

文章编号:1671-8879(2017)04-0112-07

# 集中荷载作用下弹性支撑浅拱屈曲特性求解

潘 权,易壮鹏,曾有艺,颜东煌

(长沙理工大学 土木与建筑学院,湖南 长沙 410114)

**摘 要:**为了找到一种针对任意荷载作用下任意拱轴线弹性支撑拱的非线性稳定性研究方法,对集中荷载作用下任意轴线两端竖向弹性支撑浅拱的面内屈曲特性开展研究,推导了量纲一化的非线性平衡方程,并通过算例分析了屈曲路径和临界荷载的分布特点,并将其结果与有限元解进行了对比验证。推导过程中采用具有相同弹性支撑梁的屈曲模态作为形函数,不截断地展开拱轴线、外部荷载和结构位移,得到基本平衡状态以及极值点屈曲、分岔屈曲的平衡方程;建立了外荷载、结构位移与结构内力之间的对应关系,进而得到 2 种屈曲形式的平衡路径和临界荷载;分析了弹性刚度参数对 2 种屈曲条件下平衡路径与极限荷载分布规律的影响。研究表明:采用给出的方法计算的结果与有限元解吻合良好,可以追踪结构发生屈曲的全过程;极值点屈曲和分岔屈曲同时存在,当弹性支撑参数由对称变为不对称时,极值点屈曲路径在特定位置分成基本路径和独立的分离路径,某些位置的分岔屈曲路径变成极值点屈曲路径,并伴随相应临界荷载点的出现和消失;临界荷载仅在量纲一的弹性约束参数较小时随之发生变化,当约束刚度增至一定程度时临界荷载不再随约束刚度的变化而改变。推导的集中荷载下任意拱轴线形竖向弹性支撑浅拱面内屈曲求解公式,可为最终实现任意荷载下任意轴线弹性支撑拱非线性稳定性的解析求解提供参考。

**关键词:**桥梁工程;浅拱;竖向弹性支撑;非线性稳定;平衡路径;临界荷载

**中图分类号:**U441.2

**文献标志码:**A

## Solving of buckling characteristic of elastically supported shallow arch under concentrated load

PAN Quan, YI Zhuang-peng, ZENG You-yi, YAN Dong-huang

(School of Civil Engineering and Architecture, Changsha University of Science and Technology, Changsha 410114, Hunan, China)

**Abstract:** To find a research method that can solve the nonlinear stability of elastically supported arch with arbitrary arch axis under arbitrary load, the buckling characteristics of a planar shallow arch with vertical elastic supports at both ends of an arbitrary axis under a concentrated load were investigated in this research. The nonlinear equilibrium equations of dimensional normalization were derived and the distribution characteristics of buckling paths and critical loads were studied by an example. The analytical results were compared and validated with the finite element analysis results. The buckling modes of the beam, which has the same elastic supports as shallow

收稿日期:2017-03-10

基金项目:国家自然科学基金项目(51678069,51678071);长沙理工大学土木工程重点学科基金项目(15ZDXK01);

长沙理工大学桥梁工程安全控制省部共建教育部重点实验室开放基金项目(15KB03)

作者简介:潘 权(1976-),男,湖南宁乡人,讲师,工学博士,E-mail:panquan605@126.com。

通讯作者:易壮鹏(1979-),男,湖南望城人,副教授,工学博士,E-mail:yizhuangpeng@163.com。

arch, were applied as shape functions to expand the arch axis, external load and structural deformation without any truncations. Then the equilibrium equations of basic equilibrium states, primary buckling and bifurcated buckling were obtained. The corresponding relationship among the external load, the structural displacement and internal force of structure was established, and the equilibrium paths and critical loads of the primary and bifurcated buckling of shallow arches were further achieved. The effects of elastic stiffness parameters on equilibrium paths and ultimate load under two kinds of buckling conditions were analyzed. The results show that these two results match well with each other, and the presented method can trace the whole buckling process of shallow arch structure. The primary buckling and bifurcated buckling exist simultaneously. When elastic supports change from symmetry to asymmetry, the primary equilibrium paths split into basic paths and independent separated paths at specific locations. Some bifurcated equilibrium paths transfer to primary one with the appearance and disappearance of corresponding critical load points. The critical loads are only sensitive to the smaller elastic constraint parameters. When constraint stiffness increases to a certain extent, the critical load will no longer change with the constraint stiffness. The solving equations for planar buckling of vertically supported shallow arch with elastic supports and arbitrary arch axis under a concentrated load deduced in this paper can eventually provide a reference to realize the analytical solution of nonlinear stability of shallow arch with elastic supports and arbitrary arch axis under arbitrary loads. 3 figs, 27 refs.

