

基于曲线优化提高齿轮弯曲强度的方法

赵向飞^{1,2}, 张敬彩¹, 刘红旗¹, 王宝超¹

(1. 机械科学研究总院 中机生产力促进中心, 北京 100044; 2. 北京科技大学 机械工程学院, 北京 100083)

摘 要: 为了提高渐开线齿轮齿根的承载能力, 结合啮合原理和 APDL 语言对齿条型刀具展成的齿轮进行了参数化有限元建模。采用有理二次 Bezier 曲线替代齿轮原有的齿根过渡曲线, 应用 ANSYS 内嵌的优化方法寻求有理二次 Bezier 曲线权因子的最优解使齿根弯曲拉应力最小, 通过悬臂梁模型对优化结果进行解析计算并对啮合齿轮进行三维有限元接触应力分析。研究结果表明: 对于给定参数齿轮, 优化齿轮相对未优化齿轮齿根弯曲拉应力降低了约 21%, 解析计算结果与数值仿真结果基本一致, 验证了优化结果的准确性; 三维接触分析的等效接触应力基本不变而接触应力稍有减小, 由于加载位置和有限元模型的不同, 齿根弯曲拉应力降低的百分比有所减小。但综合来看, 在齿面接触强度稍有提高的情况下, 优化的齿轮比未优化的齿轮表现出较高的齿根弯曲强度, 对齿轮的传动非常有利。

关键词: 机械工程; 渐开线齿轮; 有限元; 齿根过渡曲线; 弯曲应力

中图分类号: TH132.413

文献标志码: A

Improving gear bending strength based on curve optimization

ZHAO Xiang-fei^{1,2}, ZHANG Jing-cai¹, LIU Hong-qi¹, WANG Bao-chao¹

(1. China Productivity Center for Machinery, China Academy of Machinery Science and Technology, Beijing 100044, China; 2. School of Mechanical Engineering, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China)

Abstract: Gears are important components on the vehicle. Combined with meshing theory, parameterized finite element model was established by APDL to improve the involute gear bending fatigue strength. The research introduced rational quadratic Bezier curve to describe the gear tooth root fillet. Optimization method in ANSYS was used to optimize the Bezier curve to reduce tooth root bending stress. Analytical method was conducted to verify the results of optimization and three-dimensional contact analysis was used to analyze meshing gear. The results show that: For a given parameter gear, tooth root bending stress of optimized gear is reduced by about 21%, compared to the unoptimized gear. Analytical and numerical simulation results are basically the same and this verifies the optimization results; The equivalent contact stress is basically unchanged and contact stress of three-dimensional analysis is decreased slightly; Due to different load positions and different FEA, reduction percentage of bending stress is less than above. But in the whole, optimized gear exhibits higher bending strength than the unoptimized gear on the condition of slight improvement of contact strength which benefits for gear drive. 6 tabs, 15 figs, 16 refs.

Key words: mechanical engineering; involute gear; finite element; tooth fillet; bending stress

0 引言

齿轮是机械装备中大量使用的关键基础构件,其主要失效模式为齿根弯曲疲劳和齿面接触疲劳。但随着齿轮热处理技术(如渗碳淬火、高频淬火和氮化处理等)和齿轮磨削技术的发展,使齿面接触强度得到显著提高,但却增加了发生弯曲疲劳破坏的可能,随着齿轮向着高速重载与小型化的方向发展,齿轮的弯曲问题日益突出。弯曲折断主要是由于齿根应力过大,工作中在交变应力下产生疲劳裂纹,最后在某峰值作用下突然断裂^[1]。因此,不少学者对齿根部位应力的分布以及如何提高齿轮齿根的弯曲强度进行了研究^[2-14]。

靳广虎等研究了齿宽系数对面齿轮齿根弯曲应力的影响,得出弯曲应力比值与齿宽系数近似线性分布^[2];Li等研究了齿顶高对重合度的影响,提出采用大重合度齿轮提高齿轮的弯曲强度^[3-5];Wang等研究了刀顶圆角对齿根弯曲应力的影响,并通过改变滚刀刀顶圆角来减小齿根弯曲应力,但不能寻求全局域上的最优解^[6-7];Sankar等通过圆角齿根代替原来的过渡曲线来提高齿轮的弯曲强度^[8];Pedersen等研究非对称齿廓对齿根承载能力的影响,并进行了加工该齿廓的刀具计算^[9-11];Hebbal等采用内应力释放原理,研究了不同形状圆对齿根应力区域的影响状况^[12];杨庆祥等对渗碳和渗碳喷丸齿轮的弯曲疲劳极限进行了定量分析,讨论了常规的渗碳和喷丸强化工艺的优化问题^[13]。

