

对称点对点式桁架臂弦杆单肢屈曲载荷

赵二飞,成 凯,周振平

(吉林大学 机械科学与工程学院,吉林 长春 130022)

摘 要:为了确定关于对称点对点式桁架臂弦杆单肢屈曲载荷的快速可靠的计算方法,对其结构进行力学简化,建立了弦杆腹杆相互作用的空间力学模型,根据梁柱理论得到弦杆的稳定方程,并求解得到了弦杆单肢的屈曲载荷和变形平面。研究表明:与有限元计算结果进行对比,验证了力学模型和推导过程的正确性;与单独考虑某个平面腹杆计算得到的屈曲载荷相比较,提出了将单独考虑较弱平面腹杆计算得到的屈曲载荷近似作为弦杆单肢的屈曲载荷;对这种近似计算方法的稳定方程进行化简,确定了利用求解超越方程来计算弦杆单肢长度系数的方法;该计算方法为对称点对点式桁架臂弦杆的屈曲载荷提供了理论依据,可用于工程实际应用。

关键词:机械工程;对称点对点式;桁架臂;弦杆;长度系数;屈曲载荷;梁柱理论;稳定方程

中图分类号:TH213;O342 **文献标志码:**A

Chord's buckling load of symmetric point to point lattice boom

ZHAO Er-fei, CHENG Kai, ZHOU Zhen-ping

(School of Mechanical Science and Engineering, Jilin University, Changchun 130022, Jilin, China)

Abstract: In order to obtain the quick and reliable method to compute the buckling load of the chord, the symmetric point to point truss structure was reasonably simplified, and a spatial mechanical model involving the interaction between chords and web members was established. The stability equation of the chord was derived by using the beam-column theory and was solved to obtain the buckling deformation plane and buckling load of the chord. The results show that the correctnesses of the mechanical model and derivational process are verified by comparing with the results with FEM. By comparison with the buckling load considering web members of only one single plane, the buckling load calculated by using a single plane in which the stiffnesses of web members are weaker, substitutes that of chord. By simplifying stability equation of this approximate calculation method, method by means of solving transcendental equation is established to determine the length factor of chord. Method in this study provides theoretical basis for buckling load of chord form the symmetric point to point truss structure, which can be applied to the practical engineering. 3 tabs, 11 figs, 21 refs.

Key words: mechanical engineering; symmetric point to point type; lattice boom; chord; length factor; buckling load; beam-column theory; stability equation

0 引 言

履带起重机具有起重量大,可以带载行驶,接地比压小,作业灵活等优势,一直是各种工程建设项目中大型起重设备的重要成员。桁架臂是履带起重机最重要的承载结构,其中对称点对点式桁架臂是目前最常见的 2 种桁架臂形式之一^[1]。弦杆的单肢稳定性是桁架臂设计和计算中最重要的内容。欲计算弦杆的单肢稳定性必须先确定弦杆单肢的屈曲载荷,因此如何准确快速地确定桁架臂弦杆单肢的屈曲载荷是相关学者和技术人员研究的重点之一^[1-2]。

目前,中国桁架臂的设计和计算主要参照一些与金属结构相关的文献^[3-9]。大多数文献在计算桁架臂弦杆屈曲载荷时,认为腹杆的刚度比弦杆的刚度小得多,故腹杆对弦杆的嵌固作用较弱,弦杆与腹杆连接节点接近于铰点,故将弦杆当作受铰接支座支承的连续梁,此时弦杆的单肢长度系数为 1,即弦杆的节点间几何长度就是弦杆的等效长度^[4]。中国钢结构设计规范、英国起重机设计规范和受拉索约束的美国桁架臂起重机结构测试方法等也是按照同样的方式处理桁架臂弦杆的单肢长度系数^[7-9]。

陈绍蕃论述了各类轴心压杆(柱、平面和空间桁架、网架、塔架杆件)由于在端部受到约束,由此决定的等效长度系数应普遍小于 1^[10];王伟等的研究成果也验证了这一结论^[11-13]。另外,毕尔格麦斯特等对桁架结构提出的长度系数为 0.8^[14];Wardenier 等则提出对桁架结构在 2 个平面内的长度系数均取 0.9^[15];Bleich 研究了承受均布载荷的平面桁架结构中受压弦杆的等效长度系数,并以稳定理论分析为基础提出了其与桁架结构弦节间数的计算公式^[16];Razdolsky 研究了蛇形格构件中柱的弹性屈曲和长细比计算方法^[17-18]。

本文的研究对象是对称点对点式桁架臂,由于弦杆和 2 个平面的腹杆刚性连接,故弦杆同时受到 2 个平面腹杆空间的限制作用,弦杆的变形是空间的某个平面,因此弦杆的屈曲载荷大于等长度两端简支构件的屈曲载荷,也就是说弦杆单肢的等效长度系数小于 1。在工程实际中,桁架臂弦杆的单肢等效长度系数取为 1 是保守的。此外,毕尔格麦斯特等提出的长度系数计算公式都没有考虑不同规格腹杆对弦杆的影响程度,计算得到的弦杆屈曲载荷可能偏大,从而造成不安全因素^[14-16]。为了进一步

提高桁架臂的承载能力或实现桁架臂结构的轻量化,需要更精确的方法来确定弦杆单肢的长度系数。

利用有限元等数值方法计算这种复杂结构的屈曲载荷是一种非常有效的途径,但是该方法并不便于进行多工况、大规模的计算。为此,本文对对称点对点式桁架臂进行力学简化,考虑 2 个平面腹杆对弦杆空间的弯曲和扭转限制作用,建立力学模型,利用梁柱理论推导得到简化力学模型的稳定方程,通过 MATLAB 软件求解稳定方程得到弦杆单肢长度的屈曲载荷和变形平面,定量地对比和分析了这种形式桁架臂中 2 个平面内腹杆对弦杆的限制作用。为了工程实际应用方便,在满足计算精度的前提下,忽略了起次要作用腹杆的影响,推导了针对对称点对点式桁架臂弦杆单肢长度系数的简易计算方法,从而确定了弦杆单肢的屈曲载荷。

