

文章编号:1671-8879(2016)03-0056-08

# 基于独立振型的大跨度桥梁风致抖振响应分析

董 锐<sup>1,2</sup>, 葛耀君<sup>2</sup>, 杨咏昕<sup>2</sup>, 韦建刚<sup>1</sup>

(1. 福州大学 土木工程学院, 福建 福州 350108; 2. 同济大学 土木工程防灾国家重点实验室, 上海 200092)

**摘 要:**为分析大跨桥梁在脉动风作用下的抖振响应, 针对传统桥梁抖振计算采用的广义振型为三维空间状态, 分析过程复杂等问题, 提出基于独立振型的抖振分析思路, 以经典结构动力学理论和风洞试验为基础, 根据能量守恒原理, 将以广义振型表示的抖振响应分析过程表达为易于采用矩阵表示的  $n$  个独立振型的形式, 使得结构动力计算由三维空间状态转化为一维状态, 简化了分析过程, 并且很容易获得关心自由度上的抖振响应, 在此基础上, 采用该方法对 1 座主跨 800 m 的三跨悬索桥进行了抖振响应分析。研究结果表明: 由于大跨度桥梁主梁刚度较小, 其在脉动风作用下的抖振位移响应数值较大, 结构设计中不能忽略。

**关键词:**桥梁工程; 抖振响应; 广义振型; 独立振型; 能量守恒

**中图分类号:**U441.3; TU311.3 **文献标志码:**A

## Buffeting response analysis of long-span bridge based on mode shapes of orthogonal DOF

DONG Rui<sup>1,2</sup>, GE Yao-jun<sup>2</sup>, YANG Yong-xin<sup>2</sup>, WEI Jian-gang<sup>1</sup>

(1. College of Civil Engineering, Fuzhou University, Fuzhou 350108, Fujian, China; 2. State Key Laboratory of Disaster Reduction in Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

**Abstract:** In order to analyze buffeting response of long-span bridge subject to gust wind, and solve the problem of complexity of traditional buffeting analysis method in which the generalized mode-shape is corresponding to one special state of the structure in space, a method based on mode shapes of orthogonal DOF (degree of freedom) was proposed in this paper. Based on dynamics of structure and wind tunnel experiment, this paper derived bridge's buffeting response in form of mode-shapes of orthogonal DOF. Every mode-shape of orthogonal DOF could be expressed by one DOF of structure. According to the principle of conservation of energy, the generalized mode-shapes were instead by mode shapes of orthogonal DOF which simplified the buffeting analysis, and the concern dynamic responses could be obtained easily. Finally, the above method was used to calculate buffeting responses of a three span suspension bridge with main span of 800 m. The results show that the buffeting responses of long-span bridges are large and cannot be ignored in design. 1 tab, 3 figs, 20 refs.

**Key words:** bridge engineering; buffeting response; generalized mode shape; mode shape of or-

收稿日期:2015-12-18

基金项目:国家自然科学基金项目(51508107);桥梁结构抗风技术交通行业重点实验室开放课题项目(KLWRTBMC14-03);桥梁工程结构动力学国家重点实验室开放基金项目(201502);广西防灾减灾与工程安全重点实验室开放课题项目(2014ZDK001)

作者简介:董 锐(1982-),男,山东滨州人,福州大学助理研究员,同济大学工学博士,E-mail:dongruifu@126.com。

thogonal DOF; conservation of energy

## 0 引言

抖振是大跨度桥梁结构的主要风致振动形式之一,主要由自然风固有的紊流特性以及风流经钝体结构产生的特征紊流所致<sup>[1]</sup>。在实际工程中,绝大部分的桥梁抖振主要由自然风中的脉动成分引起,是一种限幅随机振动。虽然抖振不会像颤振和驰振那样引起桥梁结构的毁灭式破坏,但是随着桥梁跨度的增大,结构刚度逐渐减小,抖振响应显著增强,容易引起结构的疲劳破坏,并严重影响行人、行车安全性和舒适性。对于大跨度柔性桥梁,为保证结构的设计安全,必须考虑抖振响应。

大跨度桥梁的抖振计算涉及随机振动理论、结构动力学、风荷载特性以及风与桥梁的相互作用,是一件非常复杂的工作。20世纪60年代,Davenport首先将概率统计方法引入到大跨度桥梁等柔性结构的风致响应计算中,并建立了Davenport抖振计算模型<sup>[2-4]</sup>。Davenport抖振模型只考虑抖振力,而忽略自激力的影响。同时,为修正脉动风的非定常性所引起的误差,Davenport还考虑了气动导纳的影响。Scanlan抖振计算模型同时考虑了自激力和抖振力的影响,却偏安全地忽略了气动导纳<sup>[5-10]</sup>。Davenport模型和Scanlan模型奠定了桥梁抖振计算的基本框架,在此基础上,后来学者进行了改进,采用Scanlan模型处理自激力,采用考虑气动导纳的Davenport模型处理抖振力<sup>[11-13]</sup>。无论是自激力还是抖振力,通常情况下其表达式中的参数均需要通过风洞试验获得。目前,大跨度桥梁的抖振计算基本上都是采用该方式进行。

传统的结构风致抖振响应分析通常采用广义振型的形式给出,每个广义振型对应着结构在空间中的一种特定状态,其数学表达式非常复杂。在实际工程中,结构工程师关心的通常不是所有空间位置上的结构动力响应,而是结构在某个自由度方向(如竖向、轴向或扭转方向等)上的动力响应。如果将以结构广义振型形式表达的动力方程转化为 $n$ 个独立自由度上的振型形式,将会很方便地获得结构所关心自由度上的动力响应,给问题的解决带来很大便利。同时,每个自由度方向上的各独立振型可以通过现有的有限元程序非常方便地获得,并且也很容易表达为数学中的矩阵形式。基于此,本文以经典结构动力学理论和风洞试验为基础,从能量守恒原

理出发将广义振型形式的抖振分析过程表达为 $n$ 个独立自由度上的振型形式,简化了分析过程,同时对其转换过程和机理进行了详细推导和分析<sup>[14-15]</sup>。最后,以某主跨800 m的三跨悬索桥为例,采用上述方法对其抖振响应进行了分析。

## 1 基于独立振型的结构动力方程

对于多自由度体系线性结构,根据D'Alembert原理,结构动力方程可以表达为惯性力、阻尼力、弹性恢复力和外力的平衡,即

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{F} \quad (1)$$

式中: $\mathbf{M}$ 、 $\mathbf{C}$ 、 $\mathbf{K}$ 分别为结构的质量、阻尼和刚度矩阵; $\mathbf{q}$ 、 $\dot{\mathbf{q}}$ 、 $\ddot{\mathbf{q}}$ 、 $\mathbf{F}$ 分别为结构的节点位移、速度、加速度和节点力向量。

