

邓继华,陈历强,田仲初,等. 大转动对称平面梁单元共旋列式研究[J]. 长安大学学报(自然科学版),2023,43(4):60-67.

DENG Ji-hua, CHEN Li-qiang, TIAN Zhong-chu, et al. Research on CR formulation of large rotational symmetric plane beam element[J]. Journal of Chang'an University (Natural Science Edition), 2023, 43(4): 60-67.

DOI:10.19721/j.cnki.1671-8879.2023.04.007

大转动对称平面梁单元共旋列式研究

邓继华^{1,2}, 陈历强¹, 田仲初¹, 谭平³

(1. 长沙理工大学 土木工程学院, 湖南 长沙 410114; 2. 长沙理工大学 桥梁工程安全控制教育部重点实验室, 湖南 长沙 410114; 3. 广州大学 工程抗震研究中心, 广东 广州 510405)

摘 要:针对已有研究中共旋法非线性平面梁单元存在切线刚度矩阵不对称的问题,以合理选择平面梁单元共旋坐标系的原点及坐标轴方向入手开展研究。首先,将单元共旋坐标系原点设在梁单元左右节点坐标的平均值处,轴则始终为单元左节点指向右节点的连线方向,该坐标系随节点的刚体转动和平动而运动,在扣除单元刚体位移的基础上计算出单元节点坐标和位移;其次,基于结构坐标系与共旋坐标系下虚功相等的原理再结合几何一致性原则,建立平面梁单元在大转动、小应变条件下具有对称性的切线刚度矩阵和节点抗力算法,结合能将荷载增量法与位移增量法统一于一体的非线性方程组求解方法开发相应计算程序,并对梁端受弯矩的悬臂梁和William肘式框架算例进行计算和对比。研究结果表明:对于前一个算例,将梁等分成 20 个单元,采用荷载增量法,分成 10 级均匀加载,得到的数值解与解析解吻合良好,即使在悬臂梁弯曲为 1 个圆时,两者的差别不到 0.000 1,完全可忽略不计;对于后一个算例,将框架每根杆件均匀划分成 10 个单元,在非线性方程组求解方法转换为位移增量法以后,不仅能顺利通过荷载-位移曲线的极值点,而且计算结果与William的试验结果基本一致。研究成果为平面梁结构的非线性分析提供了依据。

关键词:桥梁工程;平面梁单元;共旋法;几何非线性;对称切线刚度矩阵;虚功原理

中图分类号:U441

文献标志码:A

文章编号:1671-8879(2023)04-0060-08

Research on CR formulation of large rotational symmetric plane beam element

DENG Ji-hua^{1,2}, CHEN Li-qiang¹, TIAN Zhong-chu¹, TAN Ping³

(1. School of Civil Engineering, Changsha University of Science and Technology, Changsha 410114, Hunan, China; 2. Ministry of Education Key Laboratory of Safety Control of Bridge Engineering, Changsha University of Science & Technology, Changsha 410114, Hunan, China; 3. Earthquake Engineering Research & Test Center, Guangzhou University, Guangzhou 510405, Guangdong, China)

Abstract: According to the shortage of tangent stiffness matrix asymmetry of nonlinear plane beam element by using co-rotational method in former studies, researches were carried out to

收稿日期:2022-12-09

基金项目:国家自然科学基金项目(52278142);湖南省自然科学基金项目(2023JJ30019);湖南省教育厅项目(21A0187);

长沙理工大学青年教师成长计划项目(2019QJCZ059);广东省自然科学基金项目(2015A030310141);

桥梁结构健康与安全国家重点实验室开放基金项目(BHSL21-06-GF);

长沙理工大学土木工程重点学科基金项目(17ZDXK03)

作者简介:邓继华(1975-),男,湖南冷水江人,副教授,工学博士,E-mail:jihuadeng@sina.com。

reasonably select the origin and coordinate axis direction of the plane beam element co-rotation coordinate system. Firstly, the origin was set at the average value point of the left and right element node coordinates, and the x -axis was always in the connecting direction from the left node to the right. The coordinate system moved with the rigid body rotation and translation of the node, and the element node coordinates and displacement were calculated on the basis of deducting the element rigid displacement. Secondly, based on the principle of equal virtual work in structural coordinate system and co-rotating coordinate system as well as the principle of geometric consistency, the symmetrical tangent stiffness matrix and the node resistance algorithm of plane beam elements under the condition of large rotation and small strain were established. Combined with the solution method of nonlinear equations which unifies the load increment method and displacement increment method, the corresponding calculation program was developed. The cantilever beam and William's toggle frame with bending moment at the beam end were calculated and compared. The results show that for the former example, the beam is divided into 20 elements, and load increment method is adopted by 10 uniform loading levels. The numerical solution obtained is in good agreement with the analytical solution and the difference between the two is less than 0.0001, which can be negligible even when the cantilever beam is bent into a circle. As for the latter example, each frame member is homogeneously divided into 10 elements. The extreme point of load-displacement curve can be successfully passed through after transforming the solution method of nonlinear equations to displacement increment method and the calculated value is basically consistent with William's test. The research results can provide a powerful tool for the nonlinear analysis of plane beam structures. 9 figs, 24 refs.

