

朱伟华, 刘国坤, 颜东煌, 等. 基于刚性支承连续梁法的悬索桥成桥状态解析算法[J]. 长安大学学报(自然科学版), 2024, 44(1): 58-67.
ZHU Wei-hua, LIU Guo-kun, YAN Dong-huang, et al. Analytical algorithm for completed state of suspension bridge based on rigid supported continuous beam method[J]. Journal of Chang'an University (Natural Science Edition), 2024, 44(1): 58-67.

DOI: 10.19721/j.cnki.1671-8879.2024.01.006

基于刚性支承连续梁法的悬索桥成桥状态解析算法

朱伟华^{1,2}, 刘国坤³, 颜东煌², 许红胜²

(1. 湖南城市学院 土木工程学院, 湖南 益阳 413000; 2. 长沙理工大学 土木工程学院, 湖南 长沙 410001;
3. 湖南工程学院 建筑工程学院, 湖南 湘潭 411104)

摘要:为解决悬索桥合理成桥状态平衡态计算闭合问题, 系统提出成桥状态的解析算法。首先, 根据余能定理推导基于刚性支承连续梁成桥状态目标函数, 考虑索塔压缩变形, 基于悬链线理论建立缆索体系非线性方程组; 然后, 考虑加劲梁无应力曲率, 根据加劲梁弯曲变形微分方程组, 构建多节点力作用下的加劲梁位形计算非线性方程组; 进而, 根据成桥状态下刚性支承连续梁位形, 设立加劲梁各吊点最优化控制目标函数; 最后, 基于吊索体系联立缆索体系与加劲梁体系的力学模型非线性方程组, 实现基于刚性支承连续梁的成桥状态各构件力学参数化求解, 并将推导的解析算法与有限元模型的研究结果进行对比分析。结果表明: 解析算法计算结果由于计算过程的闭合条件, 与有限元模型计算结果基本吻合, 对于关键参数吊索力及主缆线形计算差值率控制在0.1%以内, 加劲梁弯矩极值差值率约为-0.34%; 推导的解析算法为精细化合理成桥状态闭合方法, 可作为悬索桥合理成桥状态设计的可靠方法。

关键词: 桥梁工程; 悬索桥; 解析算法; 合理成桥状态; 刚性支承连续梁; 悬链线理论; 目标函数
中图分类号: U448.25 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-8879(2024)01-0058-10

Analytical algorithm for completed state of suspension bridge based on rigid supported continuous beam method

ZHU Wei-hua^{1,2}, LIU Guo-kun³, YAN Dong-huang², XU Hong-sheng²

(1. School of Civil Engineering, Hunan City University, Yiyang 413000, Hunan, China; 2. School of Civil Engineering, Changsha University of Science and Technology, Changsha 410001, Hunan, China;
3. School of Architecture Engineering, Hunan Institute of Engineering, Xiangtan 411104, Hunan, China)

Abstract: To solve the problem of calculating and closing the equilibrium state of suspension bridge, an analytical algorithm of completed state of suspension bridge was proposed. First of all, according to the complementary energy theorem, the state objective function of the rigid supported continuous beam was derived and the compression deformation of the tower was considered, nonlinear equations of the cable system was established based on the catenary theory. And then the unstressed curvature of the stiff girder was considered, according to the differential

收稿日期: 2023-07-13

基金项目: 国家自然科学基金项目(51878073); 湖南省研究生科研创新项目(CX20190649)

作者简介: 朱伟华(1992-), 男, 湖南邵阳人, 工学博士, E-mail: 1542475739@qq.com。

通讯作者: 刘国坤(1988-), 男, 湖南益阳人, 高级工程师, 工学博士, E-mail: 1425541054@qq.com。

equations of bending deformation of stiffening beams, the nonlinear equations for calculating the configuration of stiffening beams under multi-node forces was constructed. Furthermore, according to the configuration of the rigid supported continuous beam, an optimization objective function for each suspension point of the stiff girder was established. Finally, based on the nonlinear equations of the mechanical models of the cable system and the stiffening beam system, the mechanical parameterization solution of each member in the bridge state based on the rigid supported continuous beam was realized. The derived analytical algorithm was compared with the research results of FEM. The results show that because of the closure condition of the calculation process, the calculation results of the analytical algorithm are in good agreement with the results of the finite element model. The difference rate of calculation of the key parameters, the suspension cable force and the main cable shape are controlled within 0.1%, and the difference rate of the maximum bending moment of the stiff girder is approximately -0.34%. The derived analytical algorithm is a refined and reasonable closure method of the bridged state, which can be used as a reliable method for the design and calculation of the rational completed state of suspension bridges. 11 figs, 26 refs.

Key words: bridge engineering; suspension bridge; analytical algorithm; reasonable completed state; rigid supported continuous beam; catenary theory; objective function

0 引言

悬索桥相对于其他桥型的跨越优势而被广泛应用于桥梁工程领域^[1],其成桥状态关系到运营期内的安全性及耐久性已成为业内共识^[2]。悬索桥成桥状态下吊索力及加劲梁弯矩状态是悬索桥计算的基础及重点^[3],成桥状态受力机理为吊索将承载的加劲梁恒载及桥面二期恒载传递给主缆,主缆在吊索力、主缆恒载及其附属恒载作用下发生变形,主缆将荷载通过索塔及锚碇传递到大地^[4]。吊索作为悬索桥受力关键构件,成为加劲梁与主缆传力的媒介^[5-6]。然而,悬索桥成桥状态下加劲梁、吊索与主缆受力力学参数相互耦合^[7];悬索桥作为“大变形小应变”桥梁结构^[8-9],在显著的几何非线性效应及结构构件间存在复杂耦合关系的条件下,成桥状态计算理论与方法备受关注。

悬索桥成桥状态计算理论近年来积累了大量研究^[10-12],缆索线形计算理论有分段悬链线理论^[13-14]、悬链线方程理论^[12]及有限元理论^[15-16]。分段悬链线理论具有计算精度高等优势,但是收敛性与初始迭代值及迭代增量相关。悬链线方程理论由于其计算公式简洁而被广泛应用于悬索桥计算领域。成桥状态设计方法主要有刚性支承连续梁法及最小弯曲能量法^[17-19],刚性支承连续梁法具备力学模型清晰及易于拓展的优点^[9]。