1 简化力学模型建立及力学推导

1.1 建立简化的力学模型

对称点对点式桁架臂结构如图 1 所示,从中取一段弦杆 AB 进行分析。弦杆 AB 的长度即是弦杆的单肢长度 2l。在弦杆 AB 范围内,与其相连的有 4 根腹杆,其中在 AZB 平面内与腹杆 AZ、BZ 相连;在 AYB 平面内与腹杆 AY、BY 相连。

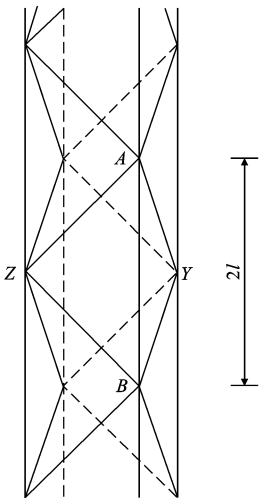


图 1 对称点对点式桁架臂结构

Fig. 1 Lattice boom structure of symmetric point to point type

弦杆 AB 段及与其相连腹杆的结构如下页图 2 所示。图中 b 为 Y 点到弦杆 AB 的距离,即臂架的宽度;h 为 Z 点到弦杆 AB 的距离,即臂架的高度; β 为腹杆 AY 或 BY 与弦杆 AB 的夹角; χ 为腹杆 AZ 或 BZ 与弦杆 AB 的夹角; I 和 I_P 为弦杆 AB 的惯

性矩和极惯性矩; I_Y 、 I_{PY} 分别为腹杆 AY 、 BY 的惯性矩和极惯性矩; I_Z 、 I_{PZ} 分别为腹杆 AZ 、 BZ 的惯性矩和极惯性矩。

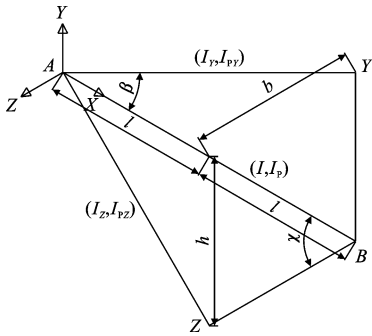
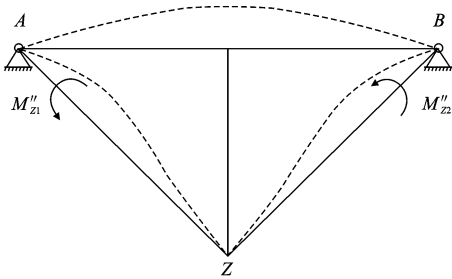


图 2 简化模型示意

Fig. 2 Schematic of simplified model

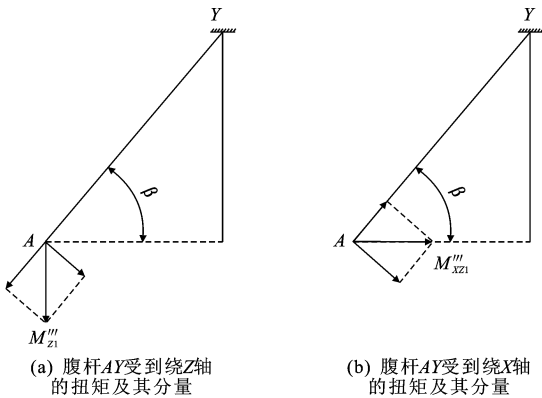
在 AZB 平面内,弦杆在 A 点受到腹杆 AZ 、 AY 绕 Z 轴的转动限制,如图 3、图 4 所示。



注: M''_{z1} 为腹杆 AZ 在 AZB 平面内受到的弯矩; M''_{z2} 为腹杆 BZ 在 AZB 平面内受到的弯矩。

图 3 在 AZB 平面内腹杆 AZ 的力学模型

Fig. 3 Mechanical models of web AZ in plane AZB



注: M'''_{z1} 为腹杆 AY 受到的绕 Z 轴的扭矩; M'''_{z2} 为腹杆 AY 受到的绕 X 轴的扭矩。

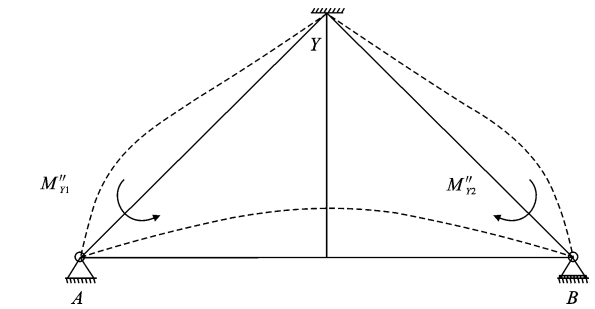
图 4 在 AZB 平面内腹杆 AY 的力学模型

Fig. 4 Mechanical models of web AY in plane AZB

同理,在 AYB 平面内,弦杆在 A 点受到腹杆 AY 、 AZ 绕 Y 轴的转动限制,如图 5、图 6 所示。

1.2 各点转角分析

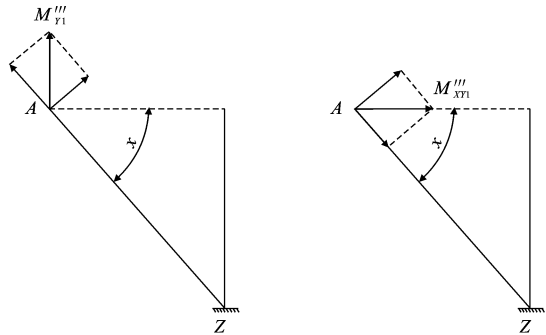
根据有弹性约束梁柱的相关公式^[19],得到 A 点



注: M''_{y1} 为腹杆 AY 在 AYB 平面内受到的弯矩; M''_{y2} 为腹杆 BY 在 AYB 平面内受到的弯矩。

图 5 在 AYB 平面内腹杆 AY 的力学模型

Fig. 5 Mechanical models of web AY in plane AYB



(a) 腹杆 AZ 受到绕 Y 轴的扭矩及其分量

(b) 腹杆 AZ 受到绕 X 轴的扭矩及其分量

注: M'''_{y1} 为腹杆 AZ 受到的绕 Y 轴的扭矩; M'''_{y2} 为腹杆 AZ 受到的绕 X 轴的扭矩。

图 6 在 AYB 平面内腹杆 AZ 的力学模型

Fig. 6 Mechanical models of web AZ in plane AYB

右侧转角为

$$\theta_1 = -\frac{M_1' 2l}{3EI} \psi(u) - \frac{M_2' 2l}{6EI} \varphi(u) \quad (1)$$