根据结构动力振型叠加法,结构的节点位移向量 $\mathbf{q}$ 可表示为结构振型和振型坐标的形式

$$\mathbf{q} = \Phi \xi \quad (2)$$

式中: $\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_1^1 & \cdots & \Phi_{n_{\text{mode}}}^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \Phi_1^{n_{\text{node}}} & \cdots & \Phi_{n_{\text{mode}}}^{n_{\text{node}}} \end{bmatrix}$ ,为结构的广义空间

振型矩阵,每一列分别表示结构在空间中的一个特定状态,为 $n_{\text{node}} \times n_{\text{mode}}$ 阶矩阵,其中 $n_{\text{node}}$ 为结构节点的数量, $n_{\text{mode}}$ 为结构振型的数量,等于结构总自由度数; $\xi = \{\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_{n_{\text{mode}}}(t)\}^T$ 为振型坐标向量。

将式(2)代入式(1)得

$$\mathbf{M}\Phi\ddot{\xi} + \mathbf{C}\Phi\dot{\xi} + \mathbf{K}\Phi\xi = \mathbf{F} \quad (3)$$

式(3)两侧均为力向量,实际上是结构系统的力平衡方程,在此基础上进行的计算属于矢量运算。在式(3)的两边同左乘 $\Phi^T$ 得

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi \ddot{\xi} + \Phi^T \mathbf{C} \Phi \dot{\xi} + \Phi^T \mathbf{K} \Phi \xi = \Phi^T \mathbf{F} \quad (4)$$

令 $\bar{\mathbf{M}} = \Phi^T \mathbf{M} \Phi$ ,  $\bar{\mathbf{C}} = \Phi^T \mathbf{C} \Phi$ (假设阻尼为正交阻尼),  $\bar{\mathbf{K}} = \Phi^T \mathbf{K} \Phi$ 分别为多自由度体系结构的广义质量、阻尼和刚度矩阵,  $\bar{\mathbf{F}} = \Phi^T \mathbf{F}$ 为结构的广义节点力向量,于是式(4)可表示为

$$\bar{\mathbf{M}}\ddot{\xi} + \bar{\mathbf{C}}\dot{\xi} + \bar{\mathbf{K}}\xi = \bar{\mathbf{F}} \quad (5)$$

式(5)两侧为式(4)中的力向量在各阶振型上所作的功向量,为能量守恒方程,属于标量运算。当使用有限单元法对土木工程中的空间结构进行动力分析时,通常每个节点可以用6个相互独立的自由度表示,  $\mathbf{q} \Leftrightarrow (X, Y, Z, \text{Rot}X, \text{Rot}Y, \text{Rot}Z)$ , 即3个平动

自由度和 3 个转动自由度。为了表示更一般的情况,此处设每个节点用正交的  $n$  个自由度  $\{Q_1, \dots, Q_n\}$  表示,对于整个结构存在如下关系:  $q \Leftrightarrow \{Q_1, \dots, Q_n\}$ , 其中  $\Leftrightarrow$  为等价符号,表示两者之间存在等价关系。与之对应,节点力向量也可以采用  $n$  个独立自由度上的节点力  $\{P_1, \dots, P_n\}$  表示,即  $F \Leftrightarrow \{P_1, \dots, P_n\}$ 。将式(5)中惯性力、阻尼力、弹性恢复力和外力在各阶振型上所做的功  $W_I, W_C, W_K$  和  $W_F$  分别写成矩阵的形式

$$\begin{cases} W_I = \bar{M}\dot{\xi} = \Phi^T M \Phi \dot{\xi} = \Phi^T M \dot{q} = \sum_{j=1}^n \Phi_{Q_j}^T M \dot{Q}_j \\ W_C = \bar{C}\dot{\xi} = \Phi^T C \Phi \dot{\xi} = \Phi^T C \dot{q} = \sum_{j=1}^n \Phi_{Q_j}^T C \dot{Q}_j \\ W_K = \bar{K}\xi = \Phi^T K \Phi \xi = \Phi^T K q = \sum_{j=1}^n \Phi_{Q_j}^T K Q_j \\ W_F = \Phi^T F \Phi_{Q_j}^T P_j \end{cases} \quad (6)$$

根据能量守恒原理,得  $W_I + W_C + W_K = W_F$ , 即

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \Phi_{Q_j}^T M \dot{Q}_j + \sum_{j=1}^n \Phi_{Q_j}^T C \dot{Q}_j + \\ & \sum_{j=1}^n \Phi_{Q_j}^T K Q_j = \sum_{j=1}^n \Phi_{Q_j}^T P_j \end{aligned} \quad (7)$$

将  $n$  个独立自由度  $\{Q_1, \dots, Q_n\}$  表示为相应自由度上的振型与振型坐标的形式

$$\{Q_1, \dots, Q_n\} = \{\Phi_{Q_1} \xi, \dots, \Phi_{Q_n} \xi\} \quad (8)$$

将式(8)代入式(7)得

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \Phi_{Q_j}^T M \Phi_{Q_j} \dot{\xi} + \sum_{j=1}^n \Phi_{Q_j}^T C \Phi_{Q_j} \dot{\xi} + \\ & \sum_{j=1}^n \Phi_{Q_j}^T K \Phi_{Q_j} \xi = \sum_{j=1}^n \Phi_{Q_j}^T P_j \end{aligned} \quad (9)$$

振型关于质量、阻尼和刚度矩阵的正交性均是针对广义振型  $q \Leftrightarrow \{Q_1, \dots, Q_n\}$ , 而非任何一个  $Q_i$ 。广义振型是一种多维振型,本文所指的独立振型是指按照某一个自由度  $Q_j$  单独排列的振型,是一种一维振型,两者之间存在如下关系

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n \Phi_{Q_j}^T M \Phi_{Q_j} = \Phi_q^T M \Phi_q = \bar{M} \\ \sum_{j=1}^n \Phi_{Q_j}^T C \Phi_{Q_j} = \Phi_q^T C \Phi_q = \bar{C} \\ \sum_{j=1}^n \Phi_{Q_j}^T K \Phi_{Q_j} = \Phi_q^T K \Phi_q = \bar{K} \\ \sum_{j=1}^n \Phi_{Q_j}^T P_j = \Phi_q^T F = \bar{F} \end{cases} \quad (10)$$

于是,结构动力响应的求解转化为对结构振型坐标向量  $\xi$  的求解,为便于分析,式(10)左侧通常仍

采用  $q$  的形式表示,于是式(9)简化为

$$\bar{M}\dot{\xi} + \bar{C}\dot{\xi} + \bar{K}\xi = \sum_{j=1}^n \Phi_{Q_j}^T P_j \quad (11)$$

式(9)和式(11)即为基于独立振型的空间结构动力控制方程。在空间结构有限元计算中,结构振型通常按照 2 种形式给出:关于质量矩阵归一,即  $\bar{M} = \Phi^T M \Phi = I$ ; 或按照最大值归一,即在  $\Phi$  中令  $\Phi_{i(\max)}^j = 1$ 。在结构动力响应计算中,采用质量矩阵归一的振型形式更加方便。式(11)的两侧同时左乘  $\bar{M}^{-1}$  得

$$I\dot{\xi} + \bar{M}^{-1}\bar{C}\dot{\xi} + \bar{M}^{-1}\bar{K}\xi = \bar{M}^{-1} \sum_{j=1}^n \Phi_{Q_j}^T P_j \quad (12)$$