基于此,本文采用有理二次 Bezier 曲线描述齿轮的齿根过渡曲线,用 ANSYS 内嵌的优化方法,以内权因子为设计变量、齿根最大 von Mises 拉应力为目标函数优化齿根过渡曲线,通过解析法验证了优化结果的准确性,并进行了齿轮接触分析^[14]。

1 齿根圆角的 Bezier 曲线描述

1.1 有理二次 Bezier 曲线的数学描述

所有的圆锥曲线,包括圆、椭圆、双曲线、抛物线等都可作为两多项式之比的有理函数表示出来,即采用 n 次有理 Bezier 曲线来表达^[15]

$$C(u) = \frac{\sum_{i=0}^n B_{i,n}(u) \omega_i P_i}{\sum_{i=0}^n B_{i,n}(u) \omega_i} \quad (1)$$

其中 $\{B_{i,n}(u)\}$ 是 Bernstein 基函数,有

$$B_{i,n}(u) = C_n^i t^i (1-t)^{n-i} \quad (2)$$

式中: $\{\omega_i\}$ 为一系列的权因子且 $\{\omega_i\} > 0, i=0, 1, \dots, n$; u 为参数且 $0 \leq u \leq 1$; $P_i = (x_i, y_i, z_i)$ 为一系列的坐标点。

二次 Bezier 曲线如图 1 所示。

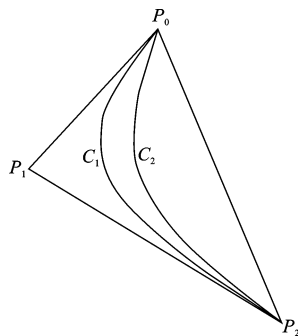


图1 二次 Bezier 曲线

Fig. 1 Quadratic Bezier curve

如图所示,当 $n=2$ 时,式(1)表示二次有理 Bezier 曲线

$$C(u) = \frac{(1-u)^2 \omega_0 P_0 + 2u(1-u) \omega_1 P_1 + u^2 \omega_2 P_2}{(1-u)^2 \omega_0 + 2u(1-u) \omega_1 + u^2 \omega_2}$$

即表示成直角坐标形式

$$\left. \begin{aligned} x(u) &= \frac{(1-u)^2 x_0 + 2u(1-u) \omega_1 x_1 + u^2 x_2}{(1-u)^2 + 2u(1-u) \omega_1 + u^2} \\ y(u) &= \frac{(1-u)^2 y_0 + 2u(1-u) \omega_1 y_1 + u^2 y_2}{(1-u)^2 + 2u(1-u) \omega_1 + u^2} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

如图 1 所示,二次有理 Bezier 曲线有如下性质:

(1) 该曲线经过首末端点 P_0 、 P_2 , 且与直线 $P_0 P_1$ 、 $P_1 P_2$ 相切;

(2) 将 P_0 、 P_1 、 P_2 依次首尾相连,得到 1 个三角形,这个三角形是凸的,则曲线位于这个凸包内;

(3) $K = \frac{\omega_0 \omega_2}{\omega_1^2}$, K 称为形状不变因子;即只要 K

值不变,在 $\{\omega_i\} > 0$ 内的范围内的 ω_i 任意取值都能保证曲线的形状不变。

图 1 中如果坐标点 P_0 、 P_1 、 P_2 保持不变,则一组确定的权因子 $[\omega_0 \ \omega_1 \ \omega_2]$ 决定唯一曲线的形状。曲线 C_1 、 C_2 分别是 2 组不同权因子下的曲线,如果把所有的权因子都列出来,可以得到无数种曲线形状,但这些曲线均通过点 P_0 、 P_2 且与直线 $P_0 P_1$ 、 $P_0 P_2$ 相切,并位于三点组成的三边形内,且向外凸。正是由于这些特点,所以适合描述齿根过渡曲线,也可以用于优化滚刀刀顶及其他任意齿轮。

1.2 齿轮有限元模型建立

将齿轮参数列于表 1,根据齿轮齿条的啮合原理建立图 2 的齿廓曲线。

表 1 齿轮参数
Tab. 1 Gear parameters

| z | m/mm | $\alpha/(^{\circ})$ | x_1 | x_2 | ϵ | a/mm |
|-------|---------------|---------------------|-------|-------|------------|---------------|
| 10/30 | 3 | 20 | 0.45 | 0.3 | 1.262 | 62 |