B 点左侧转角为

$$\theta_2 = -\frac{M_2' 2l}{3EI} \psi(u) - \frac{M_1' 2l}{6EI} \varphi(u) \quad (2)$$

式中: M_1' 为腹杆 AZ 、 AY 对弦杆 AB 在 A 点的综合限制弯矩; M_2' 为腹杆 BZ 、 BY 对弦杆 AB 在 B 点的综合限制弯矩; E 为弹性模量。

$\varphi(u)$ 、 $\psi(u)$ 和 u 为

$$\varphi(u) = \frac{3}{u} \left[\frac{1}{\sin(2u)} - \frac{1}{2u} \right] \quad (3)$$

$$\psi(u) = \frac{3}{2u} \left[\frac{1}{2u} - \frac{1}{\tan(2u)} \right] \quad (4)$$

$$u = \frac{2l}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}} \quad (5)$$

式中: P 为弦杆 AB 的屈曲载荷。

1.3 A 点平衡方程及位移协调方程

假设弦杆 AB 变形平面与 AZB 平面夹角为 γ , 将 M_1' 分解到 AZB 平面和 AYB 平面, 得到

$$M'_{Z1} = M'_1 \sin(\gamma) \quad (6)$$

$$M'_{Y1} = M'_1 \cos(\gamma) \quad (7)$$

对于 A 点,在 AZB 平面内的平衡方程为

$$-M'_{Z1} + M'_{Z1} + M''_{Z1} = 0 \quad (8)$$

在 AYB 平面内的平衡方程为

$$-M'_{Y1} + M'_{Y1} + M''_{Y1} = 0 \quad (9)$$

在 AZB 平面内根据位移协调得

$$\theta'_{Z1} = \theta''_{Z1} = \theta'''_{Z1} \quad (10)$$

在 AYB 平面内根据位移协调得

$$\theta'_{Y1} = \theta''_{Y1} = \theta'''_{Y1} \quad (11)$$

另外,绕弦杆自身方向的协调方程

$$\theta'_{X1} = \theta''_{XZ1} = \theta'''_{XY1} \quad (12)$$

式中: θ'_{Z1} 、 θ''_{Z1} 、 θ'''_{Z1} 分别为弦杆 AB、腹杆 AZ、AY 的 A 点在 AZB 平面内的转角; θ'_{Y1} 、 θ''_{Y1} 、 θ'''_{Y1} 分别为弦杆 AB、腹杆 AY、AZ 的 A 点在 AYB 平面内的转角; θ'_{X1} 、 θ''_{XZ1} 、 θ'''_{XY1} 分别为弦杆 AB、腹杆 AY、AZ 的 A 点绕 X 轴的扭转角。

由于 θ''_{Z11} 、 θ''_{Z12} 、 θ''_{Y11} 、 θ''_{Y12} 是 A 点在自身局部坐标系下的转角,而 θ'_{X1} 、 θ'_{Y1} 、 θ'_{Z1} 是 A 点在整体坐标系下的转角,它们之间的关系可以利用三维空间坐标的旋转算法得到^[20]。

在 AZB 平面内,绕 Z 轴旋转 χ 得到

$$\begin{bmatrix} \theta'_{X1} \\ \theta'_{Y1} \\ \theta'_{Z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\chi) & \sin(\chi) & 0 \\ -\sin(\chi) & \cos(\chi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta''_{Y11} \\ \theta''_{Y12} \\ \theta''_{Z1} \end{bmatrix} \quad (13)$$

在 AYB 平面内,绕 Y 轴旋转 $-\beta$ 得到

$$\begin{bmatrix} \theta'_{X1} \\ \theta'_{Y1} \\ \theta'_{Z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\beta) & 0 & -\sin(-\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(-\beta) & 0 & \cos(-\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta''_{Z11} \\ \theta''_{Y1} \\ \theta''_{Z12} \end{bmatrix} \quad (14)$$

由式(13)、式(14)得到下述 3 个方向的转角关系,绕 X 轴的转角为

$$\begin{aligned} \theta'_{X1} &= \theta''_{Y11} \cos(\chi) + \theta''_{Y12} \sin(\chi) = \\ &\theta''_{Z11} \cos(-\beta) - \theta''_{Z12} \sin(-\beta) \end{aligned} \quad (15)$$

绕 Y 轴的转角为

$$\theta'_{Y1} = -\theta''_{Y11} \sin(\chi) + \theta''_{Y12} \cos(\chi) \quad (16)$$

绕 Z 轴的转角为

$$\theta'_{Z1} = \theta''_{Z11} \sin(-\beta) + \theta''_{Z12} \cos(-\beta) \quad (17)$$

1.4 腹杆 AZ 和 AY 对弦杆的限制作用

1.4.1 腹杆 AZ 在 AZB 平面对弦杆弯曲的限制作用

腹杆 AZ 在 AZB 平面内对弦杆弯曲的限制作用如图 3 所示,可以简化为一端固定一端简支的超

静定梁。AZ 腹杆长为 $\sqrt{h^2 + l^2}$,在 A 点受 M'_{Z1} 的弯矩,且假设 A 点的 M'_{Z1} 与 θ'_{Z1} 方向相同,根据一端固定一端简支的超静定梁的转角公式^[21],可以求得 A 点的转角为

$$\theta''_{Z1} = \frac{M'_{Z1} \sqrt{h^2 + l^2}}{4EI_Z} \quad (18)$$

设 $\alpha''_{Z1} = 4EI_Z / \sqrt{h^2 + l^2}$,则式(18)转化为

$$\theta''_{Z1} = \frac{M'_{Z1}}{\alpha''_{Z1}} \quad (19)$$

1.4.2 腹杆 AY 在 AZB 平面内对弦杆弯曲的影响

腹杆 AY 在 AZB 平面内对弦杆弯曲的影响如图 4 所示。由于腹杆 AY 同时产生弯曲和扭转变形,故需将腹杆 AY 的弯曲和扭转对弦杆的限制作用分别进行分析。在 AZB 平面内腹杆 AY 扭转对弦杆的限制作用,可以将腹杆 AY 简化为一端固定一端铰接的梁,长为 $\sqrt{b^2 + l^2}$ 。假定 A 点在 AY 方向受到的扭矩为 M'_{Z11} ,由图 4 可知, M'_{Z11} 应为 M'_{Z1} 和 M'_{XZ1} 在 AY 方向的扭矩分量之和,即 A 点受 $M'_{Z11} = M'_{Z1} \sin(\beta) - M'_{XZ1} \cos(\beta)$ 的扭矩,且假设 A 点的 M'_{Z11} 与 θ'_{Z11} 方向相反,可以求得 A 点的扭转角 θ''_{Z11} 为

$$\theta''_{Z11} = -\frac{[M'_{Z1} \sin(\beta) - M'_{XZ1} \cos(\beta)] \sqrt{b^2 + l^2}}{GI_{PY}} \quad (20)$$