**Key words:** bridge engineering; shallow arch; vertical elastic support; nonlinear stability; equilibrium path; critical load

## 0 引言

浅拱结构在工程领域有着广泛应用,国内外学者对其理论模型和受力性能进行了深入系统的研究<sup>[1-3]</sup>。外荷载作用下浅拱有可能发生跳跃屈曲,系统存在不连续的平衡状态,这是浅拱类结构的一个重要力学特性,这方面的研究主要有浅拱在阶跃荷载<sup>[4]</sup>、正弦分布荷载<sup>[5]</sup>、集中荷载<sup>[6]</sup>、径向均布荷载<sup>[7]</sup>等作用下的稳定与屈曲特性。温度荷载作用下结构的屈曲与平衡形态也是近年来研究人员关注的一个重点<sup>[8-9]</sup>。拱轴线形是浅拱研究过程中一个非常重要的参数,已有研究关注的拱轴线形主要有正弦形轴线<sup>[4-6]</sup>、圆弧拱<sup>[7]</sup>、抛物线<sup>[9-10]</sup>等。此外,研究人员对结构存在偏离理想拱轴线的几何缺陷时的力学特性进行了特别关注,并得到一些有意义的结论<sup>[11-15]</sup>。上述研究主要针对理想铰支或固结边界条件,实际工程中存在许多弹性支撑的情况,如:系杆拱的拱脚、弹性约束机械拱臂等。国内外学者分别对其在各种弹性支撑条件下的稳定和屈曲特性进行了研究。Xu等推导了弹性约束浅拱在冲击荷载作用下动力稳定性的理论模型,并应用于变压器线圈短路的实践中<sup>[16]</sup>;Lee等推导了一端弹性约束转

动曲梁的面内自由振动模型<sup>[17]</sup>;卢鹏等对工字形截面水平和转动弹性支撑圆弧钢拱进行了参数分析,修正了已有的设计公式<sup>[18]</sup>;Han等推导了水平弹性支撑条件下浅拱的非线性屈曲分析理论模型<sup>[19]</sup>;Atai等推导了变截面弹性支撑拱的一种新理论模型,并对极限荷载进行了分析<sup>[20]</sup>;Pi等针对各类对称与非对称弹性约束圆弧浅拱的非线性屈曲特性进行了一系列研究,得到了一些外荷载下结构内力、变形和外荷载之间的变化关系<sup>[21-23]</sup>;曾有艺等采用变分原理研究了集中荷载作用下弹性约束圆弧拱的面内屈曲特性<sup>[24]</sup>。同时,弹性约束条件下浅拱的内共振、分岔等非线性动力特性也受到了广泛的关注。Lacarbonara等推导了一端转动弹性约束浅拱发生1:1内共振时的平均方程,并分析了非线性响应的分布规律<sup>[25]</sup>;Zhou等推导了参强激励下拱结构的动力学方程,得到了全局分岔时的混沌行为<sup>[26]</sup>;Yi等推导了一端竖向或转动弹性约束浅拱发生2:1内共振时的非线性模态计算方法<sup>[27]</sup>。因此,在已有文献的基础上找到一种研究任意轴线弹性支撑浅拱非线性稳定性的方法,具有重要的理论意义和应用价值。

为此,本文以集中荷载作用下任意轴线竖向弹

性支撑浅拱的稳定性和屈曲荷载为例,通过弹性支撑梁的模态展开外荷载、拱轴线和位移,得到极值点屈曲、分岔屈曲的平衡路径和极限荷载,并分析了弹性约束参数的影响,最后将理论结果与有限元结果进行了对比验证。

## 1 基本力学模型

竖向弹性支撑浅拱如图 1 所示。图 1 中,直角坐标系  $xOy$  内所示为两端竖向弹性支撑的浅拱, $l$  为跨径, $S_1$ 、 $S_2$  为两端弹簧刚度, $y_0(x)$  为初始拱轴线形, $y(x)$  为集中荷载  $Q$  作用下的竖向位移。引入浅拱基本假定后结构平衡状态的量纲一化微分方程为<sup>[4,23,25]</sup>

$$u''' - u_0''' + pu'' - q = 0 \quad (1)$$

式中: $u$ 、 $u_0$ 、 $p$ 、 $q$  分别为量纲一的位移、初始线形、轴向压力和外荷载。

其对应的边界条件为

$$\begin{cases} \xi=0 & u'' - u_0'' + s_1 u = 0, u' - u_0' = 0 \\ \xi=\pi & u'' - u_0'' - s_2 u = 0, u' - u_0' = 0 \end{cases} \quad (2)$$

