

单箱双室不等壁厚箱梁受弯与约束 受扭的有限节线法分析

龚耀清, 罗亚南

(河南理工大学 土木工程学院, 河南 焦作 454003)

摘 要:为了分析单箱双室不等壁厚箱梁非对称受弯、约束受扭时其横截面的变形特征与应力分布规律,采用统一分析梁模型和有限节线法对其进行研究。统一分析梁模型不仅不对梁横截面的面外变形规律或应力分布规律作任何假定,而且对梁的长细比也不作任何限制;梁的位移场是用有限个单变量基本未知函数通过数值逼近来确定;梁的应力场通过与位移场相对应的应变场及梁材料的本构关系来确定;给出单箱双室不等壁厚箱梁受弯与约束受扭时的整体变形特征、横截面翘曲特点以及应力分布规律,并讨论扭转中心位置的确定方法,给出确定扭转中心位置的计算公式。研究表明:只要单箱双室不等壁厚箱梁承受非对称面内的横向荷载作用(横向力或扭矩),整个箱梁在非对称面内不存在单纯弯曲变形的问题,弯曲变形和横截面绕轴线转动的扭转变形总是耦合在一起,箱梁横截面不仅产生翘曲变形,而且其上的正应力、剪应力均为非线性分布;正应力、扭转剪应力的最大值、扭转中心的位置均随横截面翼缘板与各箱室尺寸,特别是箱室壁厚而变化。提出的方法适用于解决长细比小于 3 的短箱梁的力学分析问题,对于中长箱梁和长箱梁非约束扭转以外的力学分析问题,该方法可分别退化为 Timoshenko 梁和 Bernoulli-Euler 梁的相关问题,其还可以解决这 2 类传统箱梁理论不能解决的约束扭转问题。

关键词:桥梁工程;单箱双室箱梁;统一分析梁;有限节线法;约束扭转

中图分类号:U448.213

文献标志码:A

Analysis on single-box double-cells unequal-wall-thickness girder due to bending and restrained torsion by finite nodal-line method

GONG Yao-qing, LUO Ya-nan

(School of Civil Engineering, Henan Polytechnic University, Jiaozuo 454003, Henan, China)

Abstract: In order to investigate the mechanics characteristics such as deformation and stress distributions of a real single-box double-cells unequal-wall-thickness girder subjected to bending in its asymmetric plane and restrained torsion around its axis, a unified analytical beam model and a finite nodal-line method were employed. The unified analytical beam model neither make any assumptions about the out-of-plane deformation or stress distribution of the beam, nor limit the aspect ratio of the beam. Displacement field of the whole beam was determined by the numerical approximation using finite single-variable basic unknown functions. Stress field of the beam was

determined by the strain field corresponding to the displacement field and the constitutive relation of beam material. The exemplar study of a box girder revealed the global deformation features, the cross-section warping characteristics, and the stress distribution of girder. Torsional center of the cross section was determined as well, and the formula for obtaining the location of torsional center was developed. The results show that as long as a single-box double-cells unequal-wall-thickness girder is subjected to transverse loading (transverse force or torque) in its asymmetric plane, the whole box girder does not have the problem of pure bending deformation in the asymmetric plane. Bending deformation and torsional deformation of the cross section about the axis of rotation are always coupled together. Cross section of the box girder produces warping deformation, and the normal stress and shear stress induced by lateral loading are nonlinearly distributed on the cross section. Location of the torsional center and the maximum values of both normal stress and torsional shearing stress of the cross section change with the size of flange and cells, especially the wall thickness of cells. The method proposed is especially suitable for solving the mechanical analysis problems of short box girders with aspect ratio less than 3. For the mechanical analysis problems of medium-long and long box girders without considering non-restrained torsion, the method proposed not only reduces to the related problems of Timoshenko beam and Bernoulli-Euler beam, but also can solve the problem of restrained torsion which cannot be solved by the traditional beam theory of these two kinds. 4 tabs, 10 figs, 23 refs.

Key words: bridge engineering; single-box double-cells girder; unified analytical beam; finite nodal-line method; restrained torsion

0 引言

箱梁以其截面抗弯刚度大、抵抗正负弯矩能力强等优点,近年来在中国桥梁建设中得到广泛应用^[1-2],从单箱单室发展到单箱多室,且箱室各处的壁厚也不相同。这种不等壁厚箱梁的出现引出了 2 个很棘手的力学问题。

第 1 个棘手的力学问题是不等壁厚箱梁的剪力滞,所谓剪力滞是指按照传统长梁理论(Bernoulli-Euler 梁理论或平截面假定梁理论),横截面同一高度处的正应力应该相等,但实际中不等壁厚箱形长梁横截面翼缘板上同一高度处的正应力不相等,其原因被认为是箱梁腹板与翼缘板对剪切变形的贡献不同而导致的一种现象。关于箱梁剪力滞的问题引起了许多科学工作者的研究兴趣^[3-6]。

第 2 个棘手的力学问题是不等壁厚箱梁的约束扭转,产生约束扭转的原因主要有:①作用在箱梁上的实际车辆荷载不可能正好落在其纵向对称面内,偏离纵向对称面的竖向荷载会使箱梁产生扭转变形;②箱梁的位置离地面很高(高架路、高架桥)时,风荷载和设防以内的地震荷载可能成为设计箱梁时必须考虑的因素,而实际中这 2 种荷载不可能正好通过箱梁横截面的剪切中心(或扭转中心),从而必