设 $\alpha''_{Z11} = GI_{PY} / \sqrt{b^2 + l^2}$,则式(20)转化为

$$\theta''_{Z11} = \frac{M'_{XZ1} \cos(\beta) - M'_{Z1} \sin(\beta)}{\alpha''_{Z11}} \quad (21)$$

式中: G 为弦杆和腹杆材料的剪切弹性模量。

在 AZB 平面内,腹杆 AY 对弦杆弯曲的限制作用可以简化为一端固定一端简支的超静定梁,腹杆 AY 长为 $\sqrt{b^2 + l^2}$ 。假定 A 点在垂直 AY 方向的扭矩为 M'_{Z12} ,由图 4 可知, M'_{Z12} 应为 M'_{Z1} 和 M'_{XZ1} 在垂直于 AY 方向的扭矩分量之和,即 $M'_{Z12} = M'_{Z1} \cos(\beta) + M'_{XZ1} \sin(\beta)$,且假设 A 点的 M'_{Z12} 与 θ'_{Z12} 方向相同,根据一端固定一端简支的超静定梁的转角公式^[21],可以求得 A 点的转角 θ''_{Z12} 为

$$\theta''_{Z12} = \frac{[M'_{Z1} \cos(\beta) + M'_{XZ1} \sin(\beta)] \sqrt{b^2 + l^2}}{3EI_Y} \quad (22)$$

设 $\alpha''_{Z12} = 3EI_Y / \sqrt{b^2 + l^2}$,则式(22)转化为

$$\theta''_{Z12} = \frac{M'_{Z1} \cos(\beta) + M'_{XZ1} \sin(\beta)}{\alpha''_{Z12}} \quad (23)$$

将式(21)、式(23)代入式(17)并化简,可得腹杆 AY 在 AZB 平面内对弦杆弯曲的限制作用为

$$\theta''_{Z1} = M'_{Z1} \left[\frac{\sin^2(\beta)}{\alpha''_{Z11}} + \frac{\cos^2(\beta)}{\alpha''_{Z12}} \right] +$$

$$M_{XZ1}'' \sin(\beta) \cos(\beta) \left(\frac{1}{\alpha_{Z12}''} - \frac{1}{\alpha_{Z11}''} \right) \quad (24)$$

$$\text{设 } \alpha_{ZZ1}'' = \frac{\alpha_{Z11}'' \alpha_{Z12}''}{\alpha_{Z11}'' \cos^2(\beta) + \alpha_{Z12}'' \sin^2(\beta)}, \alpha_{XZ1}'' = \frac{\alpha_{Z11}'' \alpha_{Z12}''}{\sin(\beta) \cos(\beta) (\alpha_{Z11}'' - \alpha_{Z12}'')}, \text{则式(24)转化为}$$

$$\theta_{Z1}'' = \frac{M_{Z1}''}{\alpha_{ZZ1}''} + \frac{M_{XZ1}''}{\alpha_{XZ1}''} \quad (25)$$

1.4.3 腹杆 AY 对弦杆自身扭转的影响

腹杆 AY 对弦杆自身扭转的限制作用可由式(21)、式(23)代入式(15)并化简得到

$$\theta_{X1}' = M_{Z1}'' \sin(\beta) \cos(\beta) \left[\frac{1}{\alpha_{Z12}''} - \frac{1}{\alpha_{Z11}''} \right] + M_{XZ1}'' \left[\frac{\cos^2(\beta)}{\alpha_{Z11}''} + \frac{\sin^2(\beta)}{\alpha_{Z12}''} \right] \quad (26)$$

将 α_{ZZ1}'' 和 α_{XZ1}'' 代入式(26),且根据式(13),则式(26)转化为

$$\theta_{X1}' = \theta_{XZ1}'' = \frac{M_{Z1}''}{\alpha_{XZ1}''} + \frac{M_{XZ1}''}{\alpha_{ZZ1}''} \quad (27)$$

1.4.4 腹杆 AY 在 AYZ 平面对弦杆弯曲的限制作用

如图 5 所示,与腹杆 AZ 在 AZB 平面内对弦杆的影响同理,可得腹杆 AY 在 AYZ 平面内对弦杆弯曲的限制作用为

$$\theta_{Y1}'' = \frac{M_{Y1}''}{\alpha_{Y1}''} \quad (28)$$

式中: $\alpha_{Y1}'' = 4EI_Y / \sqrt{b^2 + l^2}$ 。

1.4.5 腹杆 AZ 在 AYZ 平面对弦杆弯曲的限制作用

如图 6 所示,与腹杆 AY 在 AZB 平面内对弦杆弯曲的限制作用同理,可得腹杆 AZ 在 AYZ 平面内对弦杆弯曲的限制作用为

$$\theta_{Y1}'' = \frac{M_{Y1}''}{\alpha_{YY1}''} + \frac{M_{XY1}''}{\alpha_{XY1}''} \quad (29)$$

式中: $\alpha_{YY1}'' = \frac{\alpha_{Y11}'' \alpha_{Y12}''}{\alpha_{Y11}'' \cos^2(\chi) + \alpha_{Y12}'' \sin^2(\chi)}, \alpha_{XY1}'' = \frac{\alpha_{Y11}'' \alpha_{Y12}''}{\sin(\chi) \cos(\chi) (\alpha_{Y11}'' - \alpha_{Y12}'')}, \alpha_{Y11}'' = GI_{PZ} / \sqrt{h^2 + l^2}, \alpha_{Y12}'' = 3EI_Z / \sqrt{h^2 + l^2}$ 。