针对悬索桥成桥状态计算理论及亟需解决的问

题,国内外学者提出新的计算理论与计算方法。Zhang等基于悬链线理论与有限元理论,提出关于悬索桥成桥状态闭环线形计算方法^[20]。该方法存在计算繁琐、不具备统一计算公式等问题。Kim等对空间自锚式悬索桥主缆三维非线性找形分析,根据主缆节点力平衡条件,运用既有方法计算了三维主缆的初始构形,进一步对缆索系统展开反复迭代计算,直至主缆线形满足设计垂度的目标要求^[21]。张文明等基于悬链线理论及力学平衡条件,建立空间主缆找形解析方程组,运用梯度算法求解非线性方程组实现主缆找形计算^[22]。文献[20]、文献[21]共同存在有限元理论与解析算法需要分步计算等问题。Cao等提出了悬索桥找形分析的显式解析迭代法,推广基于弹性悬链线理论的传统解析找形方法,导出了2个非线性控制方程,显式表达雅可比矩阵提高了求解主缆线形计算效率,实现使用数值计算理论求解缆索构形问题^[23],但其未涉及吊索与加劲梁耦合计算。Huu等提出了考虑结构几何和材料非线性预估悬索桥极限强度的计算方法^[24]。采用构建的初始构形简化算法确定恒载下的主缆构形,该方法计算过程较为复杂,相对于传统计算理论不具优势。邓小康等基于缆索索段力学平衡关系,联合缆索线形与其斜率的关系及相容条件,通过构建超越方程组进行缆索找形计算^[25],但其对于成桥吊索力未展开描述。文献[20]~文献[25]仅表现成桥状态下主缆几何非线性迭代计算,未体现主缆、吊索

及加劲梁之间耦合迭代计算。因此,具备明确力学概念的悬索桥成桥状态解析算法备受桥梁设计人员期冀。

以上关于悬索桥计算理论及成桥状态计算方法研究推动了悬索桥发展及应用。由于成桥状态下加劲梁、吊索与主缆受力力学参数相互耦合,目前研究理论中仍然存在:成桥吊索张力与缆索位形存在反复迭代繁琐计算过程,利用有限元理论与迭代算法存在不闭合及无法进行参数化建模。为解决满足闭合条件的合理成桥状态统一解析算法在悬索桥研究领域缺失等问题,本文基于悬链线理论及力学平衡条件,建立成桥状态主缆线形计算解析方程组;考虑加劲梁弯曲变形及节点刚体位移,基于微分方程组建立曲梁受载后变形解析算法;联立构建的非线性方程组,实现悬索桥合理成桥状态数值解析算法。满足闭合条件的解析算法具有简洁、收敛性好、计算精度高等优势,是一种悬索桥合理成桥状态计算的新方法。

1 悬索桥主缆悬链线理论

缆索单元力学模型如图 1 所示,其中:在 xOy 坐标系中 q_1 为缆索自重恒荷载集度; s 为恒载下几何长度; H 与 V 分别为缆索始端水平及竖向缆力; T 为缆索始端总缆力; Tdy/ds 为索端张力竖向分量; Tdx/ds 为索端张力水平分量; H_s 与 V_s 分别为缆索末端水平及竖向缆力; T_s 为缆索末端总缆力; α 为索段微元与水平方向夹角; h 为主缆高度; l 为主缆跨度。取索段微分段为研究对象,根据力学平衡条件可得

$$\sum x = 0 \quad d\left(T \frac{dx}{ds}\right) = 0 \quad (1)$$

$$\sum y = 0 \quad d\left(T \frac{dy}{ds}\right) + q_1 ds = 0 \quad (2)$$

索的缆力水平分量表达式为 $H = Tdx/ds$,则将 $T = Hds/dx$ 代入式(2)可得

$$H \frac{d^2 y}{dx^2} + q_1 \frac{ds}{dx} = 0 \quad (3)$$

式(3)为索段基本平衡微分方程,索段张力水平分量沿索长保持不变。该微分方程是建立在索段自重作用后的变形微分方程,以 O 点为坐标原点建立坐标轴,索段高程 h 计算公式为

$$h = c \left[\cosh\left(\frac{l}{c} + a\right) - \cosh(a) \right] \quad (4)$$

式中: $c = -H/q_1$; a 为悬链线系数。

根据节点处力学平衡条件推导计算公式,得到

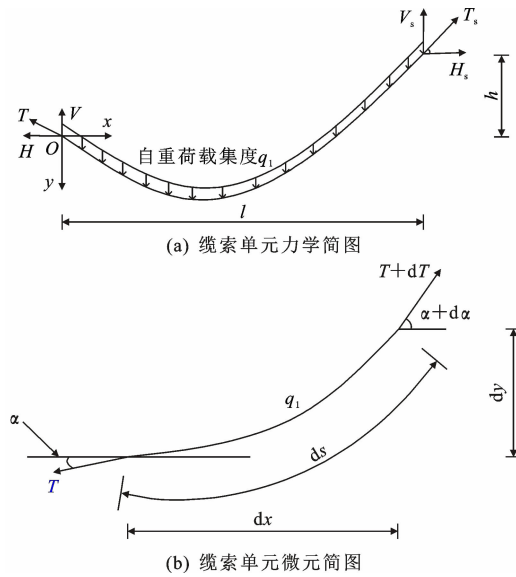


图 1 缆索单元力学模型

Fig. 1 Mechanical model of cable element

$$H \tan(\alpha) = V \quad \tan(\alpha) = \sinh(a) \quad (5)$$

根据式(5),悬链线系数 a 计算如下

$$a = \operatorname{arsinh}\left(\frac{V}{H}\right) \quad (6)$$

索段无应力长度 S 计算公式见式(7),即

$$S = c \left[\sinh\left(\frac{l}{c} + a\right) - \sinh(a) \right] - \frac{H}{2E_s A_s} \cdot \left\{ l + \frac{c}{2} \left[\sinh\left(\frac{2l}{c} + 2a\right) - \sinh(2a) \right] \right\} \quad (7)$$

式中: $E_s A_s$ 为缆索抗拉刚度; E_s 、 A_s 分别为缆索弹性模量和截面惯性矩。

2 加劲梁余能计算公式

2.1 计算公式推导

对于悬索桥成桥状态而言,中跨含有的 n 根吊索将主缆与加劲梁划分为 $n+1$ 段,成桥状态加劲梁受载变形见图 2,图 2 中: F_i 为第 i 根吊索作用于加劲梁吊点作用力; G_i 为第 i 根吊索作用于加劲梁的吊点,由于 1 根吊索产生 1 个吊点,为方便表示后文中的吊点编号直接采用 i 表示; ΔR_1 与 ΔR_2 均为支座反力; ω_i 、 x_i 分别为加劲梁第 i 号吊点竖向位移与水平距离; q 为恒载均布荷载集度; d 为作用加劲梁水平力。悬索桥加劲梁任意截面弯矩 M 为

$$M = M_q + M_d + \sum_{i=1}^n M_{F_i} \quad (8)$$

式中: M_q 为加劲梁恒载 q 作用下的弯矩; M_d 为加劲梁支座处水平反力 d 作用下弯矩; M_{F_i} 为吊索力 F_i 作用下的弯矩,加劲梁弯曲应变能 U 计算公式为