式中: $\xi$  为量纲一的水平坐标轴; $s_1$ 、 $s_2$  为量纲一的竖向弹性刚度。

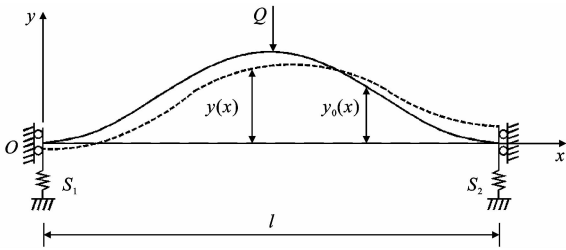


图 1 竖向弹性支撑浅拱

Fig. 1 Shallow arch with vertical elastic supports  
对量纲进行归一化处理时引入的变量为

$$u = \frac{y}{r}, u_0 = \frac{y_0}{r}, \xi = \frac{x\pi}{l},$$

$$s_1 = \frac{S_1 l^3}{\pi^3 EI}, s_2 = \frac{S_2 l^3}{\pi^3 EI}, q = \frac{Q l^3}{\pi^3 EI r}$$

式中: $E$  为弹性模量; $r$  为截面的转动半径, $r = \sqrt{I/A}$ , $I$  为截面惯性矩, $A$  为截面面积。

将初始线形、位移和外荷载分别展开,有

$$\begin{cases} u_0 = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n Y_n(\xi) \\ u = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n Y_n(\xi) \\ q = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\alpha_n} q_n Y_n''(\xi) \end{cases} \quad (3)$$

式中: $\beta_n$ 、 $\alpha_n$ 、 $q_n$  分别为量纲一的初始线形系数、变形

系数和外荷载系数; $Y_n(\xi)$  为用于展开的形函数。

外荷载分解采用  $Y_n(\xi)$  的两阶导数是为了利用正交性得到解的一般形式。为获取集中荷载作用下竖向弹性支撑浅拱的解,同时满足弹性约束边界和正交性条件的要求,与文献[16]类似, $Y_n(\xi)$  选取与浅拱相同边界、跨径和材料参数的梁的屈曲模态,其求解的微分方程和对应边界条件为

$$Y_n'''(\xi) + k^2 Y_n''(\xi) = 0 \quad (4)$$

$$\begin{cases} \xi=0 & Y_n''(\xi) + s_1 Y_n(\xi) = 0, Y_n'(\xi) = 0 \\ \xi=\pi & Y_n''(\xi) - s_2 Y_n(\xi) = 0, Y_n'(\xi) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

式中: $k$  为结构的量纲一化刚度参数。

求解式(4)、式(5)可得各阶形函数  $Y_n(\xi)$  的表达式,根据正交性和标准化条件有

$$\begin{cases} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi Y_n(\xi) Y_m'''(\xi) d\xi = \delta_{mn} \\ \frac{2}{\pi} \int_0^\pi Y_n'(\xi) Y_m'(\xi) d\xi = a_n \delta_{mn} \\ \frac{2}{\pi} \int_0^\pi Y_n(\xi) Y_m''(\xi) d\xi = -a_n \delta_{mn} \end{cases} \quad (6)$$

式中: $\delta_{mn}$  为 Kronecker delta 函数符号( $m, n = 1, 2, 3, \dots$ ); $a_n$  为形函数的正交系数。

将式(3)中各项代入式(1),并利用正交性条件可得求解方程

$$\alpha_n - \beta_n - a_n \alpha_n p - q_n = 0 \quad (7)$$

轴向压力  $p$  的计算公式为

$$p = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (\beta_n^2 - \alpha_n^2)$$

## 2 非线性稳定与平衡状态

浅拱在外荷载作用下有极值点屈曲和分岔屈曲 2 种失稳形式<sup>[14]</sup>,本文追踪这 2 种屈曲在整个荷载作用过程中的内力、位移状态,并获取极限荷载。

### 2.1 基本平衡状态与屈曲荷载

跨中集中荷载  $q$  可表示为

$$q = -\frac{\pi}{2} \lambda \delta(\xi - \frac{\pi}{2}) \quad (8)$$

式中: $\lambda$  为荷载参数; $\delta(\cdot)$  为 Dirac delta 函数。

展开后外荷载系数可写成  $q_n = -\lambda b_n$ , 其中  $b_n$  为荷载系数。变形系数  $\alpha_n$  具有如下形式

$$\alpha_n = \frac{\beta_n - \lambda b_n}{1 - a_n p} \quad (9)$$

将式(9)代入式(7),可得到关于荷载参数  $\lambda$  的二次方程为

$$A_1 \lambda^2 + B_1 \lambda + C_1 = 0 \quad (10)$$

其中,系数  $A_1$ 、 $B_1$ 、 $C_1$  的表达式为

$$A_1 = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n b_n^2}{(1-a_n p)^2}, B_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2a_n b_n \beta_n}{(1-a_n p)^2},$$

$$C_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \beta_n^2 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n \beta_n^2}{(1-a_n p)^2} - 4p \quad (11)$$