1.4.6 腹杆 AZ 对弦杆自身扭转的限制作用

与腹杆 AY 对弦杆自身扭转的限制作用同理,可得腹杆 AZ 对弦杆自身扭转的限制作用为

$$\theta_{X1}' = \theta_{XY1}'' = \frac{M_{Y1}''}{\alpha_{XY1}''} + \frac{M_{XY1}''}{\alpha_{YY1}''} \quad (30)$$

1.4.7 弦杆 AB 在 A 点绕 X 轴的扭矩及转角

弦杆 AB 在 A 点绕 X 轴的扭矩 T_{X1}' 应与腹杆 AY 和 AZ 的 M_{XZ1}'' 和 M_{XY1}'' 之和抵消,因此可以得到

$$M_{XZ1}'' + M_{XY1}'' = T_{X1}' \quad (31)$$

同时,弦杆 AB 在 A 点绕 X 轴的转角为

$$\theta_{X1}' = \frac{T_{X1}' l}{GI_P} \quad (32)$$

设 $\alpha_{X1}' = GI_P / l$,则式(32)转化为

$$\theta_{X1}' = \frac{T_{X1}'}{\alpha_{X1}'} \quad (33)$$

1.5 确定弦杆变形平面

由式(6)、式(7)、式(19)、式(25)、式(27)、式(28)、式(29)、式(30)、式(33)联立求解可得 M_{Z1}'' 、 M_{XZ1}'' 、 M_{Y1}'' 、 M_{XY1}'' 和 T_{X1}' 关于 M_1' 和 γ 的函数,弦杆变形方向可确定为

$$\gamma = \arctan(\theta_{Z1}'' / \theta_{Y1}'') \quad (34)$$

将关于 θ_{Z1}'' 、 θ_{Y1}'' 的式(19)、式(28)代入式(34),即可消掉 M_1' ,得到关于 γ 的函数,从而确定弦杆的失稳平面。

1.6 计算 A 点和 B 点的整体刚度

A 点整体的弯矩为 M_1' ,转角为 θ_1' ,那么 A 点的整体刚度 α_1 为

$$\alpha_1 = \frac{M_1'}{\theta_1'} = \frac{\sqrt{(M_{Z1}'' + M_{XZ1}'')^2 + (M_{Y1}'' + M_{XY1}'')^2}}{\sqrt{\theta_{Z1}''^2 + \theta_{Y1}''^2}} \quad (35)$$

将式(35)代入式(1)并整理得到

$$\left[\frac{\psi(u)2l}{3EI} + \frac{1}{\alpha_1} \right] M_1' + \frac{\varphi(u)2l}{6EI} M_2' = 0 \quad (36)$$

根据结构的对称性,B 点整体刚度 $\alpha_2 = \alpha_1$,则有

$$\alpha_2 = M_2' / \theta_2' = \alpha_1 \quad (37)$$

将式(37)代入式(2)并整理得到

$$\frac{\varphi(u)2l}{6EI} M_1' + \left[\frac{\psi(u)2l}{3EI} + \frac{1}{\alpha_1} \right] M_2' = 0 \quad (38)$$

1.7 确定稳定方程

将式(36)、式(38)整理得到关于 M_1' 和 M_2' 的方程组为

$$\begin{cases} \left[\frac{\psi(u)2l}{3EI} + \frac{1}{\alpha_1} \right] M_1' + \frac{\varphi(u)2l}{6EI} M_2' = 0 \\ \frac{\varphi(u)2l}{6EI} M_1' + \left[\frac{\psi(u)2l}{3EI} + \frac{1}{\alpha_1} \right] M_2' = 0 \end{cases} \quad (39)$$

要使上述弯曲平衡形式成为可能,即要得到这个方程的非平凡解,只有使 M_1' 和 M_2' 的系数行列式等于 0,则简化模型的稳定方程为

$$\begin{vmatrix} \frac{\psi(u)2l}{3EI} + \frac{1}{\alpha_1} & \frac{\varphi(u)2l}{6EI} \\ \frac{\varphi(u)2l}{6EI} & \frac{\psi(u)2l}{3EI} + \frac{1}{\alpha_1} \end{vmatrix} = 0 \quad (40)$$

2 算 例

2.1 算例说明

某型号履带起重机的臂架高度 $h=2\,300\text{ mm}$, 宽度 $b=2\,300\text{ mm}$, 弦杆规格为 $\Phi 219\times 20$, 计算得到其惯性矩 $I=6.25\times 10^7\text{ mm}^4$, 极惯性矩 $I_P=1.25\times 10^8\text{ mm}^4$, AZB 平面腹杆规格为 $\Phi 114.3\times 6.3$, 计算得到其惯性矩 $I_Z=3.13\times 10^6\text{ mm}^4$, 极惯性矩 $I_{PZ}=6.25\times 10^6\text{ mm}^4$; AYB 平面腹杆规格为 $\Phi 114.3\times 5.8$, 计算得到其惯性矩 $I_Y=2.92\times 10^6\text{ mm}^4$, 极惯性矩 $I_{PY}=5.84\times 10^6\text{ mm}^4$, 单肢长度一半 $l=2\,300\text{ mm}$ 。

2.2 计算结果

2.2.1 MATLAB 计算结果

将相关参数代入式 (34), 利用 MATLAB 求解得到 2 个弦杆变形平面与 AZB 平面夹角, 它们分别为 $\gamma_1=1.184\,4\text{ rad}$ 和 $\gamma_2=2.755\,2\text{ rad}$, 转化为角度分别为 67.86° 和 157.86° 。

当 $\gamma_1=1.184\,4\text{ rad}$ 时, 将相关参数代入式 (35), 利用 MATLAB 求解 A 点的整体刚度 $\alpha_1=1.179\,9\times 10^9\text{ (N}\cdot\text{mm)/rad}$ 。进一步将相关参数代入稳定方程式 (40), 得到屈曲载荷的近似值为 $7.107\,7\times 10^6\text{ N}$ 。同理, 当 $\gamma_2=2.755\,2\text{ rad}$ 时, A 点的整体刚度 $\alpha_1=1.142\,6\times 10^9\text{ (N}\cdot\text{mm)/rad}$, 屈曲载荷的近似值为 $7.079\,0\times 10^6\text{ N}$ 。