然引起箱梁的非对称弯曲和扭转的耦合变形^[7-9]。与圆截面不同,箱梁横截面在扭转时必然产生面外翘曲,要确定这种面外翘曲就必须首先确定横截面的剪切中心(或扭转中心),而现有梁理论是无法定量确定不等壁厚箱梁横截面的剪切中心的^[10-11]。因此,关于箱梁约束扭转的研究还限制在能确定剪切中心的简单薄壁截面梁^[12-16],对不等壁厚箱梁的约束扭转问题研究已经超出现有梁理论的应用范围。在不得已的情况下,不得不将这种新型箱梁勉强简化成传统的薄壁箱梁进行分析,或用各种有限元商业软件中的板单元、壳单元、甚至块体单元来数值模拟箱梁的力学行为^[17-19]。不等壁厚箱梁与薄壁箱梁横截面上的应力分布规律差别较大,且箱梁的应力状态与板、壳、块体单元的应力状态不同,若以此模拟其受力变形后的力学行为是不真实的,并使边界单元上力的边界条件,特别是对梁边界上的扭矩边界条件几乎不能满足,致使计算结果的可靠性受限。

鉴于不等壁厚箱梁存在上述问题,本文采用统一分析梁模型^[20-21],并利用与之相匹配的分析方法,即有限节线法分析单箱双室不等壁厚箱梁受弯与约束受扭时的力学特征。

1 分析模型与方法介绍

1.1 分析模型

根据文献[20]、文献[21]中关于统一分析梁模型的规定,统一分析梁对其横截面的面外变形规律和应力分布规律不作任何假定,并将整个梁的位移场分成 2 个部分:第 1 部分是纵向(或轴向)位移;第 2 部分是横向位移。纵向位移由构件全体横截面的面外变形曲面构成;横向位移由构件轴线上所有点在垂直于轴线方向的 2 个线位移和所有横截面绕轴线整体转动的转角构成。统一分析梁对构件的长细比也不作限制,只要求构件的轴线长度不小于其横截面的最大尺寸。判断一个构件是否可以简化为统一分析梁,不仅要看它的几何形状与尺寸,还要根据它的应力状态判定,如果构件的长度不小于其横截面最大尺寸,且其中任意一点的应力状态满足梁的应力状态特征,就可将其简化为统一分析梁。所谓梁的应力状态特征是指在其横截面上只存在正应力 σ_x 与剪应力 τ_{xy} 和 τ_{xz} ,其他的应力分量都为 0,应力状态如图 1(a)所示。

对于工程实际中的真实箱梁来说,其形状、尺寸以及任意一点的应力状态均满足统一分析梁的规定。因此,一个真实的单箱双室箱梁可看作是 1 根统一分析梁。

1.2 分析方法

1.2.1 位移场的描述

有限节线法是用有限个单变量基本未知函数逼近整个梁的位移场的一种数值方法。箱梁纵向位移的定量描述如下:首先,从梁中选取有限个平行于轴线的纵向节线[图 1(b)],并用代表节线纵向位移的未知函数 $[w_i(x), i=1, 2, \dots, n]$ 为基本未知函数;然后,在节线之间构造插值函数 $\varphi_i(y_i, z_i)$,并将箱梁的纵向位移表示为

$$u(x, y, z) = \sum w_i(x) \varphi_i(y_i, z_i) = \Phi^T(y, z) \mathbf{W}(x) \quad (1)$$

式中: $\mathbf{W}(x) = [w_1(x) \ w_2(x) \ \dots \ w_n(x)]^T$, 为纵向位移未知函数列阵; $\Phi(y, z) = [\varphi_1(y_1, z_1) \ \varphi_2(y_2, z_2) \ \dots \ \varphi_n(y_n, z_n)]^T$, 为插值函数列阵; $w_i(x)$ 的定义域为梁轴线上的点集; $\varphi_i(y_i, z_i)$ 的定义域为第 i 条节线及其邻近节线与横截面交点连线(或节点连线)所围成的任意四边形区域; y_i, z_i 为该区域各点坐标(局部坐标)。

对于箱梁的横向位移,可选取能代表箱梁轴线各点在 y, z 方向、各横截面绕轴线 x 的角位移未知

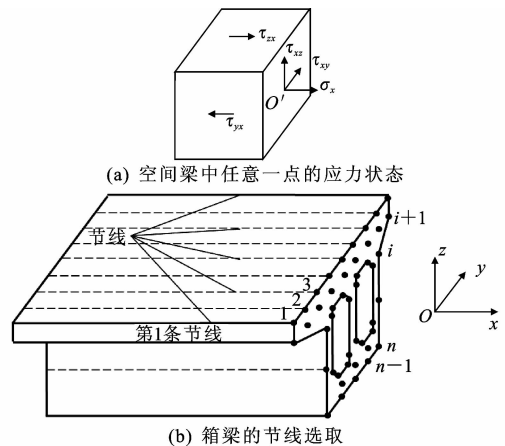


图 1 空间梁的应力状态与节线选取

函数 $v_{0y}(x), v_{0z}(x), \theta(x)$ 为基本未知函数,来描述整个箱梁的横向位移,其未知函数列阵 $\mathbf{V}(x)$ 为

$$\mathbf{V}(x) = [v_{0y}(x) \ v_{0z}(x) \ \theta(x)]^T \quad (2)$$

于是,梁中任意一点 (x, y, z) 在 x, y, z 方向的位移分别为

$$\begin{cases} u(x, y, z) = \Phi^T(y, z) \mathbf{W}(x) \\ v_y(x, z) = v_{0y}(x) - z\theta(x) \\ v_z(x, y) = v_{0z}(x) + y\theta(x) \end{cases} \quad (3)$$