式中:  $I, \bar{M}^{-1}\bar{C} = \Lambda_c = \text{diag}(2\zeta_1\omega_1, \dots, 2\zeta_{n_{\text{mode}}}\omega_{n_{\text{mode}}})$ ,  $\bar{M}^{-1}\bar{K} = \Lambda_\omega = \text{diag}(\omega_1^2, \dots, \omega_{n_{\text{mode}}}^2)$  分别为单位矩阵、对角阻尼矩阵和对角频率矩阵,其中,  $\zeta_i$  和  $\omega_i$  分别为空间结构第  $i$  阶振型阻尼比和无阻尼体系的第  $i$  阶圆频率。

根据振型的正交性

$$\bar{M} = \Phi^T M \Phi \quad (13)$$

$$\bar{M}_{ij} = \sum_{k=1}^{n_{\text{node}}} \Phi_i^k m_k \Phi_j^k =$$

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n_{\text{node}}} \Phi_i^k m_k \Phi_j^k & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, n_{\text{mode}} \quad (14)$$

当结构振型采用关于质量矩阵归一时,  $\bar{M} = \bar{M}^{-1} = I$ , 于是结构动力方程可进一步简化为

$$I\dot{\xi} + \Lambda_c\dot{\xi} + \Lambda_\omega\xi = I \sum_{j=1}^n \Phi_{Q_j}^T P_j = \sum_{j=1}^n \Phi_{Q_j}^T P_j \quad (15)$$

于是,空间结构的动力方程转化为  $n_{\text{mode}}$  个基于独立振型的单自由度体系的运动方程

$$\begin{aligned} & \ddot{\xi}_i(t) + 2\zeta_i\omega_i\dot{\xi}_i(t) + \omega_i^2\xi_i(t) = \\ & \sum_{j=1}^n \Phi_{Q_j}^T P_j \quad i = 1, 2, \dots, n_{\text{mode}} \end{aligned} \quad (16)$$

式中:  $\bar{F} = \Phi_q^T F = \sum_{j=1}^n \Phi_{Q_j}^T P_j$  为第  $i$  阶振型对应的广义节点力,即节点荷载在第  $i$  阶振型上所做的功;  $\Phi_{Q_j}$  为以  $q$  的形式表示的空间结构的第  $i$  阶广义空间振型,  $\Phi_{Q_j}$  为以  $\{Q_1, \dots, Q_n\}$  的形式表示的基于独立振型的第  $j$  自由度上的第  $i$  阶振型。

## 2 基于独立振型的结构动力响应

对于基于独立振型的空间结构动力式(15)、式(16),可以采用时域和频域 2 种方式进行求解。当空间结构各自由度相互独立时,对于  $m$  个无节点外

力输入的自由度,由于其外力所做的功为0,在结构分析中可以忽略,于是节点自由度的数目简化为 $n-m$ 个。

## 2.1 时域求解

时域求解采用杜哈梅积分求解式(16)

$$\begin{aligned}\xi_i(t) &= \frac{1}{\omega_{Di}} \int_0^t \sum_{j=1}^n \Phi_{Q_j}^T P_j(t) e^{-\xi_i \omega_i(t-\tau)} \sin(\omega_{Di}) \cdot \\ &\quad (t-\tau) d\tau = \frac{1}{\omega_{Di}} \sum_{j=1}^n \int_0^t \Phi_{Q_j}^T P_j(t) \cdot \\ &\quad e^{-\xi_i \omega_i(t-\tau)} \sin(\omega_{Di})(t-\tau) d\tau\end{aligned}\quad (17)$$

式中: $\omega_{Di} = \omega_i \sqrt{1-\xi_i^2}$ 为有阻尼空间结构的第 $i$ 阶圆频率; $\tau$ 为时间变量。

求得结构振型坐标时程以后,结构各自由度上的响应时程就可以根据式(8)通过振型叠加得到。

## 2.2 频域求解

空间结构动力响应的时域求解对于每一时间点上的动力响应都要在 $[0, t]$ 上进行积分,计算工作量较大。对于线性或弱非线性空间结构,通常采用频域求解效率更高。此处以式(15)为基础,以矩阵的形式进行基于独立振型的空间结构动力响应的频域求解。

首先定义如下形式的傅里叶变换

$$\bar{\xi}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi(t) e^{-i\omega t} dt \quad (18)$$

式中: $i = \sqrt{-1}$ 。

利用分布积分法可得速度的傅里叶变换

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \dot{\xi}(t) e^{-i\omega t} dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} d(\xi(t)) = e^{-i\omega t} \xi(t) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \\ &\quad (-i\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} \xi(t) e^{-i\omega t} dt = i\omega \bar{\xi}(\omega)\end{aligned}\quad (19)$$

同理可得加速度的傅里叶变换

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \ddot{\xi}(t) e^{-i\omega t} dt = -\omega^2 \bar{\xi}(\omega) \quad (20)$$

对式(15)两侧进行傅里叶变换得

$$(-\omega^2 \mathbf{I} + i\omega \mathbf{A}_c + \mathbf{A}_w) \bar{\xi}(\omega) = \sum_{j=1}^n \Phi_{Q_j}^T \bar{P}_j(\omega) \quad (21)$$

令 $\mathbf{H}(\omega) = -\omega^2 \mathbf{I} + i\omega \mathbf{A}_c + \mathbf{A}_w$ ,为结构的频响传递函数矩阵。对于普通的结构动力响应

$$\begin{aligned}\bar{\xi}(\omega) &= \mathbf{H}^{-1}(\omega) \sum_{j=1}^n \Phi_{Q_j}^T \bar{P}_j(\omega) = \\ &\quad \sum_{j=1}^n \mathbf{H}^{-1}(\omega) \Phi_{Q_j}^T \bar{P}_j(\omega)\end{aligned}\quad (22)$$

对于随机荷载引起的随机振动响应,通常应求解其振型坐标的功率谱密度

$$E(\bar{\xi} \bar{\xi}_{ij}^T(\omega)) = E(\bar{\xi}(\omega) \bar{\xi}^T(\omega)) =$$

$$\begin{aligned}E\left[\sum_{j=1}^n \mathbf{H}^{-1}(\omega) \Phi_{Q_j}^T \bar{P}_j(\omega) \left(\sum_{j=1}^n \mathbf{H}^{-1}(\omega) \Phi_{Q_j}^T \bar{P}_j(\omega)\right)^T\right] = \\ E\left[\sum_i \sum_j \mathbf{H}^{-1}(\omega) \Phi_{Q_j}^T \bar{P}_j(\omega) \bar{P}_i(\omega) \Phi_{Q_i} (\mathbf{H}^{-1}(\omega))^*{}^T\right] = \\ \mathbf{H}^{-1}(\omega) \left(\sum_i \sum_j \Phi_{Q_j}^T E(\bar{P}_j(\omega) \bar{P}_i(\omega)) \Phi_{Q_i}\right) (\mathbf{H}^{-1}(\omega))^*{}^T\end{aligned}\quad (23)$$

$$\mathbf{S}_{\xi_i \xi_i}(\omega) = \mathbf{H}^{-1}(\omega) \cdot$$

$$\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \Phi_{Q_j}^T \mathbf{S}_{P_j P_i}(\omega) \Phi_{Q_i}\right) (\mathbf{H}^{-1}(\omega))^*{}^T \quad (24)$$