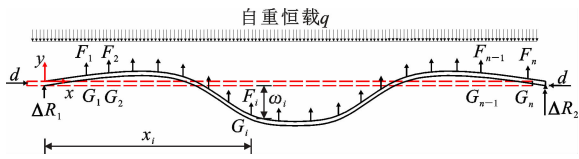


图 2 成桥状态加劲梁受载变形

Fig. 2 Deformation of stiffened girder under load

$$U = \int \frac{M^2}{2EI} ds = \frac{1}{2EI} \int (M_q^2 + M_d^2 + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n M_{F_i} M_{F_j} + 2M_q \sum_{i=1}^n M_{F_i} + 2M_d \sum_{i=1}^n M_{F_i} + 2M_q M_d) ds \quad (9)$$

式中: EI 为加劲梁抗弯刚度; E 、 I 分别为加劲梁弹性模量和截面惯性矩。

根据弯曲能对吊杆力进行偏微分,可推导出以下方程

$$\frac{\partial U}{\partial F_i} = \sum_{j=1}^n F_j \delta_{ij} + \delta_{iq} q + \delta_{id} d + \frac{\partial d}{\partial F_i} \cdot \left(\sum_{j=1}^n F_j \delta_{dj} + \delta_{dq} q + \delta_{dd} d \right) = 0 \quad (10)$$

$$\begin{cases} \delta_{ij} = \int \frac{m_i m_j}{EI} ds \\ \delta_{iq} = \int \frac{m_i m_q}{EI} ds \\ \delta_{id} = \int \frac{m_i m_d}{EI} ds \\ \delta_{dq} = \int \frac{m_d m_q}{EI} ds \\ \delta_{dd} = \int \frac{m_d m_d}{EI} ds \end{cases} \quad (11)$$

式中: m_i 、 m_j 分别为作用于加劲梁第 i 号吊点与第 j 号吊点位置上竖向单位力产生的弯矩; m_q 、 m_d 分别为作用于加劲梁单位自重恒载 q 及支座处单位水平力 d 产生的弯矩,则 δ_{ij} 、 δ_{iq} 、 δ_{dq} 、 δ_{id} 、 δ_{dj} 、 δ_{dd} 分别为其对应弯矩积分产生的加劲梁柔度系数。

根据余能定理,考虑式(10)的影响则为最小弯曲能量法,不计吊索力对于主缆缆力的影响[式(10)第 4 项为 0],即最小弯曲能量法的退化形式为刚性支承连续梁法,即

$$\frac{\partial U}{\partial F_i} = \sum_{j=1}^n F_j \delta_{ij} + \delta_{iq} q + \delta_{id} d = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (12)$$

本文研究对象为地锚式悬索桥,不计支座水平反力对于弯矩贡献值,可得

$$\frac{\partial U}{\partial F_i} = \sum_{j=1}^n F_j \delta_{ij} + \delta_{iq} q = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (13)$$

进一步得到成桥状态下加劲梁各吊点位移的优化目标函数

$$\left(\frac{\partial U}{\partial F_i} \right)^2 = \left[\sum_{j=1}^n (F_j \delta_{ij} + \delta_{iq} q) \right]^2 = 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (14)$$

2.2 力学模型分析

成桥状态下加劲梁在索塔下横梁处设置竖向支座,为多点竖向吊索张力作用下简支梁力学模型。成桥状态下加劲梁吊点间距为设计基础参数,吊索张力为竖向力,受载后加劲梁吊点的竖向位移为 0。主缆在吊索力及自重恒载及二期恒载作用下发生位形变化,由于成桥状态下主缆吊点间距为定值,根据各跨几何闭合条件,求得该吊索力作用下主缆无应力构形。吊索作为加劲梁及主缆力学模型连接媒介,在上下吊点力及吊索自重恒载下处于竖向力学平衡。索塔各计算点处受到主缆水平张力及竖向张力,成桥状态下各跨水平张力相等(为保证索塔不出现塔偏);索塔在缆索及自重竖向力作用下发生弹性压缩变形,为达到成桥状态下计算点设计位置,需进一步求解索塔无应力构形。解析数值算法在满足上述力学模型条件下闭合非线性方程组,求解非线性方程组便实现悬索桥体系各个构件无应力构形求解过程。

3 基于解析算法的刚性支撑连续梁法

3.1 成桥状态加劲梁目标位形

成桥状态下主缆及吊索为受拉状态,加劲梁处于受弯状态,由于成桥状态下主缆计算点吊杆间距及加劲梁线形为确定的设计参数,加劲梁的受力状态决定吊索下吊点处张力,由确定的吊索张力及吊索重量根据主缆线形计算方程组从而确定成桥主缆吊点线形。刚性支撑连续梁法为成桥加劲梁线形下,在加劲梁吊点处施加竖向支承,最终计算支承处支座反力即为吊索张力。

如图 2 所示,成桥状态下加劲梁在吊索力 F_i 、自重恒载及支座反力 ΔR_1 与 ΔR_2 作用下各吊点坐标为设计参数下的坐标,对应计算如式(15)所示,即

$$Y_{Gi} = Y_{Fi} - \omega_i \quad \omega_i = 0 \quad (15)$$

式中: Y_{Gi} 为第 i 号吊点设计坐标值; Y_{Fi} 为第 i 号吊点受载后坐标值。

3.2 不考虑曲率影响的加劲梁弯曲挠度计算

不考虑曲率的加劲梁受载力学简图见图 3。加劲梁在吊索力、恒载均布荷载 q 作用及支座反力作用下,存在 $n+2$ 个竖向集中力, F_i ($i=1, 2, \dots$,

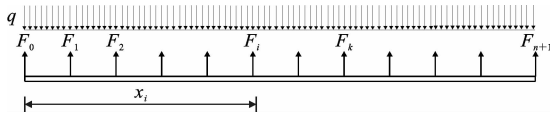


图 3 不考虑曲率的加劲梁受载力学简图

Fig. 3 Mechanical diagram of stiffened beam under loading without considering curvature