对应于该位移的应变张量 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} = u_{,x} & \gamma_{xy} = v_{y,x} + u_{,y} & \gamma_{xz} = v_{z,x} + u_{,z} \\ \gamma_{yx} = u_{,y} + v_{y,x} & \varepsilon_{yy} = v_{y,y} & \gamma_{yz} = v_{z,y} + v_{y,z} \\ \gamma_{zx} = u_{,z} + v_{z,x} & \gamma_{zy} = v_{y,z} + v_{z,y} & \varepsilon_{zz} = v_{z,z} \end{bmatrix} \quad (4)$$

式中: $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}$ 分别为梁中任意一点在 x, y, z 方向的线应变; $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}, \gamma_{yz} = \gamma_{zy}, \gamma_{zx} = \gamma_{xz}$, 分别为围绕该点的微分六面体由 xOy, yOz, zOx 面构成的直角处剪应变的改变量; $u_{,x}, u_{,y}, u_{,z}, v_{y,x}, v_{y,y}, v_{y,z}, v_{z,x}, v_{z,y}, v_{z,z}$ 分别表示对下标中逗号后的变量求导,如 $v_{z,y} = \frac{\partial v_z(x, y)}{\partial y}$ 。

将式(3)代入式(4)后就可导出梁中任意一点的应变状态为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & 0 & 0 \\ \gamma_{zx} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

式(5)说明箱梁中任意一点的应变状态与图 1(a)所示的应力状态相适应。

1.2.2 控制方程推导

根据上述位移场,可分别获得整个梁的弹性势能以及外力所做的功,再根据最小势能原理,就可建立问题的控制方程。

一个在 xOz 平面内受均布荷载作用的空间均

质材料简支梁,如图 2 所示,其中: q 为均布荷载; L 为其跨径。梁端部绕 x 轴的转动被限制,其控制方程为

$$\begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{W}'(x) - \mathbf{B}\mathbf{W}(x) - \mathbf{C}\mathbf{W}'(x) = \mathbf{0} \\ \mathbf{D}\mathbf{V}'(x) + \mathbf{C}^T\mathbf{W}'(x) = \mathbf{Q} \end{cases} \quad (6)$$

相应的边界条件为

$$\begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{W}'(0) = \mathbf{0}, \mathbf{V}(0) = \mathbf{0} & x=0 \\ \mathbf{A}\mathbf{W}'(L) = \mathbf{0}, \mathbf{V}(L) = \mathbf{0} & x=L \end{cases} \quad (7)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \iint_{\Omega} E \boldsymbol{\Phi}(y, z) \boldsymbol{\Phi}^T(y, z) dy dz \\ \mathbf{B} &= \iint_{\Omega} G \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}(y, z)}{\partial y} \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}^T(y, z)}{\partial y} dy dz + \\ &\quad \iint_{\Omega} G \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}(y, z)}{\partial z} \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}^T(y, z)}{\partial z} dy dz \\ \mathbf{C} &= \iint_{\Omega} G \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}(y, z)}{\partial y} \mathbf{T}_1 dy dz + \iint_{\Omega} G \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}(y, z)}{\partial z} \mathbf{T}_2 dy dz + \\ &\quad \iint_{\Omega} G \left(y \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}(y, z)}{\partial z} - z \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}(y, z)}{\partial y} \right) \mathbf{T}_3 dy dz \\ \mathbf{D} &= \begin{bmatrix} \iint_{\Omega} G dy dz & 0 & -\iint_{\Omega} G z dy dz \\ 0 & \iint_{\Omega} G dy dz & \iint_{\Omega} G y dy dz \\ -\iint_{\Omega} G z dy dz & \iint_{\Omega} G y dy dz & \iint_{\Omega} G (y^2 + z^2) dy dz \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\mathbf{Q} = [q_y \quad q_z \quad q_{\theta}]^T$$

$$\mathbf{T}_1 = [1 \quad 0 \quad 0]^T, \mathbf{T}_2 = [0 \quad 1 \quad 0]^T,$$

$$\mathbf{T}_3 = [0 \quad 0 \quad 1]^T$$

式中: $\mathbf{0}$ 为零向量(列阵); G 、 E 分别为梁的拉压弹性模量和剪切模量; \mathbf{A} 为箱梁横截面与插值函数列阵 $\boldsymbol{\Phi}(y, z)$ 相对应的抗拉压刚度矩阵; \mathbf{B} 为箱梁横截面与插值函数列阵 $\boldsymbol{\Phi}(y, z)$ 相对应的纵向抗弯刚度矩阵; \mathbf{C} 为箱梁横截面与插值函数列阵 $\boldsymbol{\Phi}(y, z)$ 相对应的纵向抗剪刚度矩阵; \mathbf{D} 为箱梁横截面的横向抗剪刚度矩阵;积分区域 Ω 为箱梁内外边界所围成的区域,即箱梁的横截面; \mathbf{Q} 为与式(2)的位移模式相对应的荷载向量; q_y 为 y 方向的横向均布荷载; q_z 为 z 方向的横向均布荷载; q_{θ} 为绕箱梁轴向 x 转动的均布力矩; \mathbf{T}_1 、 \mathbf{T}_2 、 \mathbf{T}_3 均为单位列矩阵。