式中:函数 $E$ 表示自相关运算; $(\mathbf{H}^{-1}(\omega))^*{}^T$ 为 $\mathbf{H}^{-1}(\omega)$ 的共轭转置矩阵。

求得空间结构振型坐标的功率谱密度以后,利用式(8)即可求得各自由度的功率谱密度

$$\begin{aligned}\{\mathbf{S}_{Q_{1j} Q_{1j}}, \dots, \mathbf{S}_{Q_{mj} Q_{mj}}\} = \\ \{\Phi_{Q_1} \mathbf{S}_{\xi_1 \xi_1} \Phi_{Q_1}^T, \dots, \Phi_{Q_m} \mathbf{S}_{\xi_m \xi_m} \Phi_{Q_m}^T\}\end{aligned}\quad (25)$$

于是结构各节点动力响应的协方差矩阵为

$$\begin{aligned}\{\sigma_{Q_{1j} Q_{1j}}^2, \dots, \sigma_{Q_{mj} Q_{mj}}^2\} = \\ \left\{\int_0^{+\infty} \mathbf{S}_{Q_{1j} Q_{1j}} d\omega, \dots, \int_0^{+\infty} \mathbf{S}_{Q_{mj} Q_{mj}} d\omega\right\}\end{aligned}\quad (26)$$

## 3 基于独立振型的大跨度桥梁风致抖振响应分析

上面分析了一般空间结构在任意随机动力荷载作用下的动力响应,并将广义振型形式的分析过程表达为独立振型的形式。以上述分析为基础,本节将给出基于独立振型的大跨度桥梁风致抖振响应分析过程<sup>[16]</sup>。为了便于理解,此处仅以大跨度桥梁的主梁为例,桥塔及其他构件的分析与之相同。

设主梁节点个数为 $n_{\text{node}}$ ,每个节点有6个相互独立的自由度即 $(X, Y, Z, \text{Rot}X, \text{Rot}Y, \text{Rot}Z) \Leftrightarrow q$ ,见下页图1(a)。在主梁风振响应分析中,只考虑横桥向的阻力 $D$ ,竖向的升力 $L$ 和绕 $X$ 轴的升力矩 $M$ ,即只考虑 $Y, Z$ 和 $\text{Rot}X$ 这3个方向上的风荷载; $X, \text{Rot}Y$ 和 $\text{Rot}Z$ 这3个方向上的风荷载很小,计算中忽略不计,如下页图1(b)所示,图中 $U$ 为来流方向的平均风速; $u(t)$ 和 $w(t)$ 分别为横桥向和竖向的脉动风速; $h, p, \alpha$ 分别为主梁的竖向、横向和扭转位移。

作用在主梁上的风荷载有平均风引起的平均风荷载,风与结构之间相互运动产生的自激力,以及脉动风引起的抖振力。平均风荷载可以采用静力计算方法很方便的解决,此处只考虑动力荷载:平均风引起的自激力和脉动风引起的抖振力。自激力 $F_{se}$ 采

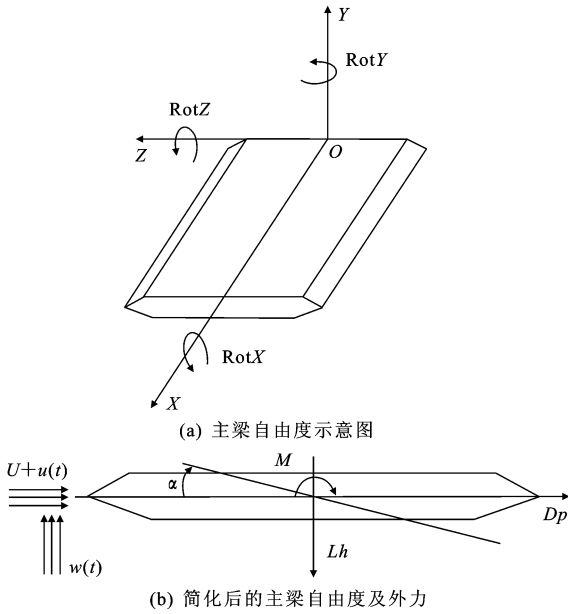


图1 主梁结构各自由度及自由度方向上的外力

Fig. 1 Freedoms and wind forces in nodes of bridge deck

用 18 个颤振导数的 Scanlan 计算模型

$$\left\{ \begin{aligned} L_{ae} &= \frac{1}{2} \rho U^2 (2B) (KH_1^* \frac{\dot{h}}{U} + KH_2^* \frac{B\dot{\alpha}}{U} + K^2 H_3^* \alpha + \\ &\quad K^2 H_4^* \frac{h}{B} + KH_5^* \frac{\dot{p}}{U} + K^2 H_6^* \frac{p}{B}) \\ D_{ae} &= \frac{1}{2} \rho U^2 (2B) (KP_1^* \frac{\dot{p}}{U} + KP_2^* \frac{B\dot{\alpha}}{U} + K^2 P_3^* \alpha + \\ &\quad K^2 P_4^* \frac{p}{B} + KP_5^* \frac{\dot{h}}{U} + K^2 P_6^* \frac{h}{B}) \\ M_{ae} &= \frac{1}{2} \rho U^2 (2B^2) (KA_1^* \frac{\dot{h}}{U} + KA_2^* \frac{B\dot{\alpha}}{U} + K^2 A_3^* \alpha + \\ &\quad K^2 A_4^* \frac{h}{B} + KA_5^* \frac{\dot{p}}{U} + K^2 A_6^* \frac{p}{B}) \end{aligned} \right. \quad (27)$$

式中:  $L_{ae}$ 、 $D_{ae}$ 、 $M_{ae}$  分别为作用在主梁单位长度上的自激升力、阻力和升力矩;  $U$  为平均风速;  $\rho$  为空气密度;  $B$  为主梁宽度;  $K = \frac{\omega B}{U}$  为折算频率;  $\omega$  为结构振动圆频率;  $H_i^*$ 、 $P_i^*$ 、 $A_i^*$  分别为颤振导数, 均为折算频率  $K$  的函数, 与桥梁断面的几何构形和来流有关, 通常需要通过风洞试验获得。