3个系数均为 $p$ 的函数且 $B_1$ 、 $C_1$ 与浅拱的初始形状有关。将式(9)代入式(3)可得到结构的位移场,定义位移竖直向下为正。跨中集中荷载作用点的竖向位移 $\Delta u_n$ 为

$$\Delta u_n = \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n^2}{1-a_n p} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n \beta_n}{1-a_n p} + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \beta_n \quad (12)$$

求解式(10)、式(12)可得到外荷载、结构内力与结构位移之间的关系式。

浅拱结构发生极值点屈曲时,其切线刚度矩阵奇异,对式(10)中隐函数关系 $F(\lambda, p)=0$ 取 $d\lambda/dp=0$ ,可得到量纲一临界荷载 $\lambda_1$ 与对应结构参数 $p$ 的关系为

$$A_2 \lambda_1^2 + B_2 \lambda_1 + C_2 = 0 \quad (13)$$

其中,系数 $A_2$ 、 $B_2$ 、 $C_2$ 的表达式为

$$A_2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n^2 b_n^2}{(1-a_n p)^3}, B_2 = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2a_n^2 b_n \beta_n}{(1-a_n p)^3},$$

$$C_2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n^2 \beta_n^2}{(1-a_n p)^3} + 2 \quad (14)$$

$A_2$ 、 $B_2$ 为 $p$ 的函数, $B_2$ 、 $C_2$ 与初始形状有关,且有 $1-a_n p \neq 0$ 。发生极值点失稳时,极限荷载对应的内力满足式(10),通过式(10)、式(13)可求得极值点失稳的屈曲荷载。

## 2.2 分岔平衡状态与屈曲荷载

当式(9)中某些变形系数 $\alpha_j$ 与相应的结构线形系数 $\beta_j$ 、荷载系数 $b_j$ 存在如下关系时,可能会发生分岔屈曲

$$\alpha_j(1-a_j p) = \beta_j - \lambda b_j = 0 \quad (15)$$

式中: $j$ 为几种可能发生分岔屈曲的特定阶次, $j=1,2,\dots$ 。

当 $p=a_j^{-1}$ 时,存在 $\alpha_j$ 为非零,结构存在对应的模态 $Y_j(\xi)$ ,平衡状态的求解不能沿用求解极值点屈曲时的方法。此时,将式(9)中 $n \neq j$ 时的 $\alpha_n$ 及 $p=a_j^{-1}$ 代入 $p$ 的表达式,发生分岔的变形系数 $\alpha_j$ 为

$$\alpha_j = \pm \sqrt{\frac{1}{a_j} (A_1 \lambda^2 + B_1 \lambda + C_1)} \Big|_{n \neq j, p=a_j^{-1}} \quad (16)$$

再将式(9)中 $n \neq j$ 时的 $\alpha_n$ 和式(16)中的 $\alpha_j$ 代入式(3),可以得到屈曲分岔时的位移场。其中 $\Delta u_n$ 可表示为

$$\Delta u_n = \left( \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n^2}{1-a_n p} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n \beta_n}{1-a_n p} + \right.$$

$$\left. \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \beta_n - \alpha_j b_j \right) \Big|_{n \neq j, p=a_j^{-1}} \quad (17)$$

由式(17)对任意荷载、任意形状浅拱的分岔屈曲解,可发现 $\Delta u_n$ 与荷载参数 $\lambda$ 是线性关系。还可知分岔屈曲的路径与极值屈曲的路径交叉,因此分岔屈曲的临界荷载 $\lambda_b$ 可以取 $n \neq j$ 和 $p=a_j^{-1}$ 时的值,有

$$\lambda_b = \left( \frac{-B_1 \pm \sqrt{B_1^2 - 4A_1 C_1}}{2A_1} \right) \Big|_{n \neq j, p=a_j^{-1}} \quad (18)$$

分岔屈曲的平衡路径由式(17)求解,在平衡路径中外荷载、结构内力及位移具有对应关系,临界荷载通过式(18)求解。

## 3 数值验证与讨论

采用上节推导的方法分析量纲一的竖向弹性刚度参数 $s_1$ 、 $s_2$ 对平衡路径和屈曲荷载的影响。选取初始拱轴线形 $y_0 = \frac{h}{2}(1 - \cos(2\xi))$ ,其中 $h$ 为通过 $r$ 进行量纲归一化处理的矢高,取 $h=15.0$ 。采用有限元软件 ANSYS 10.0 对本文方法的理论结果进行数值验证。采用 Beam4 单元模拟拱结构, Combin14 单元模拟竖向约束刚度,其中浅拱结构的有量纲参数为:跨径 $l=600$  mm,矩形截面积 $A=1 \times 12$  mm<sup>2</sup>,弹性模量 $E=2.086 \times 10^{11}$  Pa,泊松比 $\nu=0.28$ 。量纲一解析解和有量纲数值解通过前述定义的量纲转换后进行对比。