采用分块集成法 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 、 \mathbf{C} 、 \mathbf{D} 这 4 个刚度矩阵,即图 2(b)中梁横截面上任意 4 个相邻节点(横截面与节线的交点,即节点编号 1~64, o 为横截面形心)可构成 1 个四边形单元,四边形单元内的插值函数可借鉴有限元中等参元构造形函数的办法来处理,以统一其函数形式,方便程序化计算。

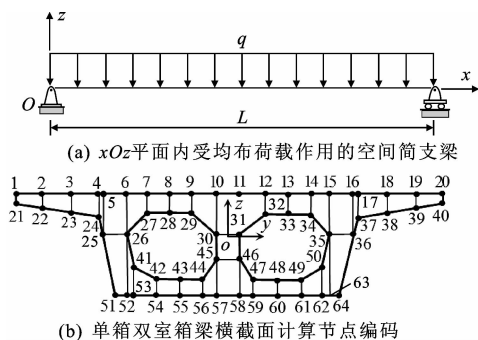


图 2 单箱双室简支箱梁及其横截面

Simply single box double cells girder and its cross section

式(6)和式(7)构成了常微分方程组的边值问题,可用高质高效的常微分方程求解器(ODE solver)求其数值解,从而获得箱梁的位移场^[22-23]。有了位移场就可计算与其相应的应变场,再用 Hook 定理计算出梁的应力场。

2 算例与计算结果分析

算例分 3 种情况考虑:第 1 种情况考虑 2 根长细比小于 3 但横截面尺寸不同的短梁(编号分别为截面 1、截面 2),在通过其横截面形心的非对称面内作用满跨分布的均布荷载,目的是从结构数值分析结果中观察单箱双室箱梁横截面上的剪应力分布规律和扭转中心位置随横截面尺寸的变化规律;第 2 种情况选取横截面为截面 1 的箱梁,沿其整个轴线作用均布扭矩(即实际风荷载对桥梁的扭转作用),目的是分析这种非开口、非闭口、非薄壁截面构件约束受扭时的力学特征;第 3 种情况选取横截面为截面 1 的箱梁,考虑其在对称面内受均布荷载作用的情况(考虑对称面内的弯曲时,该梁属于长梁),并将统一分析梁的数值解和 ANSYS 数值解同时与 Bernoulli-Euler 梁的理论解进行比较,以检验统一分析梁和有限节线法的合理性。需要说明的是:在第 1 种情况下,ANSYS 无法获得箱梁的扭转角,也无法求出横截面扭转中心的位置;在第 2 种情况下,ANSYS 所得解不收敛,原因是其无法在这种短梁的边界节点上施加均布扭矩。

下页图 3 为一单箱双室钢筋混凝土箱梁的横截面,其材料弹性模量 $E = 3.25 \times 10^{10}$ Pa,剪切模量 $G = 1.22 \times 10^{10}$ Pa,梁长 60 m,跨宽比 2.5,跨高比 32.97,在 xOz 、 xOy 平面内两端简支,但绕 x 轴的转动被限制,即端部的扭转角为 0 rad。

2.1 第 1 种情况

分 2 种不同尺寸的截面进行计算。

截面 1(图 3):沿 y 方向作用满跨均布荷载

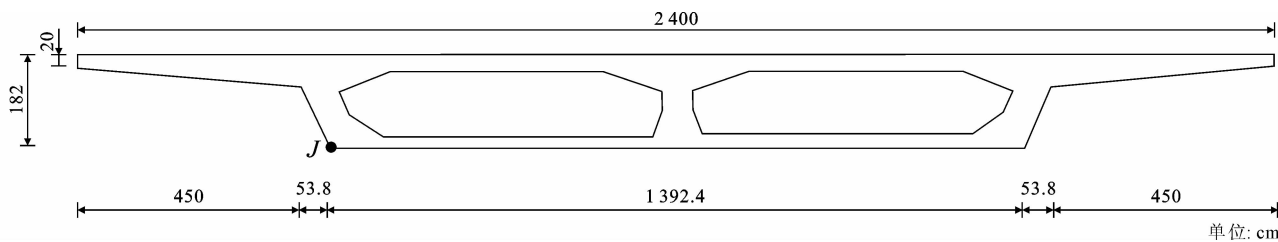


图 3 单箱双室箱梁截面 1 尺寸

Fig. 3 Geometry dimensions of single-box double-cells girder (section 1)

10 kN/m(当分析 xOy 平面内的弯曲变形时,应将梁的跨宽比作为其长细比),对应的荷载向量为

$$\mathbf{Q} = [10 \quad 0 \quad 0]^T$$

根据图 3 的横截面尺寸计算出其形心位置,再以横截面形心连线为整体坐标系的 x 轴,用此空间坐标系确定 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 、 \mathbf{C} 、 \mathbf{D} 这 4 个刚度矩阵后,就可用常微分方程求解器(ODE solver)求解由式(6)和式(7)构成的常微分方程组的边值问题。

表 1 为箱梁不同横截面位置处的横向位移以及扭转角(逆时针为正)。从表 1 可以看出,在通过横截面形心的水平横向力作用下,箱梁不仅产生横向位移,而且发生扭转,且为顺时针方向,这说明箱梁不仅存在扭转(弯曲)中心,而且扭转中心在横截面形心的上方。下页图 4 为箱梁 $x=6.0$ m 处横截面上的剪应力分布,可以看成是由横向力产生的剪应力和由扭矩产生的剪应力的叠加,且中腹板上没有零点,剪应力按 K 形分布。