抖振力  $F_b$  采用气动导纳修正的 Davenport 抖振力计算模型

$$\left\{ \begin{aligned} L_b &= \frac{1}{2} \rho U^2 B \left[ 2C_{L1} \chi_{L,u} \frac{u(t)}{U} + (C'_{L1} + C_{D1}) \chi_{L,w} \frac{w(t)}{U} \right] \\ D_b &= \frac{1}{2} \rho U^2 B \left[ 2C_{D1} \chi_{D,u} \frac{u(t)}{U} + C'_{D1} \chi_{D,w} \frac{w(t)}{U} \right] \\ M_b &= \frac{1}{2} \rho U^2 B^2 \left[ 2C_{M1} \chi_{M,u} \frac{u(t)}{U} + C'_{M1} \chi_{M,w} \frac{w(t)}{U} \right] \end{aligned} \right. \quad (28)$$

式中:  $L_b$ 、 $D_b$ 、 $M_b$  分别为作用在主梁单位长度上的抖振升力, 抖振阻力和抖振升力矩;  $C_{L1}$ 、 $C_{D1}$ 、 $C_{M1}$  分别为桥梁断面的升力, 阻力和扭矩的静风力系数, 参考长度为桥梁宽度  $B$ ;  $C'_{L1} = \frac{dC_{L1}}{d\alpha}$ ,  $C'_{D1} = \frac{dC_{D1}}{d\alpha}$ ,  $C'_{M1} = \frac{dC_{M1}}{d\alpha}$ ;

$\chi_{L,u}$ 、 $\chi_{L,w}$ 、 $\chi_{D,u}$ 、 $\chi_{D,w}$ 、 $\chi_{M,u}$ 、 $\chi_{M,w}$  为气动导纳函数, 它们依赖于桥面的几何构形, 且随折减风速而变化, 三分力系数和气动导纳通常需要风洞试验获得。

设主梁关于质量矩阵归一的广义振型为  $\Phi \Leftrightarrow (\bar{h}, \bar{p}, \bar{\alpha}) = (Bh, Bp, \alpha)$ , 对应作用在主梁相应节点上的自激力和抖振力分别为  $F_{ae} \Leftrightarrow (L_{ae}, D_{ae}, M_{ae})$ ,  $F_b \Leftrightarrow (L_b, D_b, M_b)$ 。将式(27)、式(28)代入基于独立振型的空间结构动力方程(13)得

$$I\ddot{\xi}(t) + \Lambda_c \dot{\xi}(t) + \Lambda_w \xi(t) = \Phi^T F(t) \cdot dx \quad (29)$$

式中: 符号  $\cdot$  为点乘, 表示矩阵中的对应元素相乘, 即  $F(t) \cdot dx = \{F_1(t) dx_1, \dots, F_{n_{node}}(t) dx_{n_{node}}\}^T$ , 其中  $x_i$  为第  $i$  个节点所覆盖的主梁长度。

对于式(29)的左边, 将振型坐标转化到量纲一时间域  $s = \frac{U}{B}t$  内, 其中,  $\dot{\xi}(t) = \frac{d\xi}{dt} = \left(\frac{U}{B}\right) \frac{d\xi}{ds} = \left(\frac{U}{B}\right) \cdot$

$\dot{\xi}(s)$ ,  $\ddot{\xi}(t) = \frac{d^2\xi}{dt^2} = \left(\frac{U}{B}\right)^2 \ddot{\xi}(s)$ , 则

$$I\ddot{\xi}(t) + \Lambda_c \dot{\xi}(t) + \Lambda_w \xi(t) = \left(\frac{U}{B}\right)^2 [I\ddot{\xi}(s) + \Lambda_c \dot{\xi}(s) + \Lambda_w \xi(s)] \quad (30)$$

对上式做傅里叶变换, 转化到以量纲一折减频率  $K = \frac{B\omega}{U}$  为单位的频域内

$$\left(\frac{U}{B}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} (I\ddot{\xi}(s) + \Lambda_c \dot{\xi}(s) + \Lambda_w \xi(s)) e^{-iks} ds = \left(\frac{U}{B}\right)^2 (-K^2 I + iK\Lambda_c + \Lambda_K) \bar{\xi}(K) \quad (31)$$

式中:  $\Lambda_K = \text{diag}(K_1^2, \dots, K_{n_{node}}^2)$ 。

对于式(29)的右边, 可以分解为自激力和抖振力两部分

$$\Phi^T F(t) \cdot dx = \Phi^T F_{ae}(t) \cdot dx + \Phi^T F_b(t) \cdot dx \quad (32)$$

在式(32)中, 自激力可以表示为

$$\begin{aligned} \Phi^T F_{ae}(t) \cdot dx &= Bh^T L_{ae} \cdot dx + Bp^T D_{ae} \cdot dx + \\ &\quad \alpha^T M_{ae} \cdot dx = \frac{1}{2} \rho U^2 (2B^2) K \{ H_1^* G_{hh} + \\ &\quad H_2^* G_{ha} + H_5^* G_{hp} + P_1^* G_{pp} + P_2^* G_{pa} + \\ &\quad P_5^* G_{ph} + A_1^* G_{ah} + A_2^* G_{aa} + A_5^* G_{ap} \} \dot{\xi}(s) + \\ &\quad \frac{1}{2} \rho U^2 (2B^2) K^2 \{ H_3^* G_{ha} + H_4^* G_{hh} + \\ &\quad H_6^* G_{hp} + P_3^* G_{pa} + P_5^* G_{pp} + P_6^* G_{ph} + \\ &\quad A_3^* G_{aa} + A_4^* G_{ah} + A_6^* G_{ap} \} \xi(s) \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \text{式中: } \mathbf{G}_{hh} &= \int_0^l (\mathbf{h}^T \mathbf{h}) \cdot d\mathbf{x}; \mathbf{G}_{ha} = \int_0^l (\mathbf{h}^T \boldsymbol{\alpha}) \cdot d\mathbf{x}; \mathbf{G}_{hp} = \int_0^l (\mathbf{h}^T \mathbf{p}) \cdot d\mathbf{x}; \mathbf{G}_{pa} = \int_0^l (\mathbf{p}^T \boldsymbol{\alpha}) \cdot d\mathbf{x}; \mathbf{G}_{ph} = \int_0^l (\mathbf{p}^T \mathbf{h}) \cdot d\mathbf{x}; \mathbf{G}_{ah} = \int_0^l (\boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{h}) \cdot d\mathbf{x}; \mathbf{G}_{aa} = \int_0^l (\boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{\alpha}) \cdot d\mathbf{x}; \mathbf{G}_{ap} = \int_0^l (\boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{p}) \cdot d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