Key words: bridge engineering; plane beam element; co-rotational method; geometric nonlinearity; symmetric tangent stiffness matrix; virtual work principle

0 引言

目前建立几何非线性单元的方法主要有完全的拉格朗日法(TL法)、修正的拉格朗日法(UL法)以及共旋坐标法(CR法)^[1]。相对于前2种方法在商业程序里成为主流分析方法,共旋坐标法到目前为止尚未被商业程序采用,其仅适用于大转动、小应变条件而未能满足大型商业程序应用范围很宽的需求是被弃用的主要原因^[2]。但在物体发生运动为大转动、小应变前提下,相对于TL法和UL法,CR法具有以下2个突出优点^[3-6]:①各种先进线性单元利用CR法很方便计入几何非线性,无需额外考虑建立线性单元时所采用的各种假设条件;②几何非线性与材料非线性在CR非线性单元中相互独立,只需单独计入而无需考虑两者之间的耦合。工程结构中的非线性问题绝大部分都属于大转动、小应变范围^[7],因此基于CR法研究各种非线性单元对促进工程结构非线性分析有积极的意义,对此诸多学者开展了研究。文献[8]将共旋坐标系原点选在单元左节点,基于CR法与场一致性原则导出了平面梁

单元发生大转动、小应变时的非对称单元切线刚度矩阵;借鉴文献[8]~文献[10]进行了梁端带刚臂以及在局部坐标系(共旋坐标系)内采用稳定函数来精确考虑单元梁柱效应影响的研究,文献[11]、文献[12]则将此方法拓展到平面四边形单元几何非线性以及几何与材料双非线性的研究。应当指出的是,上述文献[8]~文献[12]都是将共旋坐标系原点建立在节点,基于场一致性^[11]原则导出不对称的单元切线刚度矩阵,显然将共旋坐标系原点建立在单元节点上还会带来节点轮换性问题^[13]。已有研究认为,在现有的CR法有限元公式中,单元切线刚度矩阵不能直接从计算能量泛函(如应变能、Hellinger-Reissner混合泛函等)对节点变量的二阶微分得到,而必须借助于由转角增量形成的旋转矩阵来实现是导致其不对称的主要原因^[2,14],这一单元切线刚度矩阵不对称的现象在CR法非线性壳单元中同样存在^[15-16]。

基于此,本文在学习上述研究文献的基础上,通过合理选择平面梁单元共旋坐标系的原点及坐标轴方向,利用虚功原理及所谓的几何一致性,推导出几

何非线性平面梁单元切线刚度矩阵(很容易发现该切线刚度矩阵完全对称),建立相应的节点抗力算法,结合非线性方程组求解中采用荷载增量法和位移增量法分析时具有统一迭代格式的算法^[17],开发相应的计算程序,用梁端受弯矩的悬臂梁和William肘式框架进行验证,本文推导出的单元切线刚度矩阵对称因而结构整体刚度矩阵也对称,相对于不对称整体刚度矩阵而言,本文方法能显著改善内存分配和提高非线性计算效率。

1 CR 法有限元列式

1.1 基本图式

图 1 为变形前、后的平面梁单元,其中:XY 为固定不变的结构坐标系; xy 为随单元平移和转动的共旋坐标系;原点 C 位于梁单元左右节点坐标的平均值处; x 轴设在由节点 i 指向 j 的连线方向; y 轴则由 x 轴逆时针方向旋转 90° 形成; u_i 、 v_i 、 θ_i 分别为 i 点的水平、竖向、转角位移。

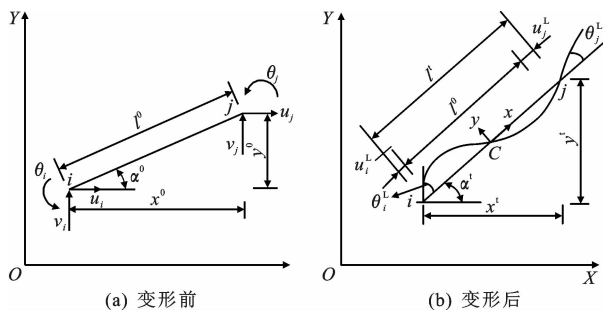


图 1 变形前后平面梁单元

Fig. 1 Plane beam element before and after deformation

1.2 平面梁单元的切线刚度 and 抗力矩阵

用 $\mathbf{d} = [u_i \ v_i \ \theta_i \ u_j \ v_j \ \theta_j]^T$ 和 $[u_i^1 \ v_i^1 \ \theta_i^1 \ u_j^1 \ v_j^1 \ \theta_j^1]^T$ 分别表示变形后单元在结构坐标系和共旋坐标系下的节点位移向量,对照图 1 显然有

$$\begin{cases} v_i^1 = v_j^1 = 0 \\ u_i^1 = -u_j^1 = -(l^1 - l^0)/2 \\ \theta_i^1 = \theta_i - (\alpha^1 - \alpha^0) \\ \theta_j^1 = \theta_j - (\alpha^1 - \alpha^0) \end{cases} \quad (1)$$

式中: l^0 、 l^1 分别为平面梁单元在变形前、后的长度; α^0 、 α^1 分别为平面梁单元在变形前、后 x 轴与结构坐标系 X 轴的夹角。

x^0 和 y^0 分别为单元初始状态时的长度在结构坐标系下水平及竖向的分量,则有

$$\begin{cases} l^0 = \sqrt{(x^0)^2 + (y^0)^2} \\ l^1 = \sqrt{(x^0 + u_j - u_i)^2 + (y^0 + v_j - v_i)^2} \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \alpha^0 = \arctan\left(\frac{y^0}{x^0}\right) \\ \alpha^1 = \arctan\left(\frac{y^0 + v_j - v_i}{x^0 + u_j - u_i}\right) \end{cases} \quad (3)$$