\$n\$) 为成桥状态下吊索对加劲梁吊点竖向张力, 力作用方向竖直向上为正, 竖直向下为负值。\$x_i\$ 为吊索力 \$F_i\$ 到梁最左端的水平距离。将梁段划分为 \$n+1\$ 个梁段, 第 \$i\$ 梁段的弯矩 \$M(x)\$ 平衡计算公式见式 (16)。本节推导未考虑成桥状态下加劲梁曲率对于计算精度影响。式 (16) 可表示为

$$M(x) = \sum_{k=0}^{i-1} F_k(x - x_k) - \frac{1}{2}qx^2 \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i \quad (16)$$

由于悬索桥为漂浮体系, 主梁纵桥向约束较弱, 根据加劲梁支座处纵向反力为 0 及成桥状态下吊索处于垂直状态的条件, 加劲梁任意弯矩积分形式表达式如下所示

$$-EI\omega_c(x) = \iint M(x) \quad (17)$$

根据高等数学积分公式, 任意位置加劲梁转角 \$\lambda(x)\$ 及位移 \$\omega_c(x)\$ 表达式分别见式 (18)、式 (19)^[26], 即

$$\lambda(x) = -\frac{1}{EI} \left[\sum_{k=0}^{i-1} F_k \left(\frac{1}{2}x^2 - x_k x \right) - \frac{q}{6}x^3 + D_{i,1} \right] \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i \quad (18)$$

$$\omega_c(x) = -\frac{1}{EI} \left[\sum_{k=0}^{i-1} F_k \left(\frac{1}{6}x^3 - \frac{x_k}{2}x^2 \right) - \frac{q}{24}x^4 + D_{i,1}x + D_{i,2} \right] \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i \quad (19)$$

式中: \$D_{i,1}\$ 与 \$D_{i,2}\$ 为积分常数, 根据加劲梁位移及转角在吊点左右处连续条件^[20], 积分常数递推公式如式 (20)、式 (21) 所示

$$D_{i+1,1} = D_{i,1} + \frac{1}{2}F_i x_i^2 \quad (20)$$

$$D_{i+1,2} = D_{i,2} - \frac{1}{6}F_i x_i^3 \quad (21)$$

根据边界条件: 加劲梁在两端支座处竖向位移为 0, 积分常数 \$D_{1,1}\$ 与 \$D_{1,2}\$ 计算公式分别见式 (22)、式 (23), 即

$$D_{1,1} = -\sum_{k=0}^n F_k \left(\frac{1}{6}x_{n+1}^2 - \frac{x_k}{2}x_{n+1} \right) + \frac{q}{24}x_{n+1}^3 + \sum_{k=1}^n \frac{F_k x_k^3}{6x_{n+1}} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2}F_k x_k^2 \quad (22)$$

$$D_{1,2} = 0 \quad (23)$$

加劲梁任意位置挠度值及转角值, 可联立式 (16)~式 (23) 依次求解。

3.3 考虑曲率影响的加劲梁弯曲变形解析算法

为研究成桥状态下加劲梁曲率对于位移计算的影响, 对成桥状态加劲梁受载位形解析计算过程进行推导。梁单元力学模型如图 4 所示, 成桥状态下主梁吊点纵向间距为已知量, 基于梁柱理论, 平面梁单元的二阶平衡微分方程如下所示

$$EIy'' + M_A - Q_A x - N_{By} = 0 \quad (24)$$

式中: \$N_B\$、\$Q_A\$、\$M_A\$ 分别为该单元的 \$B\$ 端轴力、\$A\$ 端剪力与 \$A\$ 端弯矩抗力, \$\theta_A\$ 与 \$\theta_B\$ 分别为 \$A\$ 端与 \$B\$ 端转角; 杆端力与位移均如图 4 中标注方向所示。

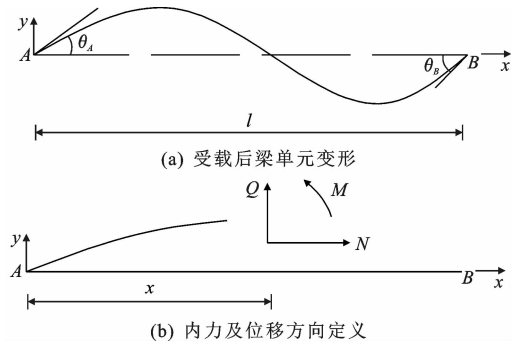


图 4 梁单元力学模型

Fig. 4 Mechanical model of beam element

式 (24) 为基于梁单元理论考虑梁元轴力、弯矩及其耦合效应的杆端抗力计算, 当加劲梁轴力较小时, 仍可采用图 4 所示坐标系建立平衡方程, 同时忽略 \$N_B\$ 计算项目, \$N\$、\$Q\$、\$M\$ 分别为轴力、剪力、弯矩。参考图 3 加劲梁梁段表示方法, 截面的尺寸相对于跨度比值较小, 对于长跨简支梁体系忽略剪切变形; 根据加劲梁支座处边界条件及成桥吊索力为垂直竖向力, 因此忽略轴向变形对于主梁竖向挠度的影响; 考虑弯矩作用时, 曲梁的竖向位移 \$\omega\$ 表示为两部分的线性叠加

$$\omega = \omega_c + \omega_e \quad (25)$$

式中: \$\omega_c\$ 为由加劲梁的弯曲变形引起的竖向位移; \$\omega_e\$ 为由加劲梁的曲率引起的吊点位置的竖向刚体位移。

同时可计算分析第 \$i\$ 号梁段由于弯曲变形引起竖向转动角度 \$\lambda_i\$。以第 \$i\$ 号梁段为例进行说明, \$\theta_i\$ 为主梁初始构形的梁段始末点连线与水平方向角度, 主梁初始构形下始末端点高程值为 \$\Delta_i\$。考虑主梁刚体转动下, 由第 1 段主梁弯曲转动角度引起的刚体竖向位移 \$\omega_{e,1}\$ 为

$$\omega_{e,1} = \frac{\lambda_1}{\theta_1} \Delta_1 \quad (26)$$

第 2 号梁段刚体位移是建立在第 1 号梁段刚体位移基础上发生的位移变化,因而第 i 号梁段的刚体竖向位移递推计算 $\omega_{e,i}$ 为

$$\omega_{e,i} = \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{\theta_j} \Delta_j \quad (27)$$