$B\mathbf{h}^T \mathbf{L}_{ae} \cdot d\mathbf{x}, B\mathbf{p}^T \mathbf{D}_{ae} \cdot d\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{M}_{ae} \cdot d\mathbf{x}$  的推导过程相同, 仅以  $B\mathbf{h}^T \mathbf{L}_{ae} \cdot d\mathbf{x}$  为例给出推导过程。

$$\begin{aligned} B\mathbf{h}^T \mathbf{L}_{ae} \cdot d\mathbf{x} &= \mathbf{h}^T B\mathbf{L}_{ae} \cdot d\mathbf{x} = \frac{1}{2} \rho U^2 (2B^2) \cdot \\ &\left\{ K \left[ (H_1^* \int_0^l \mathbf{h}^T \mathbf{h} \cdot d\mathbf{x} + H_2^* \int_0^l \mathbf{h}^T \boldsymbol{\alpha} \cdot d\mathbf{x} + \right. \right. \\ &H_5^* \int_0^l \mathbf{h}^T \mathbf{p} \cdot d\mathbf{x}) \dot{\xi}(s) + K^2 \left[ (H_3^* \int_0^l \mathbf{h}^T \boldsymbol{\alpha} \cdot d\mathbf{x} + \right. \\ &H_4^* \int_0^l \mathbf{h}^T \mathbf{h} \cdot d\mathbf{x} + H_6^* \int_0^l \mathbf{h}^T \mathbf{p} \cdot d\mathbf{x}) \xi(s) \Big] = \\ &\frac{1}{2} \rho U^2 (2B^2) K (H_1^* \mathbf{G}_{hh} + H_2^* \mathbf{G}_{ha} + \\ &H_5^* \mathbf{G}_{hp}) \dot{\xi}(s) + \frac{1}{2} \rho U^2 (2B^2) K^2 (H_3^* \mathbf{G}_{ha} + \\ &H_4^* \mathbf{G}_{hh} + H_6^* \mathbf{G}_{hp}) \xi(s) \end{aligned} \quad (34)$$

对式(33)做傅里叶变换, 转化到以量纲一折减频率  $K = \frac{B\omega}{U}$  为单位的频域内

$$\begin{aligned} \Phi^T \mathbf{F}_{ae} \cdot d\mathbf{x} &= iK \frac{\rho U^2 (2B^2) K}{2} \mathbf{A} \bar{\xi}(K) + \\ &\frac{\rho U^2 (2B^2) K^2}{2} \mathbf{B} \bar{\xi}(K) \end{aligned} \quad (35)$$

式中:  $\mathbf{A} = H_1^* \mathbf{G}_{hh} + H_2^* \mathbf{G}_{ha} + H_5^* \mathbf{G}_{hp} + P_1^* \mathbf{G}_{pp} + P_2^* \mathbf{G}_{pa} + P_5^* \mathbf{G}_{ph} + A_1^* \mathbf{G}_{ah} + A_2^* \mathbf{G}_{aa} + A_5^* \mathbf{G}_{ap} + H_3^* \mathbf{G}_{ha} + H_4^* \mathbf{G}_{hh} + H_6^* \mathbf{G}_{hp} + P_3^* \mathbf{G}_{pa} + P_4^* \mathbf{G}_{pp} + P_6^* \mathbf{G}_{ph} + A_3^* \mathbf{G}_{aa} + A_4^* \mathbf{G}_{ah} + A_6^* \mathbf{G}_{ap}$ 。

式(32)中的抖振力可以表示为

$$\begin{aligned} \Phi^T \mathbf{F}_b \cdot d\mathbf{x} &= B\mathbf{h}^T \mathbf{L}_b \cdot d\mathbf{x} + B\mathbf{p}^T \mathbf{D}_b \cdot d\mathbf{x} + \\ &\boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{M}_b \cdot d\mathbf{x} = \frac{\rho U^2 B^2}{2U} \{ 2C_L \chi_{Lu} \mathbf{h}^T + \\ &2C_D \chi_{Du} \mathbf{p}^T + 2C_M \chi_{Mu} \boldsymbol{\alpha}^T \} \mathbf{u}(x, t) \cdot \\ &d\mathbf{x} + \frac{\rho U^2 B^2}{2U} \{ (C'_L + C_D) \chi_{Lw} \mathbf{h}^T + \\ &C_D \chi_{Dw} \mathbf{p}^T + C'_M \chi_{Mw} \boldsymbol{\alpha}^T \} \mathbf{w}(x, t) \cdot d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (36)$$

同样, 对式(36)做傅里叶变换, 转化到以量纲一折减频率  $K = \frac{B\omega}{U}$  为单位的频域内, 经整理得

$$\begin{aligned} \frac{\rho U^2 B^2}{2U} \{ \mathbf{C}_{bu} [\mathbf{u}(x, K) \cdot d\mathbf{x}] + \mathbf{C}_{bw} [\mathbf{w}(x, K) \cdot \\ d\mathbf{x}] \} = \frac{\rho U^2 B^2}{2U} \{ [\mathbf{C}_{bu} \cdot d\mathbf{x}] \mathbf{u}(x, K) + \end{aligned}$$

$$(\mathbf{C}_{bw} \cdot d\mathbf{x}) \mathbf{w}(x, K) \} \quad (37)$$

式中:  $\mathbf{C}_{bu} = 2C_L \chi_{Lu} \mathbf{h}^T + 2C_D \chi_{Du} \mathbf{p}^T + 2C_M \chi_{Mu} \boldsymbol{\alpha}^T$ ;  $\mathbf{C}_{bw} = (C'_L + C_D) \chi_{Lw} \mathbf{h}^T + C'_D \chi_{Dw} \mathbf{p}^T + C'_M \chi_{Mw} \boldsymbol{\alpha}^T$ ;  $\mathbf{u}(x, K) = [u(x_1, K), \dots, u(x_{n_{\text{node}}}, K)]^T$ ;  $\mathbf{w}(x, K) = [\mathbf{w}(x_1, K), \dots, \mathbf{w}(x_{n_{\text{node}}}, K)]^T$ ;  $\mathbf{C}_{bu} \cdot d\mathbf{x} = \{ C_{bu1} dx_1, \dots, C_{bun_{\text{node}}} dx_{n_{\text{node}}} \}^T$ ;  $\mathbf{C}_{bw} \cdot d\mathbf{x} = \{ C_{bw1} dx_1, \dots, C_{bwn_{\text{node}}} dx_{n_{\text{node}}} \}^T$ 。

将式(31)、式(35)、式(37)代入式(29), 则可用量纲一折减频率  $K$  表示为

$$\begin{aligned} (-K^2 \mathbf{I} + iK \mathbf{A}_e + \mathbf{A}_k) \bar{\xi}(K) &= iK \frac{\rho (2B^4) K}{2} \cdot \\ &\mathbf{A} \bar{\xi}(K) + \frac{(2B^4) K^2}{2} \mathbf{B} \bar{\xi}(K) + \frac{\rho B^4}{2U} \cdot \\ &[(\mathbf{C}_{bu} \cdot d\mathbf{x}) \mathbf{u}(x, K) + (\mathbf{C}_{bw} \cdot d\mathbf{x}) \mathbf{w}(x, K)] \end{aligned} \quad (38)$$