### 3.1 弹性约束对平衡状态的影响

下页图2为 $h=15.0$ 时, $s_1=300$ , $s_2=300$ 和 $s_1=300$ , $s_2=500$ 这2种情况下竖向弹性支撑浅拱的平衡状态。图2中, $L_i$ 为极值点屈曲极限荷载点, $F_i$ 为分岔屈曲极限荷载点( $i=1,2,\dots,10$ )。

$h=15.0$ 时结构的 $p$ - $\lambda$ 曲线和 $\Delta u_n$ - $\lambda$ 曲线在 $p=1/a_i$ ( $i=1,2,3,\dots,6$ )位置须特别关注。当 $s_1=300$ , $s_2=300$ 时,由图2(a)、(b)可知,平衡路径有1条完整的极值点屈曲路径和4条分岔屈曲路径。极值点屈曲路径包含2个闭合环,曲线上有4个临界荷载点 $L_3$ 、 $L_6$ 、 $L_8$ 、 $L_9$ ,可由式(10)、式(13)求得。在 $p$ - $\lambda$ 曲线和 $\Delta u_n$ - $\lambda$ 曲线上均位于切线角度为0的局部极大极小位置。4条分岔屈曲路径分别位于 $p=1/a_i$ ( $i=2,3,4,6$ ),每条曲线两端与极值点屈曲路径交叉处均存在2个临界荷载点,记为 $F_1 \sim F_8$ 。在 $s_1=300$ , $s_2=500$ 时的不对称弹性支撑浅拱[图2(c)、(d)]中,极值点屈曲路径由基本路径和一段闭合的独立路径构成,两者在 $p=1/a_2$ 处分开,整