2.2.2 简化模型的有限元计算结果

在 ANSYS 有限元软件中建立简化模型的有限元模型, 在 B 点施加 $1\times 10^6\text{ N}$ 的载荷, 利用 ANSYS 的屈曲特征值功能计算得到结构的前两阶乘子分别为 7.033 7 和 7.067 7, 对应的屈曲载荷为 $7.033\,7\times 10^6\text{ N}$ 和 $7.067\,7\times 10^6\text{ N}$, 屈曲模态如图 7、图 8 所示。

2.2.3 实际结构梁模型的有限元计算结果

建立桁架臂实际结构梁单元的有限元模型, 同样在端部每个弦杆上施加 $1\times 10^6\text{ N}$ 的载荷, 计算此模型的一阶、二阶屈曲模式如下页图 9、图 10 所示。

另外保持单肢长度不变, 桁架臂整个长度增加, 弦杆的跨数也随之增加, 不同跨数的模型计算得到的屈曲载荷见下页表 1。由表 1 可以得到, 跨数越大, 单肢长度弦杆两端受到的限制作用越均匀, 弦杆的屈曲载荷接近于利用本文简化力学模型得到的计算结果, 这表明本文的力学模型是合理的。

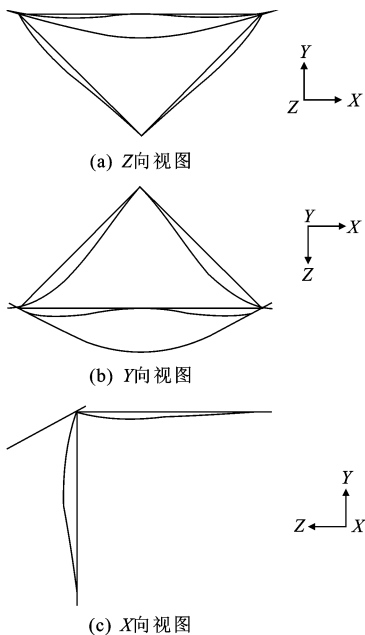


图 7 利用有限元计算得到简化力学模型的一阶屈曲模态
Fig. 7 First order buckling mode of simplified mechanical model by FEM

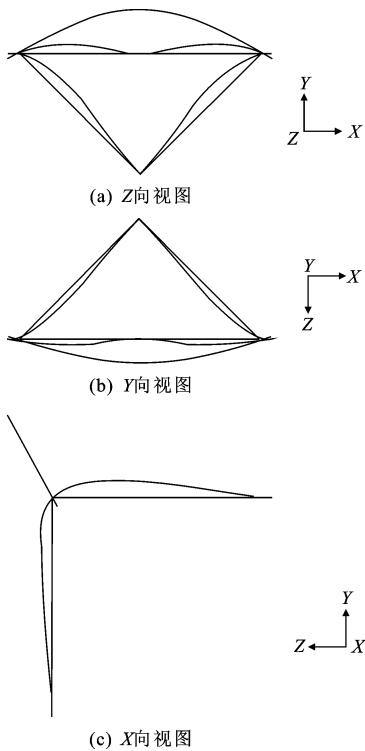


图 8 利用有限元计算得到简化力学模型的二阶屈曲模态
Fig. 8 Second order buckling mode of simplified mechanical model by FEM

2.3 结果对比

将上述 3 种结果汇总, 如下页表 2 所示, 表中还列出了同样单肢长度的弦杆两端约束分别为两端简支和一端固定一端简支的梁的屈曲载荷。表中利用

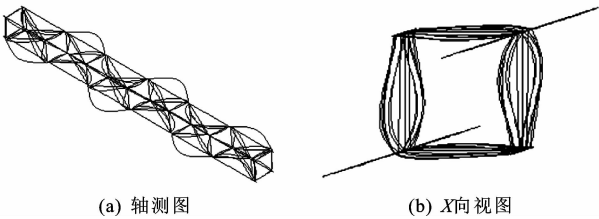


图 9 利用有限元计算得到实际结构的一阶屈曲模式
Fig. 9 First order buckling modes of actual structure by FEM

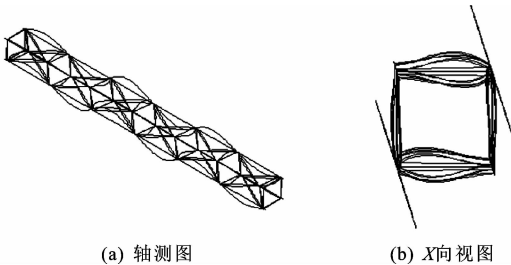


图 10 利用有限元计算得到实际结构的二阶屈曲模式
Fig. 10 Second order buckling modes of actual structure by FEM

表 1 不同跨数实际结构的屈曲特征值计算结果
Tab. 1 Eigenvalue buckling results of actual structures with different spans

跨数	一阶屈曲载荷/N	二阶屈曲载荷/N
1	$8.636\ 3\times10^6$	$8.812\ 5\times10^6$
2	$7.969\ 3\times10^6$	$8.058\ 8\times10^6$
3	$7.392\ 8\times10^6$	$7.457\ 5\times10^6$
4	$7.234\ 0\times10^6$	$7.284\ 8\times10^6$
5	$7.098\ 5\times10^6$	$7.141\ 7\times10^6$
6	$7.030\ 3\times10^6$	$7.069\ 4\times10^6$

表 3 2 个平面内腹杆对弦杆的影响程度

Tab. 3 Effect on chord by webs members of two planes

计算方法	阶数	限制刚度/(N·mm·rad ⁻¹)	屈曲载荷/N	长度系数 μ	变形平面/(°)
考虑 2 组腹杆	一阶	$1.142\ 6\times10^9$	$7.079\ 0\times10^6$	0.930 1	157.86
	二阶	$1.179\ 9\times10^9$	$7.107\ 7\times10^6$	0.928 2	67.86
考虑 AYZ 平面腹杆		$6.977\ 1\times10^8$	$6.717\ 0\times10^6$	0.940 8	0.00
考虑 AZB 平面腹杆		$8.075\ 8\times10^8$	$6.955\ 4\times10^6$	0.938 3	90.00