按照式(3)求解显然有 α^0 、 α^1 绝对值需小于 $\pi/2$ 的限制,这对求解大转动问题造成很不利的影响,由于准确求出 θ_i^1 、 θ_j^1 而非 α^0 、 α^1 是求解大转动问题的关键,参照文献[18]可做如下改进:由式(1)中 θ_i^1 、 θ_j^1 的计算式可得

$$\begin{cases} \sin(\theta_i^1) = \sin((\theta_i) - (\alpha^1 - \alpha^0)) = \\ \sin(\theta_i) \cos(\alpha^1) - \cos(\theta_i) \sin(\alpha^1) \\ \cos(\theta_i^1) = \cos((\theta_i) - (\alpha^1 - \alpha^0)) = \\ \cos(\theta_i) \cos(\alpha^1) + \sin(\theta_i) \sin(\alpha^1) \end{cases} \quad (4)$$

可得

$$\theta_i^1 = \arctan\left(\frac{\sin(\theta_i) \cos(\alpha^1) - \cos(\theta_i) \sin(\alpha^1)}{\cos(\theta_i) \cos(\alpha^1) + \sin(\theta_i) \sin(\alpha^1)}\right) \quad (5)$$

式中: $\theta_i = \theta_i + \alpha^0$ 。

同理可得到 θ_j^1 的计算式,有

$$\theta_j^1 = \arctan\left(\frac{\sin(\theta_j) \cos(\alpha^1) - \cos(\theta_j) \sin(\alpha^1)}{\cos(\theta_j) \cos(\alpha^1) + \sin(\theta_j) \sin(\alpha^1)}\right) \quad (6)$$

式中: $\theta_j = \theta_j + \alpha^0$ 。

一般而言,发生大位移、大转角的梁单元在扣除刚体转动后的转角绝对值不可能超过 $\pi/2$,因此采用式(5)、式(6)来计算 θ_i^1 、 θ_j^1 可容许平面梁单元发生任意大的转角。

设单元在共旋坐标系中的非零节点位移向量为 $\mathbf{d}^1 = [u_i^1 \ \theta_i^1 \ u_j^1 \ \theta_j^1]^T$,微分式(1)且联立式(2),可将共旋坐标系下位移微分 $\delta \mathbf{d}^1 = [\delta u_i^1 \ \delta \theta_i^1 \ \delta u_j^1 \ \delta \theta_j^1]^T$ 用结构坐标系下位移微分 $\delta \mathbf{d} = [\delta u_i \ \delta v_i \ \delta \theta_i \ u_j \ v_j \ \theta_j]^T$ 表示为

$$\delta \mathbf{d}^1 = \mathbf{B} \delta \mathbf{d} \quad (7)$$

其中

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{c_0}{2} & \frac{s_i}{2} & 0 & -\frac{c_0}{2} & -\frac{s_i}{2} & 0 \\ -\frac{s_i}{l^1} & \frac{c_0}{l^1} & 1 & \frac{s_i}{l^1} & -\frac{c_0}{l^1} & 0 \\ -\frac{c_0}{2} & -\frac{s_i}{2} & 0 & \frac{c_0}{2} & \frac{s_i}{2} & 0 \\ -\frac{s_i}{l^1} & \frac{c_0}{l^1} & 0 & \frac{s_i}{l^1} & -\frac{c_0}{l^1} & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

式中: $c_0 = \cos(\alpha^1)$; $s_i = \sin(\alpha^1)$ 。

设 $\mathbf{f}^1 = [N_i^1 \ M_i^1 \ N_j^1 \ M_j^1]^T$ 和 \mathbf{f} 分别为共旋坐标系与结构坐标系下单元的节点抗力,根据前文所述共旋坐标法的性质,有

$$\mathbf{f}^1 = \mathbf{k}_1 \mathbf{d}^1 \quad (9)$$

式中: \mathbf{k}_1 为将常规平面梁单元刚度矩阵中与 v_i^L, v_j^L 对应的 2 行、2 列元素去掉后所形成的共旋坐标系下的刚度矩阵。

由单元在共旋坐标系与结构坐标系下虚功相等的原则^[19],有

$$\delta(\mathbf{d}^L)^T \mathbf{f}^L = \delta \mathbf{d}_V^T \mathbf{f} \quad (10)$$

式中: 位移微分的下标 V 表示其为虚拟量。

联立式(8)、式(10),可得到 \mathbf{f}^L 和 \mathbf{f} 之间的关系为

$$\mathbf{f} = \mathbf{B}^T \mathbf{f}^L \quad (11)$$

微分式(11)并联立式(9),有

$$\delta \mathbf{f} = \delta \mathbf{B}^T \mathbf{f}^L + \mathbf{B}^T \mathbf{k}_1 \mathbf{B} \delta \mathbf{d} \quad (12)$$