刚体位移对于线形影响较小,忽略挠度变形对于加劲梁初始位形的影响。第 i 号梁段总体位移 ω_i 为挠度引起的竖向位移(解析方程式求解)与刚体位移[式(27)]线性叠加,即

$$\omega_i = \omega_{e,i} + \omega_{e,i} \quad (28)$$

4 合理成桥状态解析算法

4.1 基于自重恒载守恒的缆索系统解析方程组

中跨 n 根吊索将主缆与加劲梁划分为 $n+1$ 段,

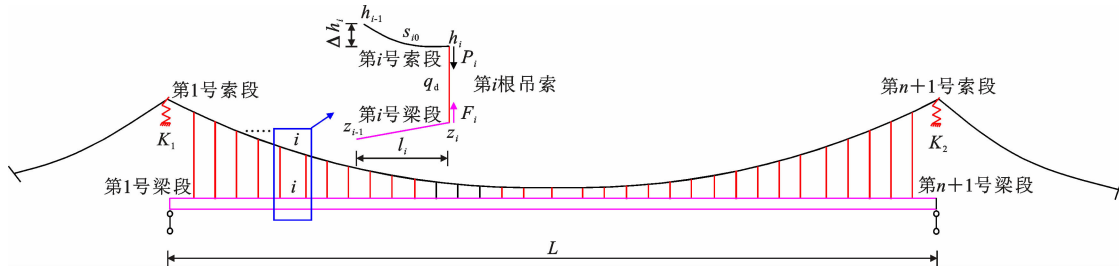


图 5 悬索桥成桥状态力学简图

Fig. 5 Mechanical diagram of completion state of suspension bridge

式中: H_1 为中跨主缆水平缆力; V_i 为主缆第 i 号索段始端竖向缆力。

主缆第 $i+1$ 号索段始端竖向缆力计算为

$$V_{i+1} = V_i - q_1 s_{i0} - P_i \quad (30)$$

式中: s_{i0} 为第 i 号索段无应力长度,可根据式(7)计算。

4.2 成桥状态统一解析算法

根据加劲梁挠度计算[式(28)]可建立刚性支撑连续梁挠度平衡方程组[式(31)]。根据始末节点位移差值[式(32)]、矢高位移差值[式(33)],依次建立迭代方程组。吊索作为连接主缆与加劲梁媒介,吊点间的坐标与吊索力密切相关,吊索满足竖向力学平衡条件[式(34)],边跨主缆几何相容方程。对应收敛条件为加劲梁吊点坐标位移值与已知设计线形的差值满足平方和最小目标,主缆线形差值满足收敛要求及主缆自重恒载满足收敛要求,可得

$$\omega_i^2 = 0 \quad i=1,2,\dots,n \quad (31)$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} \Delta h_i = h_s \quad (32)$$

中跨主缆含有 $n+1$ 个索段,中跨加劲梁含有 $n+1$ 个梁段,第 i 根吊索与主缆、加劲梁连接的编号分别对应称为主缆、加劲梁第 i 号吊点,一跨含有 $n+1$ 个索段的悬索桥力学模型如图 5 所示。图 5 中: h_i 为主缆第 i 号吊点的高程; z_i 为加劲梁第 i 号吊点的高程; L 为中跨主缆跨度; Δh_i 为主缆第 i 号索段高程; l_i 为主缆第 i 号段跨度; P_i 为主缆第 i 号吊点吊索力; K_1 、 K_2 分别为左、右索塔抗压刚度。针对悬索桥缆索受力特征,基于悬链线方程理论及主缆自重恒载守恒原则,建立适用于悬索桥缆索找形的解析方程组。主缆索段迭代计算递推如式(29)、式(30)所示

$$\Delta h_i = -\frac{H_1}{q_1} \left[\cosh \left(\sinh^{-1} \left(\frac{V_i}{H_1} \right) - \frac{q_1 l_i}{H_1} \right) - \cosh \left(\sinh^{-1} \left(\frac{V_i}{H_1} \right) \right) \right] \quad (29)$$

$$\sum_{i=1}^m \Delta h_i = Lf \quad (33)$$

$$P_i - F_i = q_d s_{di} \quad i=1,2,\dots,n \quad (34)$$

式中: h_s 为中跨主缆始末点高度差; f 为矢跨比; m 为跨中点对应索段数量; q_d 为吊索单位长度重量; s_{di} 为第 i 根吊索无应力长度,可根据主缆与加劲梁高程计算得到。

悬索桥各跨主缆水平缆力相等,索塔压缩量 ϵ 为竖向张力引起的弹性压缩量 ϵ_1 与收缩徐变变形量 ϵ_2 之和,即

$$\begin{cases} H_1 = H_2 = H_3 \\ \epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2 \end{cases} \quad (35)$$

式中: H_2 与 H_3 分别为左跨、右跨边跨水平缆力。

加劲梁在吊索力及支座反力作用下,力学平衡方程见式(36)、式(37)

$$\sum_{i=1}^{n+1} F_i + \Delta R_1 + \Delta R_2 - qL = 0 \quad (36)$$

$$\sum_{i=1}^n F_i x_i + \Delta R_2 L - 0.5 q L^2 = 0 \quad (37)$$

$F_i (i=0, 1, \dots, n+1)$ 与 $P_i (i=1, 2, \dots, n)$ 为未知变量, 共计 $2n+2$ 个变量, 主缆初始端水平及竖向缆力及边跨竖向缆力共计 4 个。加劲梁各点坐标变形后的 ω_i 为已知量, 在刚性支承连续梁条件下, 主梁各吊点处位移为 0, 则根据加劲梁位移闭合条件、主缆始末端几何闭合方程与矢高几何闭合条件、主缆恒载重量守恒条件、加劲梁竖向力平衡条件及边跨竖向高程闭合条件, 可建立 $2n+6$ 个独立方程组, 方程组中含有 $2n+6$ 个未知量, 存在有解情况。基于成桥状态解析算法控制方程, 通过求解非线性控制方程组, 实现吊索力计算, 进一步计算分析悬索桥主缆线形关键力学参数。

对于有限元软件 MIDAS Civil 中悬索桥分析模块, 基于刚性支承连续梁合理成桥状态下吊索与加劲梁力学状态实现方法, 通过设置吊索下吊点节点位移值为 0, 根据矢高及始末点竖向高程闭合条件基于有限元理论进行求解。合理成桥状态计算流程如图 6 所示。

