翼缘的距离, $a_z = \frac{3t_{w2} h_2^2 s^2 + 6t_4^2 b_4 h_2 s^2 - 2t_4 b_4^3 h_2}{12I_z}$; $a_1 = a_z$, $a_2 = h_2 + a_z$,

$a_3 = h_2 - a_z$; I_{zb1} 为上翼缘对 z 轴惯性矩, $I_{zb1} = \frac{1}{12} t_3 b_3^3$; I_{zb2} 为下翼缘对 z 轴惯性矩, $I_{zb2} = \frac{1}{6} t_4 b_4^3 +$

$\frac{1}{2} t_4 b_4 s^2$; I_{zbw} 为腹板对 z 轴惯性矩, $I_{zbw} = \frac{1}{2} t_{w2} h_2 s^2$;

A_{t2} 为下翼缘面积, $A_{t2} = 2t_4 b_4$ 。

将各个参数的表达式代入 $\kappa = l \sqrt{\frac{GK}{E_1 I_\omega}}$ 即可求得杆件的 κ 。

4.1.4 箱形截面

如图9所示的箱形截面,顶板宽为 b_5 ,底板宽为 a_4 ,顶板、底板、腹板的厚度分别为 t_b 、 t_a 、 t_h ,顶板与底板中面距离为 h_3 。文献[23]给出了主扇性坐标的计算方法。

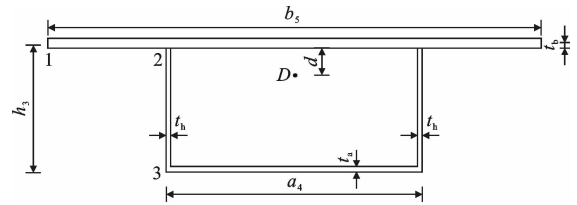


图9 箱形截面

Fig. 9 Box section

剪切中心D距顶板的距离 d 可表示为

$$d = \frac{a_4^2 h_3}{a_4^3 t_a + b_5^3 t_b + 6a_4^2 h_3 t_h} \lambda \quad (16)$$

式中: 参数 $\lambda = 3b_5^2 + 6h_3^2 - \left(2 - \frac{t_a}{t_b}\right) a_4^2 + a_4 h_3$ 。

$\left(\frac{9t_h}{t_b} + \frac{2t_a}{t_h} + \frac{3t_h}{t_a}\right), \Omega = \frac{a_4}{t_a} + \frac{a_4}{t_b} + \frac{2h_3}{t_h}$ 。

关键点的主扇性坐标为

$$\omega_1 = \frac{1}{2} b_5 d - \frac{a_4 h_3}{1 + t_b/t_a} + 2 \frac{h_3 t_b}{a_4 t_h} \quad (17)$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2} a_4 d - \frac{a_4 h_3}{1 + t_b/t_a} + 2 \frac{h_3 t_b}{a_4 t_h} \quad (18)$$

$$\omega_3 = \frac{1}{2} a_4 h_3 + \frac{1}{2} a_4 d -$$

$$a_4 h_3 \frac{2h_3/t_h + a_4/t_b}{1 + 2h_3/t_h + a_4/t_b a_4/t_a} \quad (19)$$

$$I_\omega = \int_F \omega^2 dF \quad (20)$$

$$K = \frac{4a_4^2 h_3^2}{a_4/t_b + a_4/t_a + 2h_3/t_h} + \frac{1}{3}(b_5 - a_4) t_b^3 \quad (21)$$

将各个参数的表达式代入 $\kappa = l \sqrt{\frac{GK}{E_1 I_\omega}}$ 即可求得杆件的 κ 。

4.2 实际桥梁中常见截面的 κ 统计

4.2.1 双工字钢板组合梁桥的 κ 统计

在公路小跨径桥梁结构中,钢板组合梁桥作为一种代表性的桥梁^[24-26],在对其扭转性能进行简化

分析时,其 κ 是一个重要参数。本文统计计算了陕西省和浙江省双工字钢板组合梁桥通用图的 κ ,有助于设计人员更快速地进行简化分析。对于变截面桥梁的 κ 计算,根据文献[16]中给出的 $\kappa = \int_l \sqrt{\frac{GK}{E_1 I_\omega}} dl$ 进行计算。图10为不同跨径下双工字钢板组合梁桥的 κ 分布,跨径为28~60 m。