注: z -齿数; m -模数; α -压力角; ϵ -重合度; x_1 、 x_2 -变位系数; a -中心距。

齿顶高系数 $h_a=1$,顶隙系数 $c=0.25$,采用标准滚刀进行变位,滚刀刀顶圆角半径 $R=0.38\text{ m}$ 。材料弹性模量 $E=206\ 000\text{ MPa}$,泊松比 $\mu=0.3$,通过 APDL 数组 * DIM 命令和循环语句 * do-* enddo 命令建立一系列关键点,再用 BSpline 样条进行曲线拟合,采用 PLANE82 单元进行自由网格划分,生成如图 3 所示的齿轮有限元模型,自由网格划分的二维有限元模型便于优化处理。相互啮合的齿轮,小齿轮齿根相对薄弱,所以优化小齿轮齿根部位,在图 2 齿顶 P 施加载荷为 600 N/mm ,载荷角为 $\delta=40.78^{\circ}$, EF 、 GH 、 EG 三边进行全约束。图 4 是优化前齿轮应力云图,最大应力 691.325 MPa 。

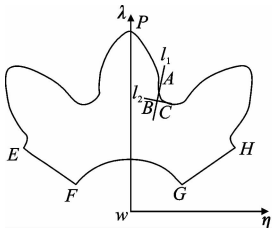


图 2 轮齿示意图
Fig. 2 Diagram of tooth

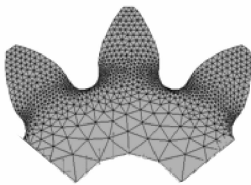
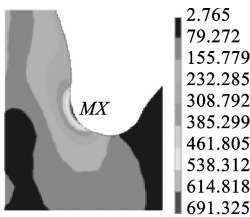


图 3 优化前齿轮有限元模型
Fig. 3 FEA before optimization

为了用有理二次 Bezier 曲线代替齿根过渡曲线,必须求出如图 2 所示的 A 、 B 、 C 三点的坐标 (x_0, y_0) 、 (x_1, y_1) 、 (x_2, y_2) 。 A 、 C 两点坐标由 APDL 建模时求得,再通过 Matlab 软件编程求得渐开线与齿根过渡曲线交点 A 的切线 l_1 ,以及齿根过渡曲线与齿根圆的交点 C 的切线 l_2 ,进而求得交点 B 的坐标。

求得 $A(2.87, 13.8)$ 、 $C(3.89, 11.98)$ 、 $B(2.608,$



单位: MPa

图 4 优化前齿轮弯曲应力云图

Fig. 4 Bending stress contour before optimization

12.38)。
 $l_1 : y = 5.405x - 1.71$; $l_2 : y = -0.311x + 13.192$ 。

将 A 、 B 、 C 三点的坐标带入式(3)

$$\left. \begin{aligned} x(u) &= \frac{2.87(1-u)^2\omega_0 + 5.216u(1-u)\omega_1 + 3.89u^2\omega_2}{(1-u)^2\omega_0 + 2u(1-u)\omega_1 + u^2\omega_2} \\ y(u) &= \frac{13.8(1-u)^2\omega_0 + 24.76u(1-u)\omega_1 + 11.98u^2\omega_2}{(1-u)^2\omega_0 + 2u(1-u)\omega_1 + u^2\omega_2} \end{aligned} \right\} (4)$$

取初值 ω_0 、 ω_1 、 ω_2 ,令 $u=0, 1/n, 2/n, \dots, n$ 这样便生成一系列的关键点,此处取 $n=15$, n 越大,模型越精确,但计算速度较慢。将原模型齿根过渡曲线部位的关键点去掉,由计算生成的关键点来替代。

2 齿根过渡曲线优化及结果分析

2.1 齿根过渡曲线优化

优化过程选择初值至关重要,由有理二次 Bezier 曲线不变形状因子 K 的性质,可以分 $0 < K < 1$ 、 $K=1$ 、 $K > 1$ 这 3 种情况进行讨论,以 ω_0 、 ω_1 、 ω_2 为优化设计变量,齿根最大应力为目标函数,依次采用 ANSYS 随机搜索来寻求全局域上的最佳值,然后再次采用零阶和一阶方法组合寻找全局域的最佳值,2 种方法结果进行比较寻找最优值,这样可以确保最优值的准确性。将优化初值列于表 2。

表 2 优化初值的选择

Tab. 2 Choice of initial optimization

| K_{initial} | $\omega_{0\text{initial}}$ | $\omega_{1\text{initial}}$ | $\omega_{2\text{initial}}$ |
|----------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| 4.00 | 1.0 | 0.5 | 1.0 |
| 1.00 | 0.5 | 0.5 | 0.5 |
| 0.25 | 0.5 | 1.0 | 0.5 |