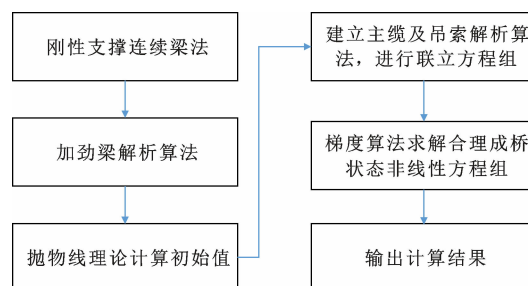


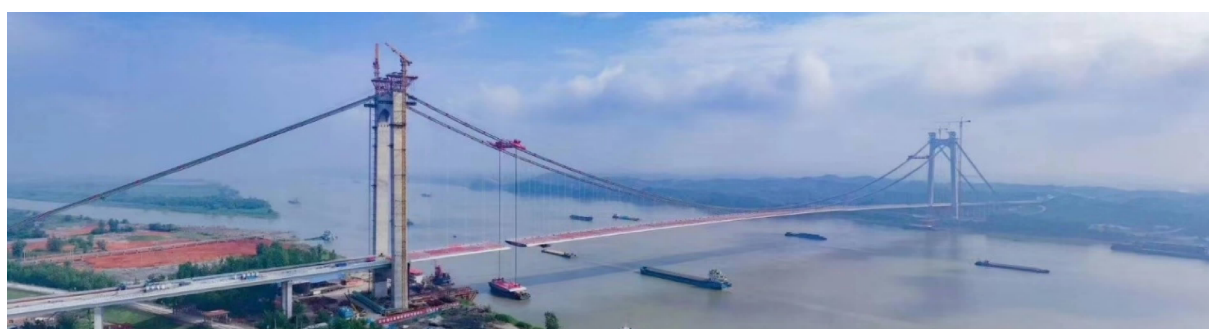
图 6 合理成桥吊索力及线性计算流程

Fig. 6 Calculation flow of reasonable bridge crane force and alignment

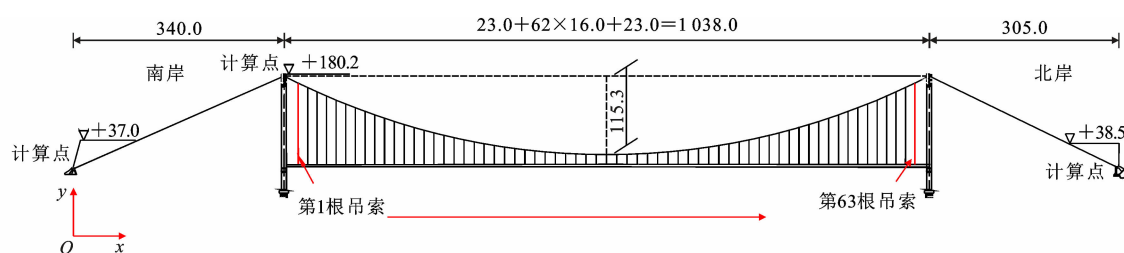
5 案例分析计算

5.1 工程背景简介

以棋盘洲长江公路大桥为工程研究背景, 主桥采用双塔单跨钢箱梁悬索桥方案, 桥跨布置为 $(340+1\ 038+305)$ m, 散索鞍 IP 点之间距离为 1 683 m, 矢跨比为 1/9, 设计基准温度为 $20\ ^\circ\text{C}$, 全桥共 63 对吊杆, 如图 7 所示。



(a) 悬索桥现场



(b) 总体布置

单位: m

图 7 跨越长江高速公路悬索桥

Fig. 7 Suspension bridge across Yangtze River Expressway

5.2 成桥状态计算结果对比分析

建立主跨跨径为 1 038 m 悬索桥有限元模型如图 8 所示, 进行加劲梁刚性支承连续梁计算比较分析。中跨矢跨比为 1/9, 边中跨比分别为 0.33、0.29, $E=1.98 \times 10^5$ MPa, 自重荷载集度为 22.21 kN/m, 加劲梁恒载集度为 240 kN/m。

图 9 为成桥状态关键计算参数。由图 9 可知,

解析法与有限元法成桥状态下 2 种不同主梁内力状态导致不同的成桥状态吊索张力, 整体差值率控制在 0.1%, 偏差值极值为 1.6 kN, 其中塔区吊索张力较跨中区域偏大。成桥状态 2 种不同主梁内力状态导致不同的成桥状态线形, 整体差值率控制在 0.1%, 主缆差值极值为 0.4 mm。

图 10 为合理成桥状态加劲梁弯矩包络图。图

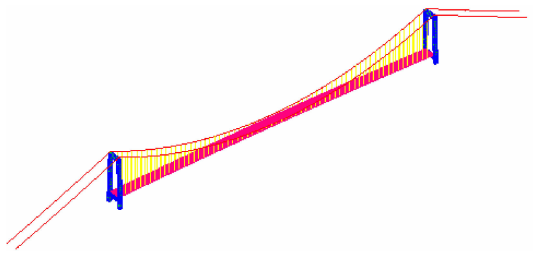
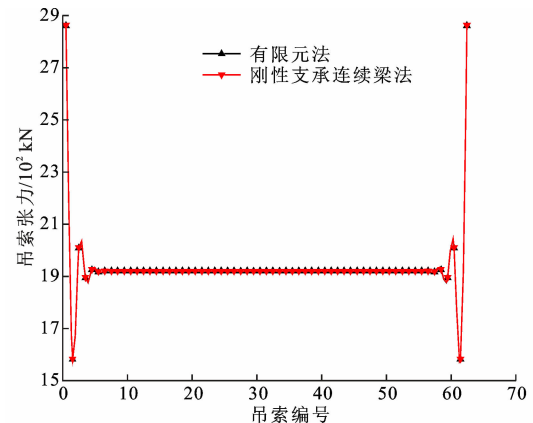
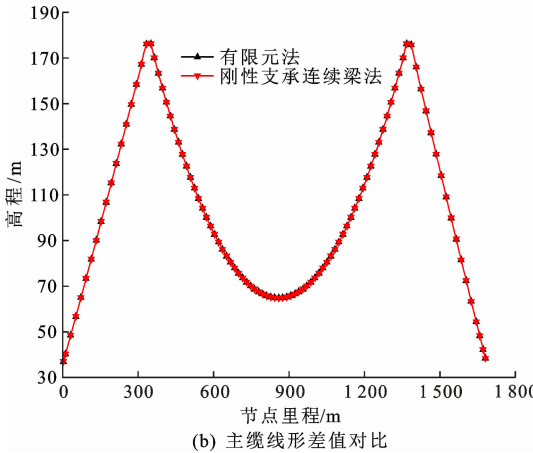