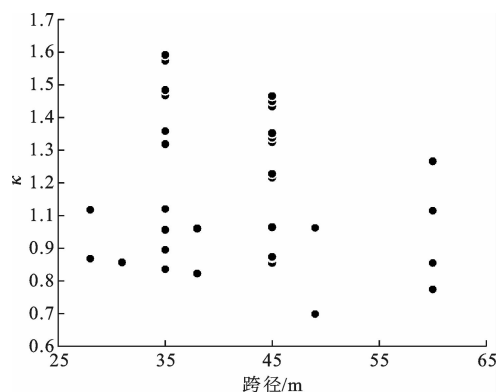


图10 双工字钢板组合梁桥的 κ 分布

Fig. 10 κ distributions of steel-concrete composite twin I-girder bridge

从图10可知,双工字钢板组合梁桥的 κ 变化范围为0.71~1.58,由图3可知,在简支边界、悬臂边界、一端固结一端铰接边界、两端固结边界条件下的约束扭转占比分别为0.79~0.96、0.58~0.89、0.91~0.98、0.95~0.98。因此在分析双工字钢板组合梁桥时,在简支和悬臂边界条件下不能忽略自由扭转的作用,需要按照组合扭转进行分析;在一端固结一端铰接和两端固结边界条件下可以忽略自由扭转的影响,仅按约束扭转进行分析。

4.2.2 钢箱梁桥的 κ 统计

对于钢箱梁桥的 κ ,Nakai等曾统计了14座实桥的 κ 分布^[14],见表8。从表8可以看出,除1座钢箱梁桥的 $\kappa=39$ 外,其余钢箱梁桥的 κ 都大于40,约束扭转占比小于0.1,在近似分析时可以认为 $T_v \approx T$,即忽略约束扭转的影响。

5 结 语

(1)本文推导的在简支、悬臂、两端固结、一端固结一端铰接的边界条件下薄壁杆件的约束扭转占比公式计算精度高,与有限元结果吻合较好,基于本文公式绘制的 κ 与约束扭转占比的关系曲线可用于工程中判断薄壁杆件的抗扭方式。

(2)薄壁杆件的约束扭转占比与 κ 和边界条件有关, κ 越大,约束扭转占比越小,且当 κ 变化时,边

表8 钢箱梁桥 κ 统计

Tab. 8 Statistics of κ of steel box girder bridges

跨径/m	κ
100+150+100	73.3
80+140+140+80	42.9
85	45.1
85	47.0
75+55	57.4
100+150+100	104.1
75+55	115.4
55+90+55	78.0
58+115+58	39.0
70+86+70	103.0
80+140+140+80	106.2
55+90+55	87.3
34	49.0
81+216+81	41.3

界条件对约束扭转占比的影响程度较大。

(3)在扭转近似分析时,可以通过 κ 判断薄壁杆件是否可以忽略自由扭转或约束扭转的影响,综合考虑不同边界条件,建议如下:当 $0 < \kappa \leq 0.6$ 时,约束扭转占比大于90%,可以忽略自由扭转的影响,认为 $T_\omega \approx T$;当 $\kappa \geq 40$ 时,约束扭转占比小于10%,可以忽略约束扭转的影响,认为 $T_v \approx T$ 。

(4)悬臂、两端固结以及一端固结一端铰接边界下薄壁杆件的约束扭转占比可由简支边界下薄壁杆件的约束扭转占比乘本文所引入的约束刚度系数 β 得到。

(5)本文基于Vlasov薄壁结构理论进行约束扭转占比公式推导,未考虑薄壁杆件翘曲时的剪切变形,后续应考虑剪切变形的影响对本文公式进行修正。

参考文献:

References:

- [1] 干小东. 箱形薄壁结构在翘曲扭转下的截面非线性分析[J]. 建筑科学, 2012, 28(11): 9-12.
GAN Xiao-dong. Cross-section nonlinear analysis of reinforced concrete box girder thin-walled composite under warping torsion[J]. Building Science, 2012, 28(11): 9-12.
- [2] 闫新凯, 刘永健, 邢子寒, 等. 曲线双工字钢组合梁桥横梁受力分析研究[J]. 建筑科学与工程学报, 2022, 39(5): 63-73.
YAN Xin-kai, LIU Yong-jian, XING Zi-han, et al. Re-

- search on internal force of crossbeam in curved steel-concrete composite twin I-girder bridge[J]. Journal of Architecture and Civil Engineering, 2022, 39(5): 63-73.
- [3] 郭靖宇,管松,年玉泽,等.单箱单室薄壁箱梁约束扭转分析[J].常州工学院学报,2018,31(3):10-14,27.
- GUO Jing-yu, GUAN Song, NIAN Yu-ze, et al. An analysis of the torsion single-box single-cell thin-walled box girder[J]. Journal of Changzhou Institute of Technology, 2018, 31(3): 10-14, 27.
- [4] 王彤,谢旭,王渊,等.桁腹式组合桁梁结构计算理论[J].浙江大学学报(工学版),2014,48(4):711-720,741.
- WANG Tong, XIE Xu, WANG Yuan, et al. Analysis of prestressed composite truss girders with steel truss webs[J]. Journal of Zhejiang University (Engineering Science), 2014, 48(4): 711-720, 741.
- [5] 徐秀丽,王曙光,刘伟庆,等.薄壁箱梁截面抗扭参数的简化计算方法[J].中国公路学报,2007,20(2):72-76,96.
- XU Xiu-li, WANG Shu-guang, LIU Wei-qing, et al. Simplified calculation method for torsion parameters of thin-walled box girder section[J]. China Journal of Highway and Transport, 2007, 20(2): 72-76, 96.
- [6] NAKAI H, YOO C H. Analysis and design of curved steel bridges[M]. New York: McGraw-Hill, 1988.
- [7] ANSI/ANSC360-10, Specification for structural steel buildings[S].
- [8] EN 1993-1-3, Design of steel structures—Part 1-3: General rules-supplementary rules for cold-formed members and sheeting[S].
- [9] Japan Road Association, Specifications for highway bridges with commentaries(Part II steel bridge)[S].
- [10] Korea Road & Transportation Association, Korean highway bridge design code[S].
- [11] GB 50017—2017, 钢结构设计标准[S].
- GB 50017—2017, Standard for design of steel structures[S].
- [12] LEBET J P, HIRT M A. 钢桥:钢与钢-混组合桥梁概念和结构设计[M]. 葛耀君,苏庆田,译.北京:人民交通出版社,2014.
- LEBET J P, HIRT M A. Steel Bridge: Conceptual and structural design of steel and steel-concrete composite bridges[M]. Translated by GE YAO-jun, SU Qing-tian, Beijing: China Communications Press, 2014.
- [13] KOLLBRUNNER C F, BASLER K. Torsion in structures[M]. Berlin: Springer, 1969.
- [14] NAKAI H, TANI T. An approximate method for the evaluation of torsional and warping stresses in box girder bridges[J]. Proceedings of the Japan Society of Civil Engineers, 1978, 1978(277): 41-55.
- [15] KOMATSU S, NAKAI H, TAIDO Y. A proposition for designing the horizontally curved girder bridges in connection with ratio between torsional and flexural rigidities[J]. Proceedings of the Japan Society of Civil Engineers, 1974, 1974(224): 55-66.
- [16] OKEIL A M, EL-TAWIL S. Warping stresses in curved box girder bridges: Case study[J]. Journal of Bridge Engineering, 2004, 9(5): 487-496.
- [17] 周东波,邓文琴,刘朵,等.偏载作用下单箱三室波形钢腹板悬臂梁的力学特性[J].公路工程,2020,45(2):21-27,49.
- ZHOU Dong-bo, DENG Wen-qin, LIU Duo, et al. Mechanical properties of single box three-cell cantilever girder with corrugated steel webs under eccentric loading[J]. Highway Engineering, 2020, 45(2): 21-27, 49.
- [18] 邓文琴,毛泽亮,刘朵,等.单箱三室波形钢腹板悬臂梁扭转与畸变分析及试验研究[J].建筑结构学报,2020,41(2):173-181.
- DENG Wen-qin, MAO Ze-liang, LIU Duo, et al. Analysis and experimental study on torsion and distortion of single box three-cell cantilever girder with corrugated steel webs[J]. Journal of Building Structures, 2020, 41(2): 173-181.
- [19] 王妍,张元海,王晨光.边界约束条件对箱形梁畸变效应的影响[J].中南大学学报(自然科学版),2021,52(12):4475-4483.
- WANG Yan, ZHANG Yuan-hai, WANG Chen-guang. Influence of boundary restraint condition on distortion effect of box girders[J]. Journal of Central South University (Science and Technology), 2021, 52(12): 4475-4483.
- [20] 包世华,周坚.薄壁杆件结构力学[M].北京:中国建筑工业出版社,1991.