用 \mathbf{k} 表示结构坐标系下平面梁单元的几何非线性切线刚度矩阵,显然有

$$\delta \mathbf{f} = \mathbf{k} \delta \mathbf{d} \quad (13)$$

联立式(12)、式(13),有

$$\mathbf{k} = \mathbf{B}^T \mathbf{k}_1 \mathbf{B} + \mathbf{k}_h \quad (14)$$

并且

$$\delta \mathbf{B}^T \mathbf{f}^L = \mathbf{k}_h \delta \mathbf{d} \quad (15)$$

显然,要得到初应力刚度矩阵 \mathbf{k}_h 的具体表达式,关键是求出 $\delta \mathbf{B}^T$,为便于表述,令

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2 \quad -\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_3] \quad (16)$$

联立式(15)和式(16),显然有

$$\mathbf{k}_h = \mathbf{N}_i^L \delta \mathbf{B}_1 + \mathbf{M}_i^L \delta \mathbf{B}_2 - \mathbf{N}_j^L \delta \mathbf{B}_1 + \mathbf{M}_j^L \delta \mathbf{B}_3 \quad (17)$$

为求出 $\delta \mathbf{B}_1, \delta \mathbf{B}_2$ 和 $\delta \mathbf{B}_3$,需先求出 $\delta \alpha^t$ 和 δl^t ,分别微分式(2)中的 l^t 和式(3)中的 α^t ,有

$$\begin{cases} \delta l^t = \mathbf{r}_1^T \delta \mathbf{d} \\ \delta \alpha^t = \frac{1}{l^t} \mathbf{z}^T \delta \mathbf{d} \end{cases} \quad (18)$$

式中: $\mathbf{r}_1^T = [-c_o \quad -s_i \quad 0 \quad c_o \quad s_i \quad 0]$, $\mathbf{z}^T = [s_i \quad -c_o \quad 0 \quad -s_i \quad c_o \quad 0]$ 。

$\delta \mathbf{B}_1, \delta \mathbf{B}_2$ 和 $\delta \mathbf{B}_3$ 可在联立式(18)的基础上微分式(8)求得,有

$$\begin{cases} \delta \mathbf{B}_1 = \delta \left[\frac{c_o}{2} \quad \frac{s_i}{2} \quad 0 \quad -\frac{c_o}{2} \quad -\frac{s_i}{2} \quad 0 \right]^T = \\ \quad -\frac{1}{2l^t} \mathbf{z} \mathbf{z}^T \delta \mathbf{d} \\ \delta \mathbf{B}_2 = \delta \left[-\frac{s_i}{l^t} \quad \frac{c_o}{l^t} \quad 1 \quad \frac{s_i}{l^t} \quad -\frac{c_o}{l^t} \quad 0 \right]^T = \\ \quad \frac{1}{(l^t)^2} (\mathbf{r}_1 \mathbf{z}^T + \mathbf{z} \mathbf{r}_1^T) \delta \mathbf{d} \\ \delta \mathbf{B}_3 = \delta \mathbf{B}_2^T \end{cases} \quad (19)$$

联立式(17)、式(19),可得到 \mathbf{k}_h 的具体表达式为

$$\mathbf{k}_h = \frac{(\mathbf{N}_j^L - \mathbf{N}_i^L)}{2l^t} \mathbf{z} \mathbf{z}^T +$$

$$\frac{(\mathbf{M}_i^L + \mathbf{M}_j^L)}{(l^t)^2} (\mathbf{r}_1 \mathbf{z}^T + \mathbf{z} \mathbf{r}_1^T) \quad (20)$$

2 非线性方程组求解

非线性方程组的求解一般采用增量法,且增量法一般分为荷载增量法、位移增量法以及由这 2 种基本方法衍生的各种方法^[20]。荷载增量法由于数学力学概念明确,迭代格式简单且迭代矩阵为带状,能有效计算荷载-位移曲线的上升段而常被采用;位移增量法则能有效克服荷载增量法在结构的荷载-位移曲线极值点附近不收敛的缺点,可方便计算结构荷载-位移曲线的下降段,但位移增量法应用较为复杂且破坏了结构迭代矩阵的带状性和对称性。基于此,文献[17]提出一种将只含 n 个位移变量的 \mathbf{R}^n 荷载-位移空间拓展到含 n 个位移变量和 1 个荷载因子 λ 的 \mathbf{R}^{n+1} 荷载-位移空间,从而有效实现将荷载增量法与位移增量法统一于一体的求解格式,在能充分利用 2 种方法优点的同时,又能规避它们的缺点,且能在程序计算中转换自如。考虑上述因素,本文采用此方法进行非线性方程组的求解。

描述结构平衡路径的非线性方程组为

$$\mathbf{R}(\mathbf{u}) = \mathbf{P}_0 + \lambda \mathbf{P}_t \quad (21)$$

式中: 位移因子 $\mathbf{u} = [u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u^n]^T$, $\mathbf{R}, \mathbf{P}_0, \mathbf{P}_t$ 和 λ 的详细含义见文献[17]。