图 8 悬索桥成桥状态有限元模型

Fig. 8 Finite element model of completion state of suspension bridge



(a) 吊索索力对比



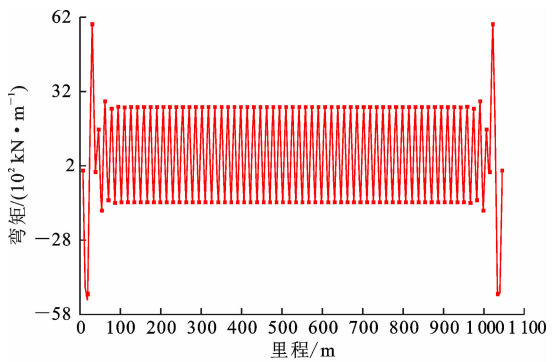
(b) 主缆线形差值对比

图 9 成桥状态关键计算参数

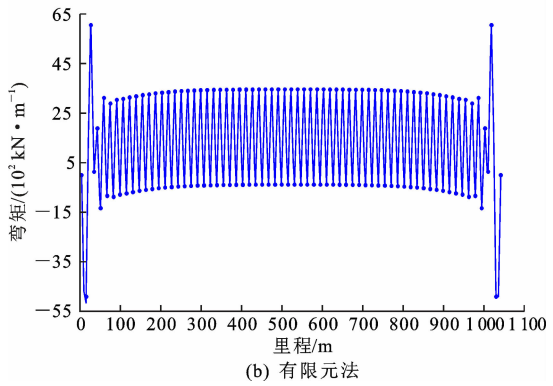
Fig. 9 Key calculation parameters of completed bridge state

11 为合理成桥状态无应力长度对比。由图 10、图 11 可知:刚性支承连续梁与有限元法主梁弯矩平均值相差不大,分别为 2 577、2 581 $\text{kN} \cdot \text{m}$,差值率为 -0.15% ;弯矩极值点差值相差较小,分别为 5 996、6 017 $\text{kN} \cdot \text{m}$,差值率为 -0.34% 。索塔压缩量计算值分别为 52.0、52.1 mm。有限元法与解析算法主缆索段及吊索无应力长度差值较小,偏差值控制在 0.01 mm 以内。

2 种算法对于合理成桥状态加劲梁弯矩极值影响较小,极值出现在塔区附近,在悬索桥设计阶段建



(a) 刚性支承连续梁法



(b) 有限元法

图 10 合理成桥状态加劲梁弯矩包络图

Fig. 10 Bending moment envelope diagram of stiffening beam under reasonable bridge condition

议选择刚性支承连续梁法,有限元法可作为验证计算方法。有限元软件中悬索桥平衡态计算数值与悬索桥分析模块中初始状态相关,而推导的解析算法计算时长与初始值相关,计算结果不随初始值变化。2 种不同方法计算差值存在一定差异性,相对于吊索力、主缆线形及无应力长度,加劲梁弯矩计算值受计算方法影响更为敏感。有限元软件在迭代计算中产生构件附加平衡节点力,使得悬索桥成桥状态整体迭代计算平衡。加劲梁上附加平衡节点力与悬索桥实际工程不相符,不满足闭合条件的有限元法为一种近似求解方法。

6 结 语

(1)推导算法能有效解决既有方法关于缆索体系与加劲梁体系计算不闭合条件、同步解决悬索桥合理成桥状态下的各构件无应力构形计算问题。解析算法有利于设计阶段参数化建模及参数优化设计,可作为一种悬索桥成桥状态设计阶段计算方法。相对于有限元法,解析算法具有力学表达式清晰及可参数化建模与优化设计等优势。

(2)成桥状态下主缆位形对于加劲梁位形变化较不敏感,吊索索力及加劲梁弯矩对于加劲梁位形

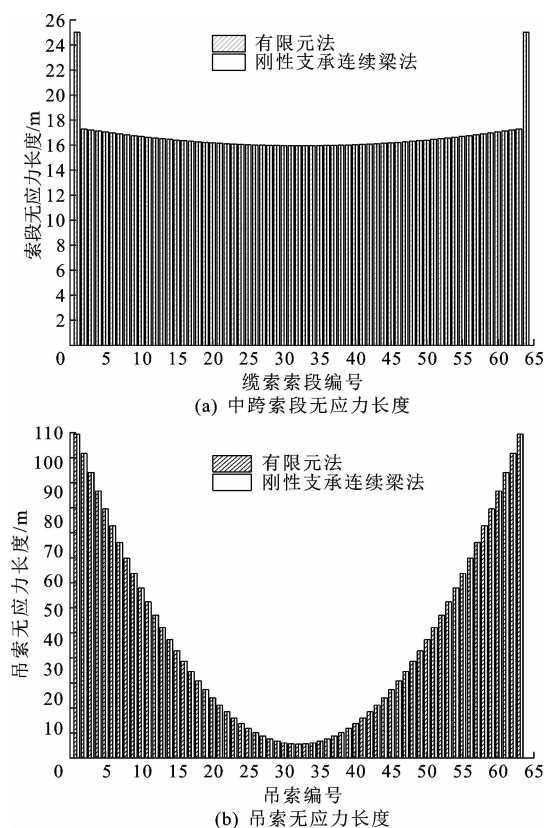


图 11 合理成桥状态无应力长度对比

Fig. 11 Comparisons of stress-free length of reasonable completed bridge

变化相对较敏感。由于主缆重力刚度占悬索桥体系主要部分,加劲梁附加弯矩与位形偏差对于成桥主缆位形的影响可自适应减弱。

(3)成桥状态加劲梁弯矩及吊索张力极值出现在塔区附近,在设计过程中宜对于塔区加劲梁设计构造结构予以加强;2种算法加劲梁弯矩平均值差值较小,吊索力计算数值与吊索纵向位置设置相关,综合考虑吊索纵向间距与加劲梁弯矩及吊索缆力极值最优化设计是下一阶段研究重点。

参考文献:

References:

- [1] 苏剑南. 厦漳跨海大桥北汊主桥合理成桥状态研究[J]. 桥梁建设, 2013, 43(4): 44-48.
SU Jian-nan. Study of rational completed bridge state of North Main Bridge of Xiazhang Sea-crossing Bridge [J]. Bridge Construction, 2013, 43(4): 44-48.
- [2] SONG C L, XIAO R C, SUN B. Improved method for shape finding of long-span suspension bridges[J]. International Journal of Steel Structures, 2020, 20(1): 247-258.
- [3] LONETTI P, PASCUIZZO A. Optimum design analysis of hybrid cable-stayed suspension bridges[J]. Advances in Engineering Software, 2014, 73: 53-66.
- [4] JUNG M R, MIN D J, KIM M Y. Simplified analytical method for optimized initial shape analysis of self-anchored suspension bridges and its verification [J]. Mathematical Problems in Engineering, 2015, 2015: 1-14.
- [5] 曹鸿猷, 陈志军, 吴巧云, 等. 基于单索理论的多塔悬索桥简化计算模型[J]. 中国公路学报, 2016, 29(4): 77-84.
CAO Hong-you, CHEN Zhi-jun, WU Qiao-yun, et al. Simplified calculation model for multi-span suspension bridges based on single cable theory[J]. China Journal of Highway and Transport, 2016, 29(4): 77-84.
- [6] ZHOU G P, LI A Q, LI J H, et al. Determination and implementation of reasonable completion state for the self-anchored suspension bridge with extra-wide concrete girder[J]. Applied Sciences, 2019, 9(12): 2576.
- [7] 李小年, 张小月, 马如进, 等. 自锚式悬索桥合理成桥状态的实用计算方法[J]. 公路交通科技, 2013, 30(6): 82-87.
LI Xiao-nian, ZHANG Xiao-yue, MA Ru-jin, et al. Practical calculation method of rational completion status of self-anchored suspension bridge[J]. Journal of Highway and Transportation Research and Development, 2013, 30(6): 82-87.
- [8] 汤金涛, 王勇华, 张秋美. 三塔自锚式悬索-斜拉协作体系成桥状态计算方法[J]. 公路, 2013, 58(4): 6-12.
TANG Jin-tao, WANG Yong-hua, ZHANG Qiu-mei. Calculation method of three towers self-anchored suspension and cable-stayed composite structure in completion state[J]. Highway, 2013, 58(4): 6-12.
- [9] 戴杰, 秦凤江, 狄谨, 等. 斜拉桥成桥索力优化方法研究综述[J]. 中国公路学报, 2019, 32(5): 17-37.
DAI Jie, QIN Feng-jiang, DI Jin, et al. Review on cable force optimization method for cable-stayed bridge in completed bridge state[J]. China Journal of Highway and Transport, 2019, 32(5): 17-37.
- [10] LI J H, FENG D M, LI A Q, et al. Determination of reasonable finished state of self-anchored suspension bridges [J]. Journal of Central South University, 2016, 23(1): 209-219.
- [11] WANG S R, ZHOU Z X, WEN D, et al. New method for calculating the preoffsetting value of the saddle on suspension bridges considering the influence of more

- parameters[J]. Journal of Bridge Engineering, 2016, 21(12):1-9.
- [12] ZHANG W M, YANG C Y, WANG Z W, et al. An analytical algorithm for reasonable central tower stiffness in the three-tower suspension bridge with unequal-length main spans[J]. Engineering Structures, 2019, 199:109595.
- [13] 唐茂林. 大跨度悬索桥空间几何非线性分析与软件开发[D]. 成都:西南交通大学, 2003.
- TANG Mao-lin. Spatial geometric nonlinear analysis and software development of long-span suspension bridge[D]. Chengdu: Southwest Jiaotong University, 2003.
- [14] 齐东春. 大跨径悬索桥主缆精细化计算研究[D]. 成都:西南交通大学, 2012.
- QI Dong-chun. Study on fine calculation of main cable of long-span suspension bridge[D]. Chengdu: Southwest Jiaotong University, 2012.
- [15] NIU W J, YU H T. A new analytic solution to determine internal load of small span suspension bridge[J]. KSCE Journal of Civil Engineering, 2016, 20(4): 1419-1428.
- [16] LONETTI P, PASCUZZO A. Vulnerability and failure analysis of hybrid cable-stayed suspension bridges subjected to damage mechanisms [J]. Engineering Failure Analysis, 2014, 45:470-495.
- [17] 万利军, 单 炜, 姜 华. 自锚式悬索桥合理成桥状态静力特性试验研究[J]. 公路工程, 2014, 39(5): 155-159.
- WAN Li-jun, SHAN Wei, JIANG Hua. Study on static characteristics in reasonable finished state of self-anchored suspension bridge[J]. Highway Engineering, 2014, 39(5):155-159.
- [18] 周云岗. 基于迭代分析的多塔悬索桥合理成桥状态确定方法[J]. 郑州大学学报(工学版), 2014, 35(1): 99-103.
- ZHOU Yun-gang. Determination method of reasonable finished dead state of multi-town suspension bridges based on iterative analysis [J]. Journal of Zhengzhou University (Engineering Science), 2014, 35(1):99-103.
- [19] RSC A, ACCL B, RGLDS C, et al. Cable structures; An exact geometric analysis using catenary curve and considering the material nonlinearity and temperature effect[J]. Engineering Structures, 2022, 253:113738.
- [20] ZHANG W M, CHANG J Q, TIAN G M. FEM-based shape-finding and force-assessment of suspension bridges via completed loop adjustment[J]. Journal of Bridge Engineering, 2022, 27(1):1-15.
- [21] KIM H K, LEE M J, CHANG S P. Non-linear shape-finding analysis of a self-anchored suspension bridge [J]. Engineering Structures, 2002, 24 (12): 1547-1559.
- [22] 张文明, 常佳琦, 田根民, 等. 不等主跨三塔空间缆索悬索桥主缆线形解析计算方法[J]. 桥梁建设, 2022, 52(1):109-115.
- ZHANG Wen-ming, CHANG Jia-qi, TIAN Gen-min, et al. An analytical method for main cable shape of three-tower suspension bridge with asymmetrical two main spans and spatial cables[J]. Bridge Construction, 2022, 52(1):109-115.
- [23] CAO H Y, ZHOU Y L, CHEN Z J, et al. Form-finding analysis of suspension bridges using an explicit iterative approach[J]. Structural Engineering and Mechanics, 2017, 62(1):85-95.
- [24] HUU T T, DONG H C. Advanced analysis of multi-span suspension bridges[J]. Journal of Constructional Steel Research, 2013, 90:29-41.
- [25] 邓小康, 谢肖礼, 徐恭义. 武汉杨泗港长江大桥成桥状态的统一悬链线计算方法[J]. 桥梁建设, 2018, 48(4):79-83.
- DENG Xiao-kang, XIE Xiao-li, XU Gong-yi. Unified catenary calculation method for main cable of Wuhan-Yangsigang Changjiang River Bridge in completion state[J]. Bridge Construction, 2018, 48(4):79-83.
- [26] 朱伟华, 颜东煌, 许红胜. 三塔悬索桥中塔适宜刚度数值解析算法 [J]. 中国公路学报, 2023, 36(4): 112-123.
- ZHU Wei-hua, YAN Dong-huang, XU Hong-sheng. Numerical analytical algorithm for suitable stiffness of middle tower of three-tower suspension bridge[J]. China Journal of Highway and Transport, 2023, 36(4):112-123.