整理得

$$\begin{aligned} \left[ -K^2 \mathbf{I} + iK \left( \mathbf{A}_e - \frac{\rho (2B^4) K}{2} \mathbf{A} \right) + \right. \\ \left. \left( \mathbf{A}_k - \frac{(2B^4) K^2}{2} \mathbf{B} \right) \right] \bar{\xi}(K) = \frac{\rho B^4}{2U} \cdot \\ [(\mathbf{C}_{bu} \cdot d\mathbf{x}) \mathbf{u}(x, K) + (\mathbf{C}_{bw} \cdot d\mathbf{x}) \mathbf{w}(x, K)] \end{aligned} \quad (39)$$

令  $\mathbf{E} = -K^2 \mathbf{I} + iK \left( \mathbf{A}_e - \frac{\rho (2B^4) K}{2} \mathbf{A} \right) + \left( \mathbf{A}_k - \frac{(2B^4) K^2}{2} \mathbf{B} \right)$ , 则振型坐标向量可表示为

$$\begin{aligned} \bar{\xi}(K) &= \frac{\rho B^4}{2U} \mathbf{E}^{-1} [(\mathbf{C}_{bu} \cdot d\mathbf{x}) \mathbf{u}(x, K) + \\ &(\mathbf{C}_{bw} \cdot d\mathbf{x}) \mathbf{w}(x, K)] \end{aligned} \quad (40)$$

根据式(24), 振型坐标的功率谱密度矩阵可以表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{\xi} &= \left( \frac{\rho B^4}{2U} \right)^2 \mathbf{E}^{-1} [(\mathbf{C}_{bu} \cdot d\mathbf{x}) \mathbf{S}_{uu} (\mathbf{C}_{bu} \cdot d\mathbf{x})^T + \\ &(\mathbf{C}_{bu} \cdot d\mathbf{x}) \mathbf{S}_{uw} (\mathbf{C}_{bw} \cdot d\mathbf{x})^T + (\mathbf{C}_{bw} \cdot d\mathbf{x}) \mathbf{S}_{wu} \cdot \\ &(\mathbf{C}_{bu} \cdot d\mathbf{x})^T + (\mathbf{C}_{bw} \cdot d\mathbf{x}) \mathbf{S}_{ww} (\mathbf{C}_{bw} \cdot d\mathbf{x})^T] (\mathbf{E}^{-1})^*{}^T \end{aligned} \quad (41)$$

式中:  $\mathbf{S}_{uu}$ 、 $\mathbf{S}_{uw}$ 、 $\mathbf{S}_{ww}$  分别为  $u$ 、 $w$  方向的脉动风谱和  $u$ 、 $w$  方向的脉动风互谱。

式(41)即为矩阵形式表达的振型坐标的功率谱密度矩阵, 于是  $(h, p, \alpha)$  方向上响应的功率谱密度矩阵和脉动响应的方差可表示为

$$\begin{aligned} (\mathbf{S}_{hh}, \mathbf{S}_{pp}, \mathbf{S}_{\alpha\alpha}) &= (B\mathbf{h} \mathbf{S}_{\xi} B\mathbf{h}^T, B\mathbf{p} \mathbf{S}_{\xi} B\mathbf{p}^T, \boldsymbol{\alpha} \mathbf{S}_{\xi} \boldsymbol{\alpha}^T) \cdot \\ (\boldsymbol{\sigma}_{hh}^2, \boldsymbol{\sigma}_{pp}^2, \boldsymbol{\sigma}_{\alpha\alpha}^2) &= \left( \int_0^{+\infty} (\mathbf{S}_{hh}(K) \cdot dK, \right. \end{aligned}$$

$$\int_0^{+\infty} S_{pp}(K) \cdot dK, \int_0^{+\infty} S_{aa}(K) \cdot dK) \quad (42)$$

以上即为基于独立振型的大跨度桥梁风致抖振响应分析过程。从上述推导可以看出,由于采用了易于矩阵表达的独立振型形式,使得复杂的抖振分析过程清晰明了、结果直观;同时,由于对推导原理进行了详细说明,使得复杂的抖振分析容易被结构工程师理解和掌握。

表 1 悬索桥基本参数  
Tab. 1 Basic parameters of suspension bridge

主梁宽度/m	跨度/m		刚度/(MPa·m <sup>-4</sup> )			线质量/ (kg·m <sup>-1</sup> )	质量惯矩/ ((kg·m <sup>2</sup> )·m <sup>-1</sup> )
	边跨	中跨	竖弯	侧弯	扭转		
36.9	240	800	3.0×10 <sup>6</sup>	2.5×10 <sup>7</sup>	1.5×10 <sup>6</sup>	15 000	1.5×10 <sup>6</sup>

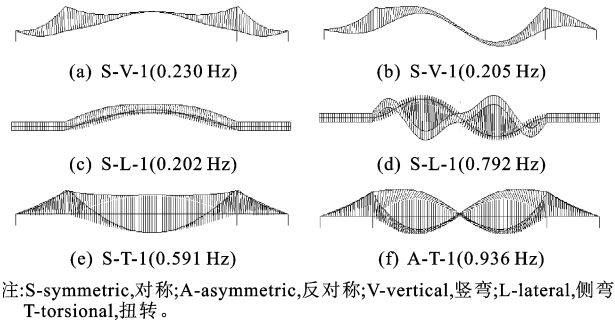


图 2 悬索桥一阶模态

Fig. 2 First modes of suspension bridge in three directions

抖振计算中,风攻角度选用 0°,其他角度的计算与之相同。主梁的静力三分力系数及颤振导数采用江阴长江大桥主梁断面节段模型风洞试验的数值<sup>[13]</sup>,主梁离水面的高度取  $z=50\text{ m}$ ,地面粗糙长度按照 A 类地貌取  $z_0=0.01\text{ m}$ ,风剖面指数取  $\alpha=0.10$ ,计算风速取  $U_{50}=60\text{ m/s}$ ,空气密度取  $\rho=1.225\text{ kg/m}^3$ ;气动导纳采用 Sears 函数的 Liepmann 简化表达式<sup>[17]</sup>;结构各阶模态的阻尼比按照《公路桥梁抗风设计规范》(JTG/T D60-01—2004)取  $0.005$ <sup>[18]</sup>。同时考虑水平和竖向脉动风作用,水平脉动风谱  $S_{uu}(n)$ 选用 Kaimal 谱<sup>[19]</sup>;竖向脉动风谱  $S_{ww}(n)$ 选用 Lumley-Panofsky 修正风谱<sup>[20]</sup>;交叉风谱仅考虑适合工程应用的余谱  $C_{uw}(n)$ <sup>[10]</sup>。脉动风的空间相关性采用规范建议的形式<sup>[18]</sup>,风场相关系数取  $\lambda=7$ 。抖振响应的积分频率范围为  $0.002\sim 2.5\text{ Hz}$ ,频率间隔为  $0.002\text{ Hz}$ 。考虑结构的前 50 阶振型,按照本文方法计算得到主梁竖向、水平和扭转方向的抖振位移响应 RMS 值如图 3 所示。由图 3 可以发现,悬索桥主梁主跨的侧向位移相对较小,其抖振响应根方差值最大为  $0.034\text{ m}$ ;而竖向位移和扭转角较大,其抖振响应根方差值分别达到