式(21)可理解为空间 \mathbf{R}^n 中的一条曲线,该曲线是在某特定加载路径 $\mathbf{P}_0 + \lambda \mathbf{P}_t$ 下由位移 $\mathbf{u} = [u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_n]^T$ 构成;也可理解为空间 \mathbf{R}^{n+1} 中由式(21)构成的曲面 1 和式(22)构成的约束曲面 2 相贯而成的交线,该空间由荷载因子 λ 和位移 $\mathbf{u} = [u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_n]^T$ 构成,有

$$f(\mathbf{u}, \lambda) = f_0(\mathbf{u}', \lambda') \quad (22)$$

式中: \mathbf{u}' 和 λ' 分别为当前时刻 t 的位移和荷载因子。

在时刻 t 的 $f_0(\mathbf{u}', \lambda')$ 给定情况下,可通过式(21)、式(22)的 Newton-Raphson 迭代格式求出解空间 \mathbf{R}^{n+1} 中的当前点,有

$$\begin{bmatrix} \frac{\mathbf{D}\mathbf{R}(\mathbf{u}^m)}{\mathbf{D}\mathbf{u}} & -\mathbf{P}_t \\ \frac{\mathbf{D}f(\mathbf{u}^m, \lambda^m)}{\mathbf{D}\mathbf{u}} & \frac{\partial f(\mathbf{u}^m, \lambda^m)}{\partial \lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}^{m+1} \\ \Delta \lambda^{m+1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{R}(\mathbf{u}^m) - \mathbf{P}_0 - \lambda^m \mathbf{P}_t \\ f(\mathbf{u}^m, \lambda^m) - f_0(\mathbf{u}', \lambda') \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\begin{cases} \mathbf{u}^{m+1} = \mathbf{u}^m + \Delta \mathbf{u}^{m+1} \\ \lambda^{m+1} = \lambda^m + \Delta \lambda^{m+1} \end{cases} \quad (24)$$

式中: $\frac{DR(u^m)}{Du}$ 表示对向量列阵求偏导, 得到结构切线刚度矩阵 $K_T^m = \frac{DR(u^m)}{Du}$, 其余可类推, $m=0, 1, 2, \dots, n$ 。

在采用荷载增量法和位移增量法求解时, 约束方程[式(22)]分别表示为

$$\lambda = \lambda^t \quad (25)$$

$$u_{i_1} = u_{i_1}^t \quad (26)$$

式(26)表示强制第 i_1 个自由度的位移 u_{i_1} 与给定位移值 $u_{i_1}^t$ 在迭代过程中始终相等。

分别考虑式(25)、式(26), 可得到式(23)中 $\frac{Df(u^m, \lambda^m)}{Du}$ 、 $\frac{\partial f(u^m, \lambda^m)}{\partial \lambda}$ 分别在荷载增量法和位移增量法下的具体值。

至此, 可得到荷载增量法和位移增量法的统一迭代格式, 有

$$\begin{bmatrix} K_T^m & -P_t \\ \dots & \\ V_i \end{bmatrix} \Delta r^{m+1} = \begin{bmatrix} R(r^m) - P_0 - r_{n+1}^m P_t \\ r_i^m - r_i^t \end{bmatrix} \quad (27)$$

式中: $r = [u^T \lambda]^T$; $r^{m+1} = r^m + \Delta r^{m+1}$ 。

式(27)中: V_i 为含 $n+1$ 个元素的行向量, $n+1$ 个元素分别为 n 个 0 和 1 个 1, 当元素 1 位于第 $n+1$ 列位置时对应荷载增量法, 而当其位于前面 n 列任一位置时对应位移增量法, 具体求解时只需指定元素 1 的位置就可实现荷载增量法和位移增量法之间的自如选择。同时, 由于 K_T^m 是对称带状的, 式(27)(其中: “*” 表示 K_T^m 中原有的元素; “·” 表示由于采用位移法解方程而需调整的元素。)最左边的矩阵形式如下

$$\begin{bmatrix} * & * & * & & & & & & & & * \\ * & * & * & * & & & & & & & * \\ * & * & * & * & * & & & & & & * \\ & * & * & * & * & * & & & & & * \\ & & * & * & * & * & * & & & & * \\ & & & * & * & * & * & * & & & * \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & * \\ & & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & & & & * & * & * & * & * \\ & & & & & & & * & * & * & * & * \\ & & & & & & & & * & * & * & * & * \\ & & & & & & & & & * & * & * & * \\ & & & & & & & & & & * & * & * & * \\ * & * & * & * & \cdot & \cdot & \cdot & * & * & * & * & * & * & * \end{bmatrix} \cdot$$

可知, 在对第 $n+1$ 列和第 $n+1$ 行稍作修改后, 同样可以按大型带状稀疏矩阵来进行非线性方程组的求解。

3 算例分析

采用梁端受弯矩的大变形悬臂梁和 William 肘式框架来验证本文方法及研制程序, 为方便比较, 2 个算例中的参数及计算结果均采用量纲为 1 的描述; 同时, 为使比较更有意义, 用 ANSYS 程序计算时, 结构划分单元网格与用本文方法计算时划分单元网格完全相同。

算例 1: 如图 2 所示悬臂梁, 弯矩 M 作用在自由端, 梁长 $L=100$ m、抗弯刚度 $EI=3.5 \times 10^4$ kN·m²、 u, v, θ 分别为梁自由端的水平、竖向及转角位移, 在解析解^[21]中 M 与 θ 的关系为 $\theta = ML/EI$ 。