由于 AYZ 平面的腹杆决定的刚度 α''_{y1} 比 AZB 平面的腹杆决定的刚度 α''_{z1} 小,因此单独考虑 AYZ 平面的腹杆计算得到屈曲载荷要比单独考虑 AZB 平面的腹杆计算得到屈曲载荷偏小一些。虽然单独考虑 AZB 平面的腹杆计算得到屈曲载荷与单独考虑 AYZ 平面的腹杆计算得到屈曲载荷相比,更接近考虑 2 个平面腹杆的一阶屈曲载荷,但是考虑到如果 2 个平面内腹杆刚度相差较大,屈曲变形将严重地偏向于腹杆刚度较弱的平面,因此选取腹杆刚度较弱平面计算得到的屈曲载荷作为弦杆单肢屈曲

表 2 屈曲载荷及变形平面计算结果对比

Tab. 2 Comparison on buckling loads and deformation plane results

计算方法	阶数	屈曲载荷/N	长度系数 μ	变形平面/(°)
MATLAB 计算	一阶	$7.079\ 0\times10^6$	0.930 1	157.86
	二阶	$7.107\ 7\times10^6$	0.928 2	67.86
简化模型有限元	一阶	$7.033\ 7\times10^6$	0.933 1	155.72
	二阶	$7.067\ 7\times10^6$	0.930 8	65.72
实际结构有限元	一阶	$7.030\ 3\times10^6$	0.933 3	162.35
	二阶	$7.069\ 4\times10^6$	0.930 7	72.35
两端简支		$6.123\ 7\times10^6$	1.000 0	
一端固定一端简支		$1.247\ 0\times10^7$	0.700 0	

注:变形平面为变形平面与 AZB 平面的夹角。
梁柱理论建立简化力学模型计算得到的屈曲载荷与简化模型和实际结构有限元计算得到的屈曲载荷非常接近,变形平面也非常接近,验证了本文计算方法的正确性。将弦杆简化成两端简支方式过于保守,而简化成一端固定一端简支则导致估计的屈曲载荷过大,都与实际情况有较大的差别。利用本文计算方法得到的结果考虑了腹杆对弦杆的综合空间限制作用,显然更符合实际情况。

3 讨论

3.1 单独考虑某个平面腹杆计算结果

鉴于同时考虑 2 个平面腹杆的力学模型和计算过程的复杂性,且屈曲变形平面通常又不是关心的重点,寻找一种近似的简便计算方法是非常有必要的。同时考虑 2 个平面腹杆与单独考虑单个平面腹杆计算得到屈曲载荷结果如表 3 所示。

载荷更为合理和安全。这种替代计算方式在保证安全的同时,将空间力学问题转化为平面力学问题,大大地简化了弦杆单肢屈曲载荷的计算过程。

3.2 简化计算方法

根据上述分析,对于对称点对点式桁架臂结构,以单独考虑对弦杆约束较弱平面腹杆计算得到的屈曲载荷近似作为弦杆单肢的屈曲载荷,需先对 2 个平面内的腹杆对弦杆的约束刚度进行比较。2 个平面腹杆对弦杆的转动限制刚度 α''_{z1} 和 α''_{y1} ,取其较小值 α

$$\alpha=\min(\alpha_{z1}^{\prime\prime},\alpha_{y1}^{\prime\prime})\tag{41}$$

以 α 代替式(40)中的 α_1 ,稳定方程转化为

$$\begin{vmatrix} \frac{\psi(u)2l}{3EI}+\frac{1}{\alpha} & \frac{\varphi(u)2l}{6EI} \\ \frac{\varphi(u)2l}{6EI} & \frac{\psi(u)2l}{3EI}+\frac{1}{\alpha} \end{vmatrix}=0\tag{42}$$

利用长度系数 μ 表达 P_{cr} 为

$$P_{cr}=\frac{\pi^2EI}{\mu^2(2l)^2}\tag{43}$$

对比式(5)和式(43),可得 μ 和 u 的关系为

$$\mu=\frac{\pi}{2u}\tag{44}$$

弦杆的边界条件介于两端简支和一端固定、一端简支之间,故 μ 的范围为 $0.7\sim 1.0$,反推 u 的范围为 $[\pi/2,\pi/1.4]$ 。

对式(42)进行整理得到

$$\begin{aligned} & \left[2\psi(u)+\varphi(u)+\frac{3EI}{\alpha l}\right]\cdot \\ & \left[2\psi(u)-\varphi(u)+\frac{3EI}{\alpha l}\right]=0 \end{aligned}\tag{45}$$

$$\left[\frac{\tan(u)}{u}+\frac{EI}{\alpha l}\right]\left[\frac{1-u\cot(u)}{u^2}+\frac{EI}{\alpha l}\right]=0\tag{46}$$

式(46)要成立,有 2 种可能:一种是

$$\frac{1-u\cot(u)}{u^2}=-\frac{EI}{\alpha l}\tag{47}$$

在 u 的取值范围 $[\pi/2,\pi/1.4]$ 内, $f_1(u)=\frac{1-u\cot(u)}{u^2}$,如图 11 所示,恒大于 0。由于 $-\frac{EI}{\alpha l}<0$,显然式(47)不能成立。

所以只有另外一种可能

$$\frac{\tan(u)}{u}=-\frac{EI}{\alpha l}\tag{48}$$

在 u 的取值范围 $[\pi/2,\pi/1.4]$ 内超越方程 $f_2(u)=\frac{\tan(u)}{u}$,如图 11 所示。由于 $-\frac{EI}{\alpha l}<0$,故式(48)可以成立。

求解式(48)超越方程中未知数 u 的常用方法一般有 2 种:①利用图形求解,只要确定了一 $\frac{EI}{\alpha l}$,在图 11 中就可以大致确定 u ;②利用编程进行搜索近似解。在确定 u 的近似解以后,根据式(44)确定弦杆屈曲的长度系数 μ 。