表 1 截面 1 箱梁在均布横向力作用下的横向位移与扭转角

Tab. 1 Lateral displacements and torsional angles of box girder under uniform load (section 1)

x/m	$v_{0y}(x)/\text{m}$	$v_{0z}(x)/\text{m}$	$\theta(x)/\text{rad}$
0	0	0	0
6	$4.083\ 19 \times 10^{-5}$	$3.948\ 01 \times 10^{-11}$	$-2.094\ 11 \times 10^{-6}$
12	$7.592\ 50 \times 10^{-5}$	$7.457\ 99 \times 10^{-11}$	$-3.776\ 06 \times 10^{-6}$
18	$1.027\ 53 \times 10^{-4}$	$1.020\ 09 \times 10^{-10}$	$-4.988\ 15 \times 10^{-6}$
24	$1.195\ 49 \times 10^{-4}$	$1.194\ 08 \times 10^{-10}$	$-5.716\ 33 \times 10^{-6}$
30	$1.252\ 65 \times 10^{-4}$	$1.253\ 65 \times 10^{-10}$	$-5.959\ 28 \times 10^{-6}$

需要说明的是:对于在 xOz 、 xOy 平面内两端简支,但绕 x 轴的转动被限制的箱梁来说,在均布荷载作用下其跨中横截面保持为平面,而靠近支座处横截面的翘曲现象会更加明显,所以算例选取程序分析中最靠近支座的横截面($x=6.0\text{ m}$)来研究其翘曲现象及应力分布情况。

截面 2:为讨论剪应力的分布规律和扭转中心的位置随横截面翼缘板与各箱室尺寸的变化规律,下页图 5 给出了截面 2 的单箱双室箱梁(保持跨宽比不变,改变箱梁翼缘板厚度以及各箱室壁厚)。沿

y 方向作用满跨均布荷载 (与情况 1 的荷载相同), 剪应力分布情况见下页图 4、图 6。

从图 4 和图 6 的剪应力分布可以看出,在同一种荷载作用下,翼缘板厚度和箱室壁厚对剪应力在整个横截面上的分布影响较小,但对剪应力峰值影响较大。

2.2 第 2 种情况

在截面 1 箱梁满跨作用集度为 $500 \text{ kN} \cdot \text{m/m}$ 的均布力偶矩, 这种情况下的荷载向量变为

$$\mathbf{Q} = [0 \quad 0 \quad 500]^T$$

将情况 1 中的程序改变荷载向量后,可求解第 2 种情况下的数值解。表 2 给出了截面 1 箱梁约束扭转时 J - J 节线上不同截面位置处的翘曲正应力、翘曲位移;表 3 给出了截面 1 箱梁约束扭转时不同截面位置处 y 、 z 方向的横向位移以及横截面绕 x 轴的扭转角(逆时针为正)。

表 2 截面 1 箱梁约束受扭时节线 $J-J$ 在不同截面位置处的扭转翘曲正应力和翘曲位移

Tab. 2 Warping stresses and warping displacements of J - J nodal line at different sections due to non-uniform torsion (section 1)

x/m	正应力 $\sigma(x)/\text{MPa}$	翘曲位移 $w(x)/\text{mm}$
0	0	-0.505 533
6	0.376 113	-0.464 555
12	0.448 294	-0.386 536
18	0.475 819	-0.300 655
24	0.480 653	-0.212 350
30	0.481 907	-0.123 431

表 3 截面 1 箱梁约束受扭时轴线的横向位移与横截面的扭转角

Tab. 3 Lateral displacements and torsional angles of box-girder axis due to non-uniform torsion (section 1)

x/m	$v_{0y}(x)/\text{m}$	$v_{0z}(x)/\text{m}$	$\theta(x)/\text{rad}$
0	0	0	0
6	$-1.070\,96 \times 10^{-4}$	$-2.243\,35 \times 10^{-9}$	$3.117\,28 \times 10^{-4}$
12	$-1.931\,63 \times 10^{-4}$	$-4.246\,26 \times 10^{-9}$	$5.655\,94 \times 10^{-4}$
18	$-2.552\,05 \times 10^{-4}$	$-5.816\,36 \times 10^{-9}$	$7.498\,21 \times 10^{-4}$
24	$-2.924\,85 \times 10^{-4}$	$-6.814\,44 \times 10^{-9}$	$8.608\,69 \times 10^{-4}$
30	$-3.049\,24 \times 10^{-4}$	$-7.156\,48 \times 10^{-9}$	$8.979\,59 \times 10^{-4}$

比较表 1 和表 3,发现同一横截面扭转角的比

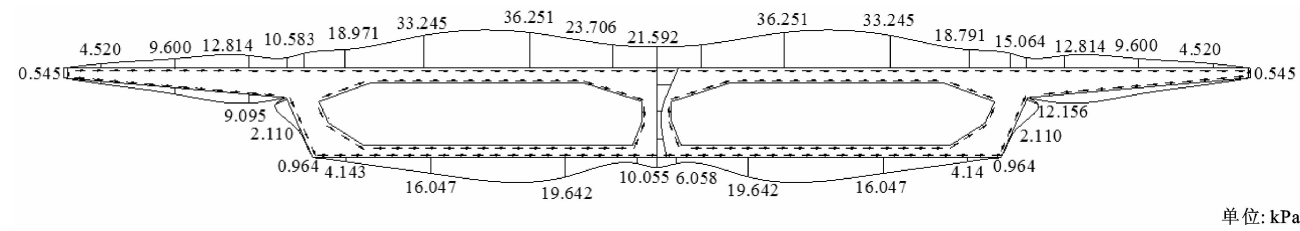


图 4 截面 1 箱梁在横向荷载作用下 $x=6.0$ m 处横截面上的剪应力分布情况
Fig. 4 Shear stresses distributions of cross section at $x=6.0$ m under transverse load (section 1)