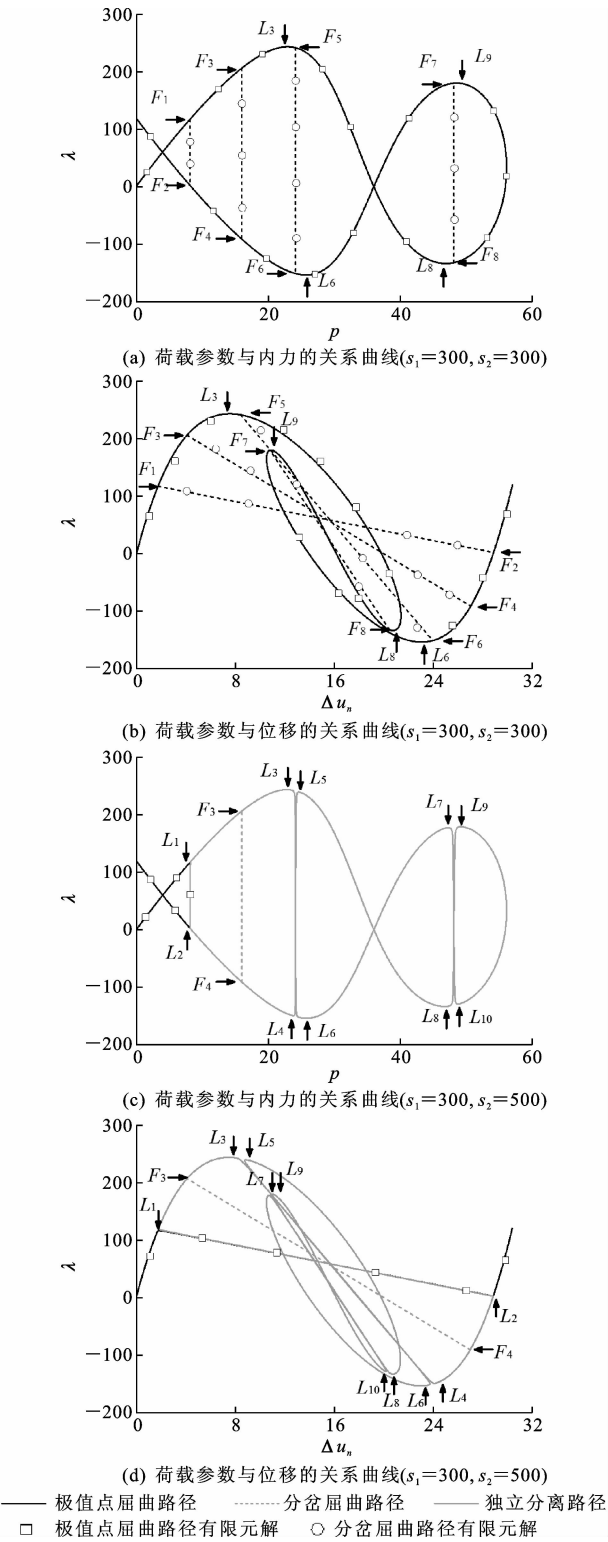


图 2  $h=15.0$  时, 竖向弹性支撑浅拱极值点屈曲、分岔屈曲的平衡状态曲线

Fig. 2 Equilibrium states of limit and bifurcated buckling of vertically supported shallow arch with  $h=15.0$

个路径上有 10 个临界荷载点, 其中 2 个在基本路径上, 8 个在独立路径上。分岔屈曲路径只在  $p=1/a_3$  处存在, 并有  $F_3$ 、 $F_4$  这 2 个临界荷载点。对比 2 种

$s_1$ 、 $s_2$  的平衡路径可以发现, 弹性边界由对称 [图 2(a)、(b)] 变为不对称 [图 2 (c)、(d)] 时: 极值点屈曲路径在  $p=1/a_2$  处分成两部分;  $p=1/a_i$  ( $i=2, 4, 6$ ) 处分岔屈曲路径变成极值点屈曲路径, 临界荷载的类型发生改变;  $p=1/a_3$  处分岔屈曲路径及临界荷载类型不发生变化。

此外, 在对称弹性边界 ( $s_1=300, s_2=300$ ) 的整个屈曲路径上和不对称弹性边界 ( $s_1=300, s_2=500$ ) 的  $p<1/a_2$  部分屈曲路径上, 本文解析解与有限元解吻合良好, 相对误差在 5% 以内。在不对称弹性边界的  $p>1/a_2$  部分, 有限元法难以得到这部分的屈曲路径, 而本文方法则可以有效地追踪发生分离 (由边界非对称引起) 的全屈曲路径。因此, 上节中极限荷载均选取本文方法得出的结果。

### 3.2 弹性约束对极限荷载的影响

为了分析弹性支撑刚度对极限荷载的影响, 下页图 3 给出了  $h=15.0$  时极限荷载  $\lambda_c$  (包括  $\lambda_1$ 、 $\lambda_b$ ) 随  $s_1$ 、 $s_2$  的变化曲线, 其中浅灰色曲线为独立于基本平衡状态的解,  $s$  为组合弹性支撑刚度参数,  $s=s_1 s_2 / (s_1 + s_2)$ 。由图 3(a) 可以看到, 在  $s_2$  变化过程中系统有 10 个极值点屈曲和 2 个分岔屈曲 ( $F_3$ 、 $F_4$ ) 的临界荷载点, 其中只有  $L_1$ 、 $L_2$  位于基本的极值点屈曲路径上。在  $s_2$  较小时各临界荷载点均随  $s_2$  发生变化, 且其绝对值均增大;  $s_2$  增至大于 300 时各临界荷载点的大小均不再发生变化, 且与  $s_2 \rightarrow +\infty$  时非常接近。值得关注的是  $s_2=s_1=300$  这一特殊位置时, 结构是对称的, 极值点屈曲临界荷载  $L_1$ 、 $L_2$ 、 $L_4$ 、 $L_5$ 、 $L_7$ 、 $L_{10}$  转变为分岔屈曲临界荷载, 对称与非对称的平衡状态如图 2 所示。图 3(b) 为  $s_1=s_2$  时临界荷载随  $s$  变化的关系, 可发现系统有 4 个极值点屈曲和 8 个分岔屈曲的临界荷载点, 其值随  $s$  的变化基本不发生改变, 各种  $s$  对应的典型平衡状态如图 2(a)、(b) 所示。

## 4 结 语

(1) 本文方法结果与有限元解吻合良好, 且可以追踪结构发生屈曲的全过程。

(2) 极值点屈曲和分岔屈曲同时存在, 当弹性支撑参数由对称变为不对称时, 极值点屈曲路径在特定位置分为基本路径和独立的分离路径, 某些位置的屈曲分岔路径变为极值点屈曲路径, 伴随相应临界荷载点的出现和消失。