4 结 语

(1)通过建立对称点对点式桁架臂弦杆与腹杆相互作用的力学模型及弦杆的稳定方程,对其进行

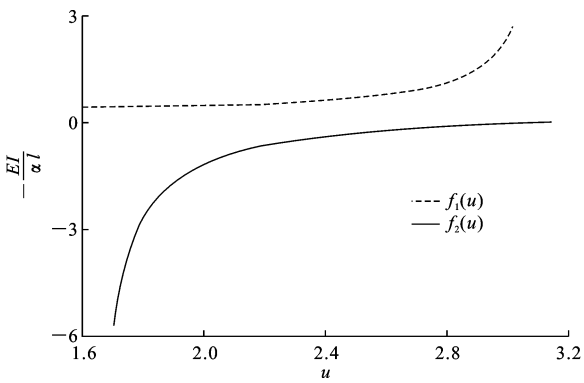


图 11 $f_1(u)$ 和 $f_2(u)$ 随 u 的曲线

Fig. 11 Curves of $f_1(u)$ and $f_2(u)$ with u

求解,与有限元计算结果进行比较,验证了力学模型的正确性。

(2)单独考虑对弦杆约束较弱平面腹杆计算得到的屈曲载荷近似作为弦杆单肢的屈曲载荷,极大地简化了计算过程。

(3)对稳定方程进行化简,确定了利用求解超越方程来计算弦杆单肢长度系数的方法,方便了工程实际的应用。

(4)确定桁架臂弦杆单肢的屈曲载荷是计算弦杆单肢稳定性的第 1 步,计算弦杆单肢稳定性还需要有可靠和准确的轴压构件的稳定性系数表。目前,履带起重机桁架臂普遍使用的是屈服极限在 700 MPa 以上的高强钢圆管,而当前相关规范中的稳定性系数表或计算公式是否适合高强钢或还有多少余量并未得到试验的验证,这将是下一步研究的一个重点。

参考文献:

References:

[1] 刘建华. 起重机桁架臂弦腹杆刚度匹配研究[D]. 大连:大连理工大学,2013.
LIU Jian-hua. Research on crane truss structure chord and webs stiffness matching[D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2013. (in Chinese)

[2] 胡燕东. 工程起重机中超静定桁架结构的弹性稳定性分析[D]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学,2010.
HU Yan-dong. The elastic stability analysis of indeterminate truss structure in construction crane[D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2010. (in Chinese)

[3] 陈玮璋. 起重运输机金属结构设计[M]. 北京:人民交通出版社,1986.
CHEN Wei-zhang. Design of metal structures in lift-

- ing and transport[M]. Beijing:China Communications Press,1986. (in Chinese)
- [4] 徐克晋. 金属结构[M]. 北京:机械工业出版社,1982.
XU Ke-jin. Metal structures[M]. Beijing:China Machine Press,1982. (in Chinese)
- [5] 王金诺. 起重运输机金属结构[M]. 北京:中国铁道出版社,1984.
WANG Jin-nuo. Metal structures of lifting and transport[M]. Beijing:China Railway Publishing House, 1984. (in Chinese)
- [6] 徐格宁. 起重运输机金属结构设计[M]. 北京:机械工业出版社,1997.
XU Ge-ning. Design of metal structures in lifting and transport[M]. Beijing:China Machine Press,1997. (in Chinese)
- [7] GB 50017—2003, 钢结构设计规范[S].
GB 50017—2003, Code for design of steel structures [S]. (in Chinese)
- [8] BS 2573-1:1983, Rules for the design of cranes part 1: specification for classification, stress calculations and design criteria for structures[S].
- [9] SAE J987-1994, Rope supported lattice-type boom crane structures;method of test[S].
- [10] 陈绍蕃. 钢结构稳定设计指南[M]. 北京:中国建筑工业出版社,2004.
CHEN Shao-fan. Guide to stability design of steel structures[M]. Beijing:China Architecture & Building Press,2004. (in Chinese)
- [11] 王伟,陈以一. 节点半刚性钢桁架受压腹杆计算长度分析[J]. 工程力学,2005,22(5):131-135.
WANG Wei, CHEN Yi-yi. Analysis of effective length of compressive braces in semi-rigid steel trusses[J]. Engineering Mechanics,2005,22(5):131-135. (in Chinese)
- [12] MAGEIROU G E, GANTES C J. Buckling strength of multi-story sway, non-sway and partially-sway frames with semi-rigid connections [J]. Journal of Constructional Steel Research,2006,62(9):893-905.
- [13] BOEL H. Buckling length factors of hollow section members in lattice girders[D]. Eindhoven:Eindhoven University of Technology,2010.
- [14] 毕尔格麦斯特 G, 斯托依普 H. 稳定理论下卷[M]. 戴天民, 赵其昌, 陈醒辉, 等译. 北京:中国建筑工业出版社,1974.
BURGERMEISTER G, STEUP H. Stability theory Volume 2[M]. Translated by DAI Tian-min, ZHAO Qi-chang, CHEN Xing-hui, et al. Beijing:China Architecture & Building Press,1974. (in Chinese)
- [15] WARDENIER J, KUROBANE Y, PACKER J A, et al. Design guide for circular hollow section (CHS) joints under predominantly static loading[M]. Rheinland:TUV,1991.
- [16] 柏拉希 F. 金属结构的屈曲强度[M]. 同济大学钢木结构教研室译. 北京:科学出版社,1965.
Bleich F. Buckling strength of metal structures[M]. Translated by Tongji University, Department of Steel and Wood Structure. Beijing:Science Press,1965. (in Chinese)
- [17] RAZDOLSKY A G. Flexural buckling of laced column with serpentine lattice[J]. The IES Journal Part A: Civil & Structural Engineering,2010,3(1):38-49.
- [18] RAZDOLSKY A G. Calculation of slenderness ratio for laced columns with serpentine and crosswise lattices[J]. Journal of Constructional Steel Research, 2011,67(1):25-29.
- [19] 铁摩辛柯 S P, 盖莱 J M. 弹性稳定理论[M]. 张福范译. 北京:科学出版社,1965.
TIMOSHENKO S P, GERE J M. Theory of elastic stability[M]. Translated by ZHANG Fu-fan. Beijing: Science Press,1965. (in Chinese)
- [20] 柯金朴. 空间三维坐标转换原理及实现[J]. 江西测绘,2008(3):16-17,20.
KE Jin-pu. Principle and implementation of three-dimensional coordinate space conversion[J]. Surveying and Mapping of Jiangxi,2008(3):16-17,20. (in Chinese)
- [21] 《建筑结构静力计算手册》编写组. 建筑结构静力计算手册[M]. 第2版. 北京:中国建筑工业出版社,1998.
Editors of Static Computation Handbook for Building Structures. Static computation handbook for building structures [M]. 2nd ed. Beijing:China Architecture & Building Press,1998. (in Chinese)