其中: K_{initial} 为初始不变形状因子; $\omega_{0\text{initial}}$ 、 $\omega_{1\text{initial}}$ 、 $\omega_{2\text{initial}}$ 为初始权因子。不同 K_{initial} 下的弯曲应力云图见下页图 5。

2.1.1 随机搜索方法优化

随机搜索方法即 Ansys 优化模块中的 Random Design,指利用随机数求极小点来求函数近似最优解的方法。在变量允许的变化区间,不断产生随机点,并计算其约束函数和目标函数的值,对满足约束条件的点,逐个比较其目标函数的值,将坏的点抛弃,保留好的点,最后便得到最优解的近似解。这种方法是建立在概率论的基础上,所取随机点越多,则得到最优解的概率也就越大^[16]。由于大多数计算机程序库中有随机数发生器,所以应用这种方法是很方便的;但是其计算精度较差、效率较低,一般用于粗选。将表 2 中的初值依次输入到 Ansys 的 Design Opt 优化模块中的 Random Design,随机搜索次数

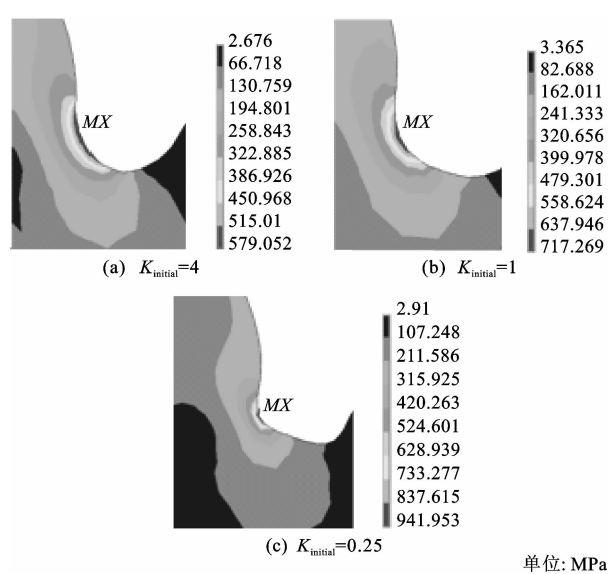


图 5 不同 K_{initial} 下的弯曲应力云图

Fig. 5 Bending stress contour with different K
设为 300 次,3 种情况都历时 300 s 左右完成搜索。
将第一种初值情况的优化过程列于图 6,在第 20 次达到最优值,其余初值优化结果见表 3。

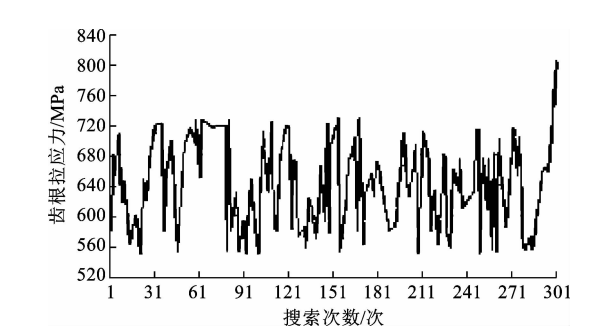


图 6 随机搜索次数与齿根应力关系

Fig. 6 Relation between bending stress and random searches

表 3 随机优化后的参数值

| K_{opt} | $w_{0\text{opt}}$ | $w_{1\text{opt}}$ | $w_{2\text{opt}}$ | MAXSEQV/MPa |
|------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------|
| 6.84 | 5.02 | 1.4 | 2.67 | 547.02 |
| 6.84 | 5.02 | 1.4 | 2.67 | 547.02 |
| 6.84 | 5.02 | 1.4 | 2.67 | 547.02 |

其中: K_{opt} 为优化后不变形状因子; $w_{0\text{opt}}$ 、 $w_{1\text{opt}}$ 、 $w_{2\text{opt}}$ 为优化后权因子。

对于随机搜索方法来说, $0 < K < 1$ 、 $K = 1$ 、 $K > 1$ 这 3 种情况的优化结果相同,最优结果为 547.02 MPa,齿根弯曲应力云图见图 7;相对于优化前齿根最大应力 691.32 MPa,减小了 21%。因为随机搜索方法求的是全局域的粗略最优值,因此该值并非实际最优值,但能为实际最优值提供一个参考,即实际最优值一定小于随机搜索方法的优化结果。