4 三跨悬索桥算例

以 1 座主跨 800 m 的三跨悬索桥为例,对上述基于独立振型的大跨度桥梁抖振响应分析过程进行说明。悬索桥的基本参数如表 1 所示。采用离散结构的有限单元法建立悬索桥结构有限元模型,经模态分析后得主梁的前 50 阶模态,其 1 阶模态如图 2 所示。

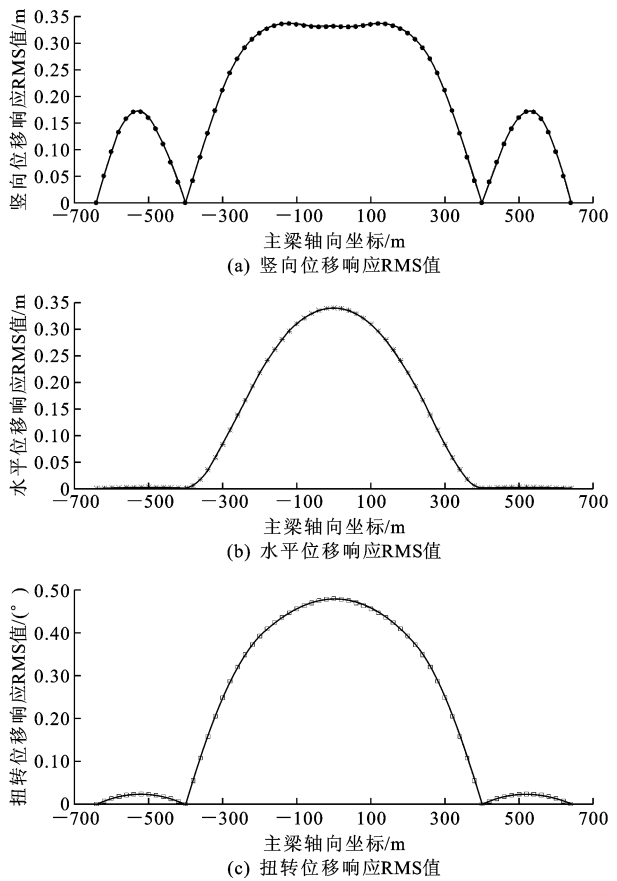


图 3 悬索桥主梁抖振位移响应 RMS 值  
Fig. 3 RMS value of the buffeting displacement responses in three directions

0.337 m和 0.480°,在结构设计中不能忽略。

5 结 语

(1)依据经典结构动力学理论和风洞试验,从能量守恒原理出发,将广义振型形式的抖振响应分析表达为基于  $n$  个独立自由度上的振型的形式,并对其转换过程和机理进行了详细的推导和分析。通过

上述转换,抖振分析过程更加简明,并可以方便地获得任意关心自由度上的抖振响应。

(2)以某主跨 800 m 的大跨度悬索桥为例,应用本文方法对其抖振响应进行了分析。结果表明,由于大跨度桥梁主梁刚度较小,其抖振响应较大,在结构设计中不能忽略。

(3)在桥梁结构设计中通常采用等效静风荷载对抖振响应进行等代计算,在本文基础上发展计算过程更加简洁、计算精度满足工程要求的大跨桥梁等效静风荷载计算方法是下一步的研究方向。

## 参考文献:

## References:

- [1] 葛耀君. 大跨度悬索桥抗风[M]. 北京:人民交通出版社,2011.  
GE Yao-jun. Wind resistance of long span suspension bridges[M]. Beijing: China Communications Press, 2011. (in Chinese)
- [2] DAVENPORT A G. The response of slender, line-like structures to a gusty wind[J]. Proceedings of the Institution of Civil Engineering, 1962, 23(3): 389-408.
- [3] DAVENPORT A G. The action of wind on suspension bridges[C]//LENC. Proceedings of the International Symposium on Suspension Bridges. Lisbon: LENC, 1966: 79-100.
- [4] DAVENPORT A G. Buffeting of a suspension bridge by storm winds[J]. Journal of the Structure Division, 1962, 88(3): 233-270.
- [5] SCANLAN R H. The action of flexible bridge under wind, I: flutter theory[J]. Journal of Sound and Vibration, 1978, 60(2): 187-199.
- [6] SCANLAN R H. The action of flexible bridge under wind, II: buffeting theory[J]. Journal of Sound and Vibration, 1978, 60(2): 201-211.
- [7] JONES N P, SCANLAN R H. Theory and full-bridge modeling of wind response of cable-supported bridges[J]. Journal of Bridge Engineering, 2001, 6(6): 365-375.
- [8] JAIN A, JONES N P, SCANLAN R H. Coupled aero-elastic and aerodynamic response analysis of long-span bridges[J]. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 1996, 60: 69-80.
- [9] JAIN A, JONES N P, SCANLAN R H. Coupled flutter and buffeting analysis of long-span bridges[J]. Journal of Structural Engineering, 1996, 122(7): 716-725.
- [10] SIMIU E, SCANLAN R H. Wind effects on structures[M]. 3rd ed. New York: John Wiley & Sons, 1996.
- [11] CHEN X Z, KAREEM A, MATSUMOTO M. Multi-mode coupled flutter and buffeting analysis of long span bridges[J]. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 2001, 89(7/8): 649-664.
- [12] CHEN X Z, MATSUMOTO M, KAREEM A. Aerodynamic coupling effects on flutter and buffeting of bridges[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2000, 126(1): 17-26.
- [13] 丁泉顺. 大跨度桥梁耦合颤抖振响应的精细化分析[D]. 上海:同济大学, 2001.  
DING Quan-shun. Refinement of coupled flutter and buffeting analysis for long-span bridges[D]. Shanghai: Tongji University, 2001. (in Chinese)
- [14] CLOUGH R W, PENZIEN J. Dynamics of structures[M]. 3rd ed. New York: Mc Graw-Hill Companies, 1975.
- [15] CHOPRA A K. Dynamics of structures: theory and applications to earthquake engineering[M]. 3rd ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2006.
- [16] 董锐. 大跨度桥梁多目标等效静力风荷载研究[D]. 上海:同济大学, 2014.  
DONG Rui. Multi-target equivalent static wind loading of long-span bridges[D]. Shanghai: Tongji University, 2014. (in Chinese)
- [17] LIEPMANN H W. On the application of statistical concepts to the buffeting problem[J]. Journal of Aeronautical Science, 1952, 19(12): 793-800.
- [18] JTG/T D60-01—2004, 公路桥梁抗风设计规范[S].  
JTG/T D60-01—2004, Wind-resistant design specification for highway bridges[S]. (in Chinese)
- [19] KAIMAL J C, WYNGAARD J C, IZUMI Y, et al. Spectral characteristics of surface-layer turbulence[J]. Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society, 1972, 98(417): 563-589.
- [20] LUMLEY J L, PANOFKY H A. The structure of atmospheric turbulence[M]. New York: Interscience Publishers, 1964.