(3) 弹性约束参数值较小时, 临界荷载随之发生变化; 当其增至一定程度时, 临界荷载不再随弹性约

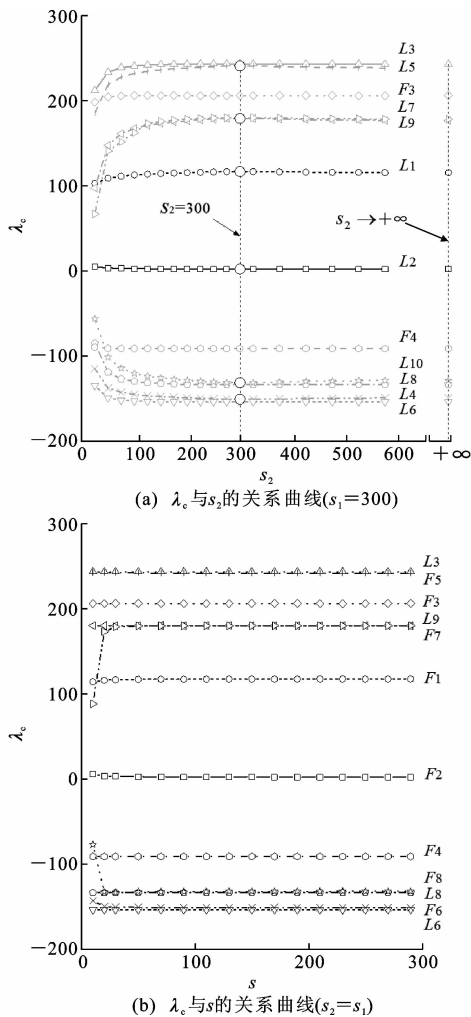


图 3 弹性支撑参数  $s_1, s_2$  对临界荷载的影响( $h=15.0$ )  
Fig.3 Effects of elastic support parameters  $s_1, s_2$  on the critical load ( $h=15.0$ )

束参数的变化而变化。

(4)本文研究了集中荷载下任意拱轴线形竖向弹性支撑浅拱的面内屈曲,为最终实现任意荷载下任意轴线弹性支撑拱的解析求解提供借鉴。但本文方法及算例所得屈曲路径为理想材料时结构的全过程曲线,与实际工程中拱结构尺寸和材料存在差别。为此,改进本文方法理论,与实际工程结合是今后研究的方向。

#### 参考文献:

#### References:

[1] 项海帆,刘光栋.拱结构的稳定与振动[M].北京:人民交通出版社,1991.  
XIANG Hai-fan, LIU Guang-dong. Stability and vibration of arch structure[M]. Beijing:China Communications Press,1991.

[2] 王钟羨,江波,孙保昌.周期激励浅拱的全局分岔

[J]. 江苏大学学报:自然科学版,2004,25(1):85-88.

WANG Zhong-xian, JIANG Bo, SUN Bao-chang. Global bifurcation of shallow arch with periodic excitation[J]. Journal of Jiangsu University: Natural Science Edition,2004,25(1):85-88.

[3] 韩强,黄怀伟,樊学军.弹性浅拱的非线性动力屈曲[J].华南理工大学学报:自然科学版,2010,38(3):1-7.

HAN Qiang, HUANG Huai-wei, FAN Xue-jun. Non-linear dynamic buckling of shallow elastic arch[J]. Journal of South China University of Technology: Natural Science Edition,2010,38(3):1-7.

[4] HSU C S. Stability of shallow arches against snap-through under timewise step loads[J]. Journal of Applied Mechanics,1968,35(1):31-39.

[5] LIN J S, CHEN J S. Dynamic snap-through of a laterally loaded arch under prescribed end motion[J]. International Journal of Solids and Structures,2003,40(18):4769-4787.

[6] CHEN J S, RO W, LIN J S. Exact static and dynamic critical loads of a sinusoidal arch under a point force at the midpoint[J]. International Journal Non-Linear Mechanics,2009,44(1):66-70.

[7] PI Y L, BRADFORD M A, UY B. In-plane stability of arches[J]. International Journal of Solids and Structures,2002,39(1):105-125.

[8] MOGHADDASIE B, STANCIULESCU I. Equilibria and stability boundaries of shallow arches under static loading in a thermal environment[J]. International Journal of Non-Linear Mechanics,2013,51:132-144.

[9] CAI Jian-guo, XU Yi-xiang, FENG Jian, et al. In-plane elastic buckling of shallow parabolic arches under an external load and temperature changes[J]. Journal Structure Engineering, 2012, 138 ( 11 ): 1300-1309.

[10] CAI Jian-guo, FENG Jian, CHEN Yao, et al. In-plane elastic stability of fixed parabolic shallow arches[J]. Science in China Series E: Technological Sciences, 2009,52(3):596-602.

[11] HSU C S. The effects of various parameters on the dynamic stability of a shallow arch[J]. Journal Applied Mechanics,1967,34(2):349-358.