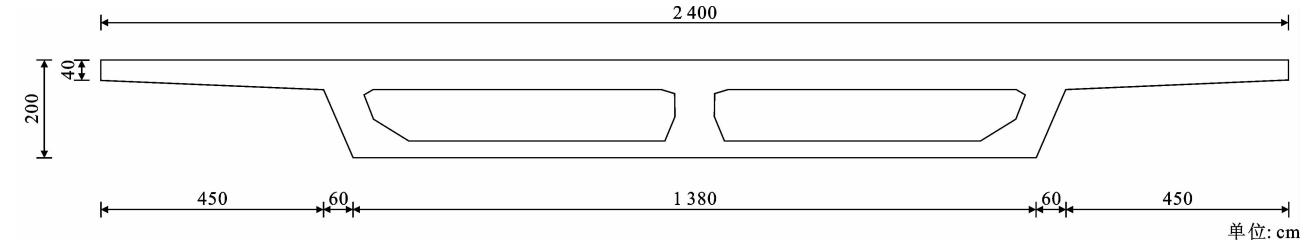


图 5 单箱双室箱梁截面 2 尺寸
Fig. 5 Geometry dimensions of single-box double-cells (section 2)

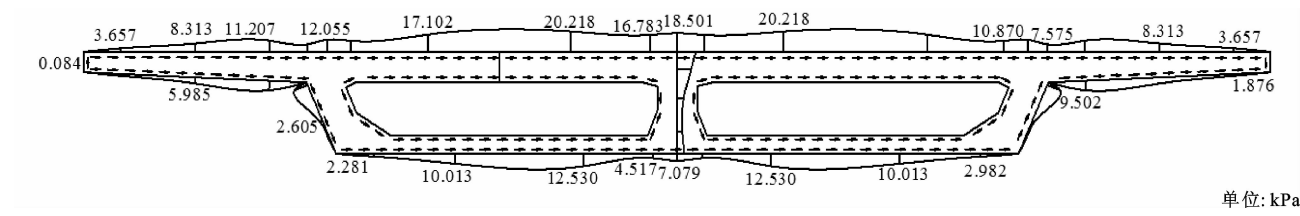


图 6 截面 2 箱梁在横向荷载作用下 $x=6.0$ m 处横截面上的剪应力分布情况
Fig. 6 Shear stresses distributions of cross section at $x=6.0$ m under transverse load (section 2)

值为定值(-0.0067),并根据扭矩与扭转角之间的线性关系,可得扭转中心位置 d_c 的计算公式为

$$-\frac{q_y d_c}{T} = \frac{\theta_1}{\theta_2} \quad (8)$$

式中: θ_1 为横向水平力作用下产生的扭转角; θ_2 为单独扭矩作用下产生的扭转角; q_y 为荷载向量 Q 中的横向水平力分量; T 为荷载向量 Q 中的扭矩分量。

截面 1 按式(7)求得箱梁的 $d_c=0.335$ m,即当水平力向形心上方移动 0.335 m 后,在横向水平力作用下箱梁不会产生扭转变形。同理,可求得截面 2 的 $d_c=0.285$ m。

图 7~下页图 9 分别为截面 1 箱梁约束扭转时 $x=6.0$ m 处横截面的翘曲、正应力、剪应力分布。

2.3 第 3 种情况

在截面 1 箱梁的 z 方向满跨作用 -10 kN/m 的均布荷载,荷载向量变为

$$Q=[0 \quad -10 \quad 0]^T$$

将情况 2 中的程序改变为上述荷载向量后,可求解第 3 种情况下的数值解。在这种荷载情况下,实际上是计算箱梁在 xOz 平面内弯曲变形,应考虑

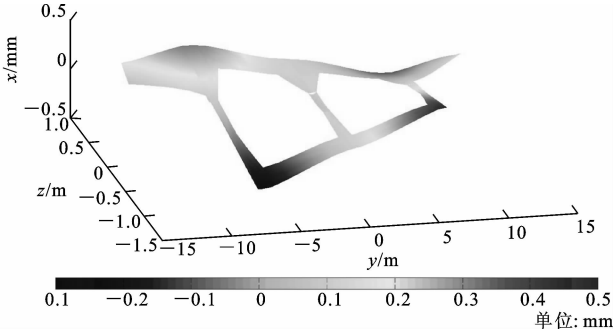


图 7 截面 1 箱梁在约束扭转时 $x=6.0$ m 处的翘曲情况
Fig. 7 Warping of box girder at $x=6.0$ m due to non-uniform torsion (section 1)



图 8 截面 1 箱梁在约束扭转时 $x=6.0$ m 处正应力分布
Fig. 8 Normal stresses distributions of box girder at $x=6.0$ m due to non-uniform torsion (section 1)

梁的跨高比(32.97),是 1 根长梁(Bernoulli-Euler 梁)。为验证统一分析梁与有限节线法的合理性,选用 ANSYS 中的 Beam189 单元进行分析,并将 2 种