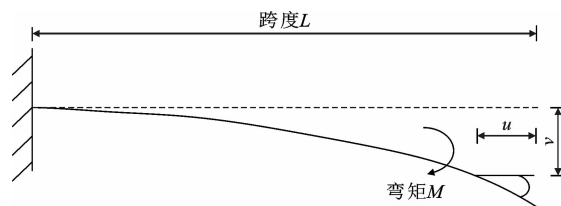


图 2 端部承受弯矩的悬臂梁

Fig. 2 Cantilever subjected to bending moment at free end

本文计算中取 $M = \frac{EI}{L} 2\pi = 2\,199$ kN·m, 将梁等分成 20 个单元, 采用荷载增量法, 分成 10 级均匀加载, 显然对应第 2、4、6、8 和 10 级加载时 θ 的解析值应为 $0.4\pi, 0.8\pi, 1.2\pi, 1.6\pi$ 和 2π , 程序计算值分别为 $0.399\,979\,02\pi, 0.799\,958\,12\pi, 1.199\,937\,1\pi, 1.599\,916\,3\pi$ 和 $1.999\,895\,4\pi$, 程序计算值与解析解的差值可忽略不计。图 3~图 5 分别为上述弯矩值作用下用本文方法计算出的梁的构型以及梁端水平与竖向位移, 作为比较, 也列出对应的解析解以及用 ANSYS 程序计算得到的解。由图 3~图 5 可看出结果均吻合良好。

算例 2: 如图 6 所示两端嵌固的肘式框架, William^[22]对其进行了试验和非线性分析, 作为一个典型非线性考题, Wood、Yang、Papadrakakis、Chan、Meek 等众多研究者, 均用该算例检验过各自的理论和算法。该肘式框架截面为矩形, 宽和高分别为 19.1 和 6.71 mm, 材料的弹性模量为 71 000 MPa。将框架每根杆件均匀划分成 10 个单元, 采用位移增量法求解, 荷载作用点处荷载 P 与挠度 Δ 的关系如图 7 所示。由图 7 可以看出: 本文方法计算结果与 William 的试验结果、计算结果以及 ANSYS 计算结

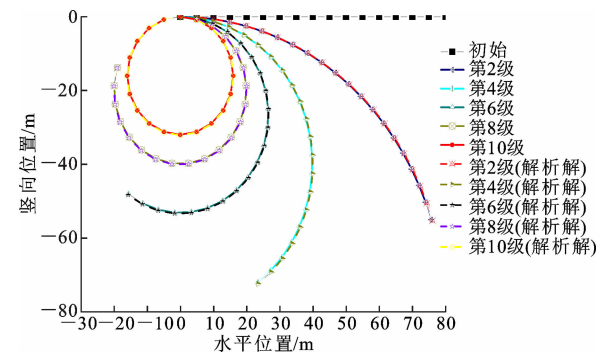


图 3 弯矩作用下梁的构型(解析解与本文方法)
Fig. 3 Beam configuration under bending moment
(analytical and proposed method)

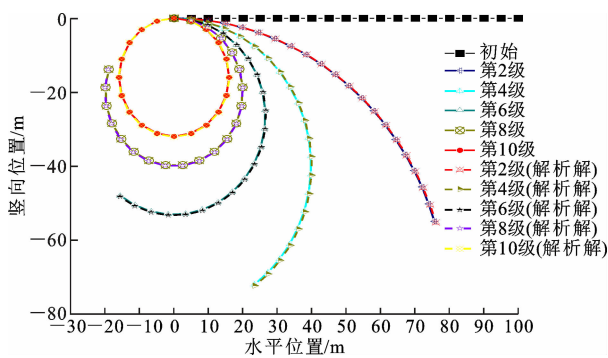


图 4 弯矩作用下梁的构型(ANSYS 与本文方法)
Fig. 4 Beam configuration under bending moment
(ANSYS and proposed method)

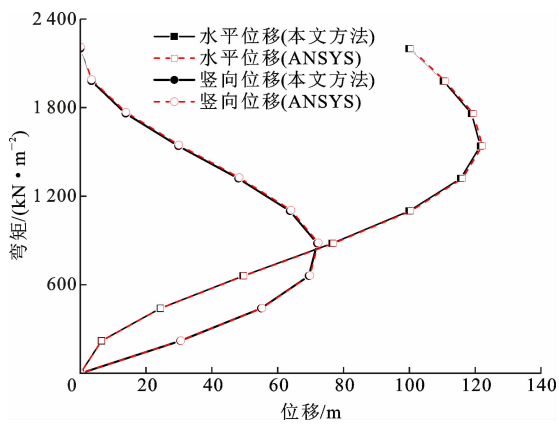


图 5 自由端弯矩-位移曲线
Fig. 5 Free end bending moment-displacement curves

果基本一致。

算例 3:荆岳长江公路大桥南汊深泓主桥为双塔不对称平行双索面混合梁斜拉桥,跨径布置为 $(100+298)+816+(80+75+75)=1\,444\text{ m}$,该桥详细设计参数可见文献[23],采用 ANSYS 对该桥建立图 8 所示的有限元模型,对于斜拉索,采用 Link1 单元,主梁与塔分别用 ANSYS 自带的 Beam3 梁单元以及本文推导的平面梁单元模拟,其中后者借助