[12] 席丰,杨嘉陵.考虑初始几何缺陷时复合材料层合浅拱的动态“跳跃”[J].固体力学学报,1996,17(2):172-178.

XI Feng, YANG Jia-ling. The dynamic snap-through of laminated composite shallow arches with initial geometrical imperfections[J]. Acta Mechanica Solida

- Sinica, 1996, 17(2): 172-178.
- [13] 易壮鹏, 赵跃宇, 朱克兆. 几何缺陷浅拱的动力稳定性分析[J]. 计算力学学报, 2008, 25(6): 932-938.  
YI Zhuang-peng, ZHAO Yue-yu, ZHU Ke-zhao. The dynamic stability analysis of shallow arches with geometrical imperfections[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2008, 25(6): 932-938.
- [14] ZHOU Y, CHANG W, STANCIULESCU I. Non-linear stability and remote unconnected equilibria of shallow arches with asymmetric geometric imperfections[J]. International Journal Non-Linear Mechanics, 2015, 77: 1-11.
- [15] 刘治勇. 钢管混凝土拱桥施工监控与索力张拉优化[J]. 筑路机械与施工机械化, 2015, 32(9): 82-85.  
LIU Zhi-yong. Construction control of concrete-filled steel tubular arch bridge and optimization of cable tensioning [J]. Road Machinery & Construction Mechanization, 2015, 32(9): 82-85.
- [16] XU Jian-xue, HUANG Hong, ZHANG Pei-zhen, et al. Dynamic stability of shallow arch with elastic supports application in the dynamic stability analysis of inner winding of transformer during short circuit[J]. International Journal Non-Linear Mechanics, 2002, 37(4/5): 909-920.
- [17] LEE S Y, SHEU J J, LIN S M. In-plane vibrational analysis of rotating curved beam with elastically restrained root[J]. Sound Vibration, 2008, 315(4/5): 1086-1102.
- [18] 卢 鹏, 李 涛, 芦 燕. 弹性支承圆弧钢浅拱弹塑性极限承载力分析[J]. 石家庄铁道大学学报: 自然科学版, 2016, 29(4): 21-27.  
LU Peng, LI Tao, LU Yan. Elastic plastic ultimate bearing capacity of steel circular arches with elastic supports[J]. Journal of Shijiazhuang Tiedao University: Natural Science Edition, 2016, 29(4): 21-27.
- [19] HAN Qing-hua, CHENG Yu-hao, LU Yan, et al. Nonlinear buckling analysis of shallow arches with elastic horizontal supports[J]. Thin-Walled Structures, 2016, 109: 88-102.
- [20] ATAI A A, PANAHIAZAR M, EGHTEFARI R. Limit load analysis of a spring-supported shallow arch of variable thickness given by a power-law, exponential, or logarithmic formula[J]. Mechanics of Solids, 2015, 50(6): 676-686.
- [21] PI Y L, BRADFORD M A, TIN-LOI F. Non-linear in-plane buckling of rotationally restrained shallow arches under a central concentrated load[J]. International Journal Non-Linear Mechanics, 2008, 43(1): 1-17.
- [22] PI Y L, BRADFORD M A. Non-linear buckling and postbuckling analysis of arches with unequal rotational end restraints under a central concentrated load[J]. International Journal of Solids and Structures, 2012, 49(26): 3762-3773.
- [23] PI Y L, BRADFORD M A. Multiple unstable equilibrium branches and non-linear dynamic buckling of shallow arches[J]. International Journal Non-Linear Mechanics, 2014, 60: 33-45.
- [24] 曾有艺, 易壮鹏, 颜东煌. 集中荷载作用弹性约束圆弧拱的面内屈曲特性[J]. 公路交通科技, 2015, 32(12): 81-87.  
ZENG You-yi, YI Zhuang-peng, YAN Dong-huang. In-plane buckling behavior of elastically constrained circular arch under concentrated load[J]. Journal of Highway and Transportation Research and Development, 2015, 32(12): 81-87.
- [25] LACARBONARA W, ARAFAT H N, NAYFEH A H. Non-linear interactions in imperfect beams at veering[J]. International Journal Non-Linear Mechanics, 2005, 40(7): 987-1003.
- [26] ZHOU Liang-qiang, CHEN Yu-shu, CHEN Fang-qi. Global bifurcation analysis and chaos of an arch structure with parametric and forced excitation[J]. Mechanics Research Communications, 2010, 37(1): 67-71.
- [27] YI Z P, STANCIULESCU I. Nonlinear normal modes of a shallow arch with elastic constraints for two-to-one internal resonances [J]. Nonlinear Dynamics, 2016, 83(3): 1577-1600.