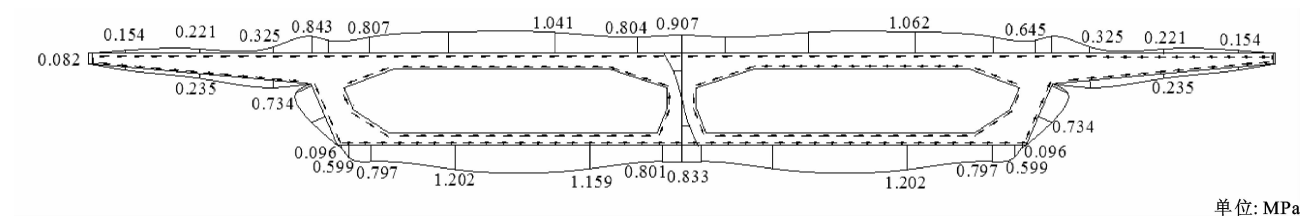


图 9 截面 1 箱梁在约束扭转时 $x=6.0$ m 处的剪应力分布
Fig. 9 Shear stresses distributions at $x=6.0$ m due to non-uniform torsion (section 1)

计算方法的数值计算结果与 Bernoulli-Euler 梁的解析解进行比较。

表 4 给出 2 种方法的竖向位移(挠度)对比,图 10 给出截面 1 箱梁跨中横截面正应力的分布。

(2)无论是横向水平力还是单独扭矩,只要它们不通过扭转中心,都会使箱梁产生弯扭耦合变形,受扭后箱梁的横截面有明显翘曲,最大翘曲正应力也发生在翘曲变形最大的部位,而且翘曲正应力的数值也很可观。对于钢筋混凝土箱梁来说,扭转引起的翘曲正应力必须受到重视。

表 4 均布荷载作用下载面 1 箱梁在不同截面处的竖向位移结果对比
Tab. 4 Comparisons of displacements along axis z at different sections due to bending (section 1)

x/m	Bernoulli-Euler 梁解析解/mm	ANSYS 解/mm	统一分析 梁解/mm	误差 1/%	误差 2/%
6	-2.513 8	-2.613 7	-2.573 8	3.974 1	2.386 8
12	-4.756 0	-4.933 5	-4.863 2	3.732 1	2.254 0
18	-6.511 4	-6.744 3	-6.652 5	3.576 8	2.167 0
24	-7.626 1	-7.892 3	-7.787 6	3.490 6	2.117 7
30	-8.007 9	-8.285 2	-8.176 2	3.462 8	2.101 7

注:误差 1 为 ANSYS 解与 Bernoulli-Euler 梁解析解的对比;误差 2 为统一分析梁解与 Bernoulli-Euler 梁解析解的对比。

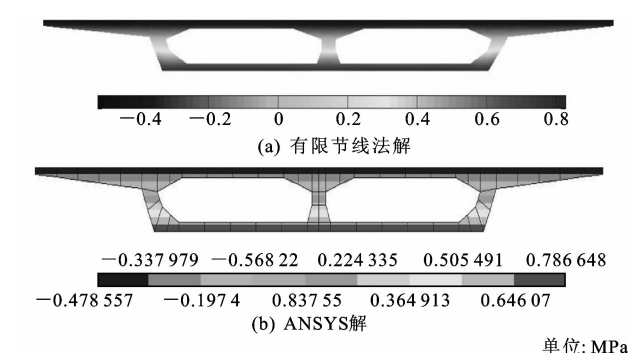


图 10 截面 1 箱梁均布荷载作用下跨中横截面正应力分布
Fig. 10 Normal stresses distributions on middle section of box girder under uniform load (section 1)

从表 4 可以看出,用有限节线法分析 Euler 梁时,其数值解与 Euler 梁的解析解很接近,且有限节线法的计算结果比 ANSYS 更精确,而图 10 中 2 种算法的应力变化趋势一致。统一分析梁解与 ANSYS 解略有差别的原因是:Beam189 单元只在端部横截面的形心处施加轴向约束,而统一分析梁在梁端部横截面的所有节点上都施加轴向约束,故计算出的横向位移较小,正应力较大。

3 结 语

(1)单箱双室箱梁在横向荷载作用下,其横截面

的剪应力为非线性分布,分布规律与翼缘板和各箱室的壁厚有关,最大剪应力出现在最薄箱室中部的最外边界处,方向与边界方向平行。

(3)基于常微分方程求解器的有限节线法在分析复杂箱梁的力学特征时,不仅方法合理,而且求解精度优于常用的工程计算软件;其方法合理的最根本原因是将箱梁中任意一点的位移表示成了式(3)的形式,使得在计算剪切弹性变形能时,能同时考虑轴向位移、横向位移、横截面的转动三者的耦合作用。

(4)下一步将在本文研究的基础上进行单箱双室横截面箱梁的纯扭转问题、弯扭耦合动力特性等方面研究。

参考文献: References:

[1] 《中国公路学报》编辑部. 中国公路交通学术研究综述·2012[J]. 中国公路学报, 2012, 25(3): 2-49.
Editorial Department of *China Journal of Highway and Transport*. An academic research summary on China highway and transport; 2012[J]. *China Journal of Highway and Transport*, 2012, 25(3): 2-49.

[2] 《中国公路学报》编辑部. 中国桥梁工程学术研究综述·2014[J]. 中国公路学报, 2014, 27(5): 1-96.
Editorial Department of *China Journal of Highway and Transport*. Review on China's bridge engineering research; 2014 [J]. *China Journal of Highway and Transport*, 2014, 27(5): 1-96.