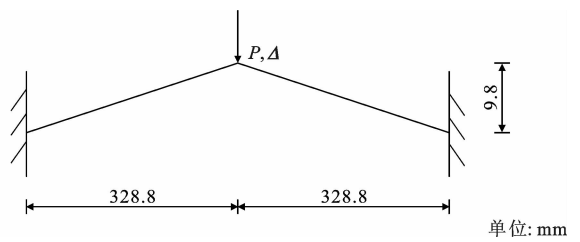


图 6 William 肘式框架
Fig. 6 William's toggle frame

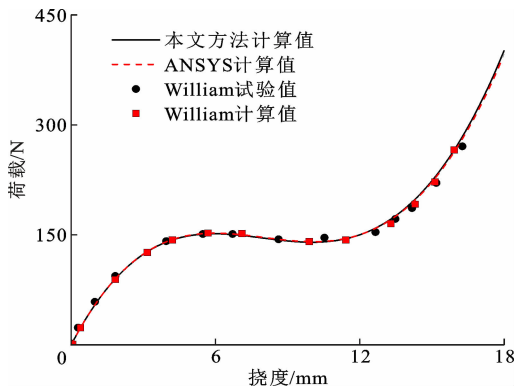


图 7 荷载-挠度曲线
Fig. 7 Load-deflection curves

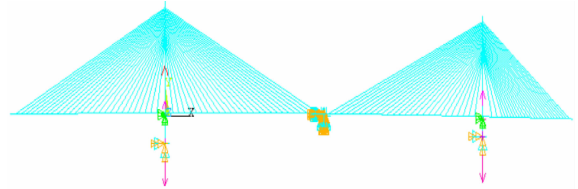


图 8 有限元模型
Fig. 8 Finite element model

ANSYS 程序的二次开发功能完成^[24],分析中打开大变形开关考虑几何非线性。

荆岳大桥采用悬臂施工方法,利用 ANSYS 生死单元功能进行分阶段施工仿真模拟,共划分为 28 个施工工况,图 9 为基于 2 种单元得到的成桥状态下不计混凝土收缩徐变时沿桥纵向的主梁竖向位移。由图 9 可知两者吻合良好。

4 结 语

(1)本文建立的几何非线性 CR 平面梁单元,由于具有对称切线刚度矩阵,相对于已有研究得到的不对称切线刚度矩阵梁单元而言,它在计算机内存分配和计算效率上占优势。

(2)算例表明,本文建立的几何非线性梁单元与能将荷载增量法与位移增量法统一于一体的非线性方程组求解方法相结合,不仅能获得高精度的数值解,还能在荷载增量法与位移增量法之间自由转换

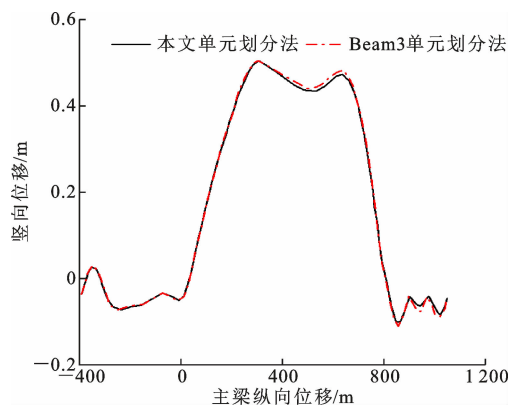


图9 主梁竖向位移

Fig. 9 Vertical displacements of main girder

顺利通过荷载-位移曲线的极值点。

(3) 如果利用本文方法考虑几何非线性,在共旋坐标系下引入非线性的材料本构关系以考虑材料非线性,能方便地将本文方法拓展到梁的几何与材料双非线性分析研究中,这也是下一步研究的方向。

参考文献:

References:

- [1] 杜 轲,滕 楠,孙景江,等. 基于共旋坐标和力插值纤维单元的 RC 框架结构连续倒塌构造方法[J]. 工程力学,2019,36(3):95-104.
DU Ke, TENG Nan, SUN Jing-jiang, et al. A progressive collapse analytical model of RC frame structures based on corotational formulation for force-based fiber elements[J]. Engineering Mechanics, 2019, 36(3): 95-104.
- [2] FELIPPA C A, HAUGEN B. A unified formulation of small-strain corotational finite elements: I. Theory [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2005, 194(21/22/23/24): 2285-2335.
- [3] WU T H, LIU Z Y, HONG J Z. A recursive formulation based on corotational frame for flexible planar beams with large displacement[J]. Journal of Central South University, 2018, 25(1): 208-217.
- [4] RANKIN C C, NOUR-OMID B. The use of projectors to improve finite element performance[J]. Computers & Structures, 1988, 30(1/2): 257-267.
- [5] 冯晓东,罗尧治,丁 毅,等. 基于共旋坐标法的张拉整体结构弹塑性静力分析[J]. 华南理工大学学报(自然科学版),2019,47(11):122-129.
FENG Xiao-dong, LUO Yao-zhi, DING Yi, et al. Static elasto-plastic analysis of tensegrity structures based on co-rotational formulation [J]. Journal of South China University of Technology (Natural Science Edition), 2019, 47(11): 122-129.
- [6] 李忠学,胡万波. 用于光滑/非光滑壳的稳定化新型协同转动 4 节点四边形壳单元[J]. 工程力学,2020,37(9):18-29.
LI Zhong-xue, HU Wan-bo. A stabilized four-node corotational quadrilateral shell element for smooth and non-smooth shell structures[J]. Engineering Mechanics, 2020, 37(9): 18-29.
- [7] 何君毅,林祥都. 工程结构非线性问题的数值解法[M]. 北京:国防工业出版社,1994.
HE Jun-yi, LIN Xiang-du. Numerical solution of nonlinear problems of engineering structures [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 1994.
- [8] 蔡松柏,沈蒲生. 大转动平面梁有限元分析的共旋坐标法[J]. 工程力学,2006,23(增 1):69-72,68.
CAI Song-bai, SHEN Pu-sheng. Co-rotational procedure for finite element analysis of plane beam under large rotational displacement [J]. Engineering Mechanics, 2006, 23(S1): 69-72, 68.
- [9] 邓继华,邵旭东. 基于共旋坐标法的带刚臂平面梁元非线性分析[J]. 工程力学,2012,29(11):143-151.
DENG Ji-hua, SHAO Xu-dong. Co-rotational formulation for nonlinear analysis of plane beam element with rigid arms[J]. Engineering Mechanics, 2012, 29(11): 143-151.
- [10] 邓继华,谭建平,谭 平,等. 基于共旋法与稳定函数的几何非线性平面梁单元[J]. 工程力学,2020,37(11):28-35.
DENG Ji-hua, TAN Jian-ping, TAN Ping, et al. A geometric nonlinear plane beam element based on corotational formulation and on stability functions[J]. Engineering Mechanics, 2020, 37(11): 28-35.
- [11] 蔡松柏,沈蒲生,胡柏学,等. 基于场一致性的 2D 四边形单元的共旋坐标法[J]. 工程力学,2009,26(12):31-34.
CAI Song-bai, SHEN Pu-sheng, HU Bai-xue, et al. A field consistency based co-rotational finite element procedure for 2D quadrilateral element[J]. Engineering Mechanics, 2009, 26(12): 31-34.
- [12] 胡柏学,邓继华,谢海秋,等. 双非线性四边形平面应力单元分析石拱桥的极限承载力[J]. 湖南科技大学学报(自然科学版),2007,22(3):76-80.
HU Bo-xue, DENG Ji-hua, XIE Hai-qiu, et al. Geometrical and material nonlinear quadrilateral plane

- stress element for ultimate bearing capacity of stone bridges[J]. Journal of Hunan University of Science & Technology (Natural Science Edition), 2007, 22(3): 76-80.
- [13] BATTINI J M. Co-rotational beam elements in instability problems[D]. Stockholm: Royal Institute of Technology, 2002.
- [14] 李忠学,刘永方,徐 晋,等. 稳定化的新型协同转动四边形曲壳单元[J]. 工程力学, 2010, 27(9): 27-34.
LI Zhong-xue, LIU Yong-fang, XU Jin, et al. A stabilized co-rotational curved quadrilateral shell element [J]. Engineering Mechanics, 2010, 27(9): 27-34.
- [15] STOLARSKI H, BELYTSCHKO T, LEE S H. Review of shell finite elements and corotational theories [J]. Computational Mechanics Advances, 1995, 2: 125-212.
- [16] YANG H T Y, SAIGAL S, MASUD A. Survey of recent shell finite elements[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2000, 47: 101-127.
- [17] 邵旭东,蔡松柏,沈蒲生,等. NFEM 中荷载增量法和位移增量法的统一迭代格式[C]//中国力学学会. 中国计算力学大会 2003'论文集:工程与科学中的计算力学(上). 北京:中国力学学会, 2003: 244-247.
SHAO Xu-dong, CAI Song-bai, SHEN Pu-sheng, et al. A unified iteration scheme for load/displacement incremental method of nonlinear FEM [C]//Chinese Society of Mechanics. Proceedings of China National Computational Mechanics Conference 2003; Computational Mechanics in Engineering and Science. Beijing: Chinese Society of Mechanics, 2003: 244-247.
- [18] DE SOUZA R M. Force-based finite element for large displacement inelastic analysis of frames[D]. Berkeley: University of California, 2000.
- [19] DE BORST R, CRISFIELD M A. Non-linear finite element analysis of solids and structures[M]. 2nd ed. Hoboken: Wiley, 2012.
- [20] 吕西林. 钢筋混凝土结构非线性有限元理论与应用[M]. 上海:同济大学出版社, 1997.
LU Xi-lin. Nonlinear finite element theory and application of reinforced concrete structure[M]. Shanghai: Tongji University Press, 1997.
- [21] FRISCH-FAY R. Flexible bars[M]. Washington DC: Butterworths, 1962.
- [22] WILLIAMS F W. An approach to the non-linear behaviour of the members of a rigid jointed plane framework with finite deflections[J]. The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, 1964, 17(4): 451-469.
- [23] 卢 柯,杨建龙,丁望星. 荆岳长江公路大桥主桥主梁计算研究[J]. 交通科技, 2009(5): 7-9.
LU Ke, YANG Jian-long, DING Wang-xing. Study on calculation of main girder of Jingyue Yangtze River Highway Bridge[J]. Transportation Science & Technology, 2009(5): 7-9.
- [24] 邓继华,张孝振,许斌林,等. 基于 ANSYS 二次开发的几何非线性平面梁单元[J]. 应用力学学报, 2021, 38(3): 1161-1168.
DENG Ji-hua, ZHANG Xiao-zhen, XU Bin-lin, et al. A geometric nonlinear plane beam element based on secondary development of ANSYS[J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2021, 38(3): 1161-1168.