- BAO Shi-hua, ZHOU Jian. Structural mechanics of thin-walled bar[M]. Beijing: China Architecture & Building Press, 1991.
- [21] 陈 骥. 钢结构稳定理论与设计[M]. 6 版. 北京: 科学出版社, 2014.
- CHEN Ji. Stability of steel structures theory and design[M]. 6th ed. Beijing: Science Press, 2014.
- [22] 邢子寒. 曲线双工字钢板组合梁横梁受力机理研究[D]. 西安: 长安大学, 2021.
- XING Zi-han. Study on the stress mechanism of the cross beam of the curved twin I-girder composite bridge[D]. Xi'an: Chang'an University, 2012.
- [23] 李 琳, 白 昕, 张元海. 薄壁箱形截面扭转中心及主扇性坐标研究[J]. 兰州交通大学学报, 2013, 32(4): 96-100.
- LI Lin, BAI Xin, ZHANG Yuan-hai. Research on twist centre and principal sectorial coordinate of thin-walled box section[J]. Journal of Lanzhou Jiaotong University, 2013, 32(4): 96-100.
- [24] 刘永健, 高诣民, 周绪红, 等. 中小跨径钢-混凝土组合梁桥技术经济性分析[J]. 中国公路学报, 2017, 30(3): 1-13.
- LIU Yong-jian, GAO Yi-min, ZHOU Xu-hong, et al. Technical and economic analysis in steel-concrete composite girder bridges with small and medium span[J]. China Journal of Highway and Transport, 2017, 30(3): 1-13.
- [25] 刘永健, 范泉锋, 封博文, 等. 双工字钢-混凝土组合梁桥桥面板横向弯矩[J]. 长安大学学报(自然科学版), 2022, 42(6): 1-11.
- LIU Yong-jian, FAN Quan-feng, FENG Bo-wen, et al. Transverse moment of steel-concrete composite twin I-girder bridge deck[J]. Journal of Chang'an University (Natural Science Edition), 2022, 42(6): 1-11.
- [26] 陈 霄, 侯 波, 胡 雷, 等. 钢板组合梁桥预算定额幅度差系数研究[J]. 建筑科学与工程学报, 2022, 39(2): 128-134.
- CHEN Xiao, HOU Bo, HU Lei, et al. Calculating method for amplitude difference coefficient of budget quota for steel plate composite beam bridges[J]. Journal of Architecture and Civil Engineering, 2022, 39(2): 128-134.