[3] 胡少伟, 喻江, 张文敬. 集中荷载作用下宽翼缘双箱组合梁剪滞效应分析[J]. 工程力学, 2015, 32(5): 120-130.
HU Shao-wei, YU Jiang, ZHANG Wen-jing. Analysis

- of shear lag effect in double-box composite beams with wide flanges under concentrated loading[J]. *Engineering Mechanics*, 2015, 32(5): 120-130.
- [4] ZHANG Yuan-hai, LIN Li-xia. Shear lag analysis of thin-walled box girders based on a new generalized displacement[J]. *Engineering Structures*, 2014, 61: 73-83.
- [5] 张元海, 林丽霞. 薄壁箱梁剪力滞效应分析的初参数法[J]. *工程力学*, 2013, 30(8): 205-211.
ZHANG Yuan-hai, LIN Li-xia. Initial parameter method for analyzing shear lag effect of thin-walled box girders[J]. *Engineering Mechanics*, 2013, 30(8): 205-211.
- [6] 王继兵, 周德源. 荷载横向变位下箱梁剪力滞效应分析[J]. *哈尔滨工程大学学报*, 2011, 32(2): 159-164.
WANG Ji-bing, ZHOU De-yuan. Analysis of the shear lag effect of a box girder with varying lateral loading locations[J]. *Journal of Harbin Engineering University*, 2011, 32(2): 159-164.
- [7] 夏桂云, 曾庆元. 深梁理论的研究现状与工程应用[J]. *力学与实践*, 2015, 37(3): 302-316.
XIA Gui-yun, ZENG Qing-yuan. Timoshenko beam theory and its applications[J]. *Mechanics in Engineering*, 2015, 37(3): 302-316.
- [8] DE MIRANDA S, MADEO A, MILETTA R, et al. On the relationship of the shear deformable generalized beam theory with classical and non-classical theories[J]. *Thin-Walled Structures*, 2014, 51 (21/22): 3698-3709.
- [9] SCHARDT R. Generalized beam theory — An adequate method for coupled stability problems[J]. *Thin-Walled Structures*, 1994, 19(2/3/4): 161-180.
- [10] BARRETTA R, DIACO M. On the shear centre in Saint-Venant beam theory[J]. *Mechanics Research Communications*, 2013, 52: 52-56.
- [11] ANDREAUS U A, RUTA G C. A review of the problem of shear centre(s)[J]. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 1998, 10(6): 369-380.
- [12] CARRERA E, FILIPPI M, MAHATO P K, et al. Accurate static response of single- and multi-cell laminated box beams[J]. *Composite Structures*, 2016, 136: 372-383.
- [13] FILIPPI M, CARRERA E, ZENKOUR A M. Static analyses of FGM beams by various theories and finite elements[J]. *Composites Part B: Engineering*, 2015, 72: 1-9.
- [14] DOWELL R K, JOHNSON T P. Closed-form shear flow solution for box-girder bridges under torsion[J]. *Engineering Structures*, 2012, 34: 383-390.
- [15] 王兆强, 赵金成. 开口薄壁梁的扭转理论与应用[J]. *力学学报*, 2011, 43(5): 963-967.
WANG Zhao-qiang, ZHAO Jin-cheng. Restrained torsion theory of open thin-walled beams and its application[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2011, 43(5): 963-967.
- [16] PARK N H, CHOI S, KANG Y J. Exact distortional behavior and practical distortional analysis of multicell box girders using an expanded method[J]. *Computers and Structures*, 2005, 83(19/20): 1607-1626.
- [17] 钟新谷, 舒小娟, 张昊宇. 预应力混凝土箱梁横向框架效应有限元分析[J]. *计算力学学报*, 2013, 30(4): 549-553.
ZHONG Xin-gu, SHU Xiao-juan, ZHANG Hao-yu. Finite element analysis on transversal frame-effect of prestressed concrete box-girder bridge[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2013, 30(4): 549-553.
- [18] 尧云涛, 肖汝诚. 粗网格划分下的箱梁三维实体有限元分析方法[J]. *工程力学*, 2010, 27(3): 67-73.
YAO Yun-tao, XIAO Ru-cheng. The 3-D finite element analysis method of box girders with coarse mesh[J]. *Engineering Structures*, 2010, 27(3): 67-73.
- [19] 赵大亮, 李爱群, 丁幼亮, 等. 基于子模型法的大跨斜拉桥扁平钢箱梁应力分析[J]. *计算力学学报*, 2008, 25(3): 326-332.
ZHAO Da-liang, LI Ai-qun, DING You-liang, et al. Stress analysis on steel-box girder of long span cable-stayed bridge based on submodel method[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2008, 25(3): 326-332.
- [20] 龚耀清, 陈晓东. 固体力学中的统一分析梁与有限节线法[J]. *固体力学学报*, 2015, 36(2): 105-113.
GONG Yao-qing, CHEN Xiao-dong. A unified analytical beam & a finite nodal-line method in solid mechanics[J]. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2015, 36(2): 105-113.
- [21] 龚耀清, 孙博, 陈晓东. 用统一分析梁与有限节线法分析弹性薄壁结构构件[J]. *应用数学与力学*, 2015, 36(4): 352-361.
GONG Yao-qing, SUN Bo, CHEN Xiao-dong. Elastic analysis of arbitrary thin-walled structural members based on the unified analytical beam model with the finite nodal line method[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2015, 36(4): 352-361.
- [22] YUAN Si. ODE conversion techniques and their applications in computational mechanics[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 1991, 7(3): 283-288.
- [23] 袁驷. 介绍一个常微分方程边值问题求解通用程序——COLSYS[J]. *计算结构力学及其应用*, 1990, 7(2): 104-105.
YUAN Si. Recommending a robust ODE code for BVPs: COLSYS[J]. *Computational Structural Mechanics and Applications*, 1990, 7(2): 104-105.