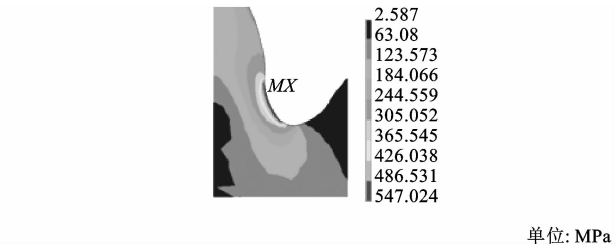


图 7 随机优化后齿轮应力云图

Fig. 7 Bending stress contour after random optimization

2.1.2 零阶和一阶方法组合优化

零阶优化方法和一阶优化方法通过对目标函数逼近或对目标函数加罚函数的方法,将约束的优化问题转换为非约束优化问题。2 种算法的主要区别在于:零阶算法不利用一阶导数信息,一阶算法利用一阶导数信息。先将表 2 初值参数输入 Ansys 的 Design Opt 优化模块中的 Sub-Problem,优化完毕不要退出程序,直接选取一阶优化 First-Order 再次进行优化。

第 1 种初值的优化过程如图 8 所示,第 17 次迭代达到最优值 540.77 MPa。图 9 表示第 1 种初值优化后齿轮应力云图,其余列于表 4,参数含义同表 3。

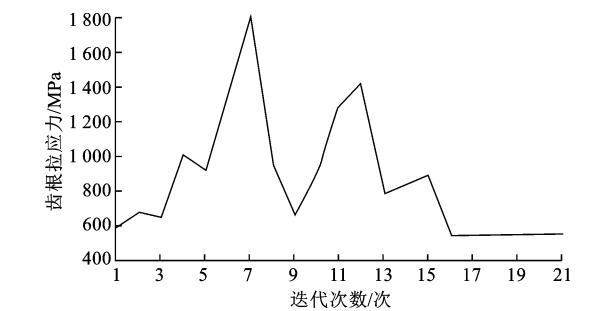


图 8 一阶优化迭代次数与齿根应力关系

Fig. 8 Relation between bending stress and iteration of First-Order optimization

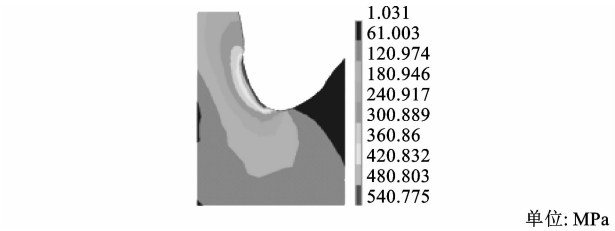


图 9 一阶优化后齿轮应力云图

Fig. 9 Bending stress contour after First-Order optimization

表 4 一阶优化后的参数值

| K_{opt} | $w_{0\text{opt}}$ | $w_{1\text{opt}}$ | $w_{2\text{opt}}$ | MAXSEQV/MPa |
|------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------|
| 8.82 | 1.00 | 0.34 | 1.02 | 540.77 |
| 7.62 | 1.85 | 1.16 | 5.54 | 554.19 |
| 5.15 | 0.61 | 0.15 | 0.19 | 558.83 |

通过表 3 和表 4 比较可知,最优结果为 540.77 MPa,相对标准齿轮降低了 21.8%。

2.2 优化结果分析

上述结果从仿真优化的角度是可行的,并且齿根最大弯曲应力的减小量也是非常可观的。为了验证应力的减小不是由于形状改变而引起的网格变化导致应力的减小,将齿轮看作悬臂梁来对危险截面进行解析计算。

如图 10 所示,在坐标 $w\lambda$ 、 η 坐标系中, S 是危险点, S_F 是危险界面的宽度, δ 是齿顶载荷角, h 是弯曲力臂, F_s 是 F_n 的水平分量;则

$$\sigma_b = \frac{6F_n h \cos(\delta)}{BS_F^2} \tag{5}$$

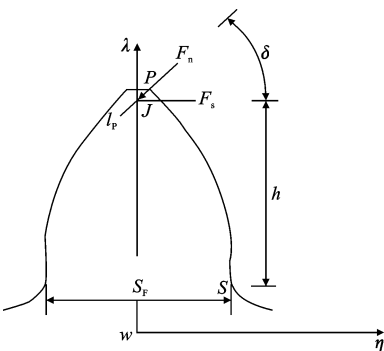


图 10 单齿悬臂梁示意图
Fig. 10 Diagram of single tooth cantilever

因为只对齿根部位进行了优化,渐开线部分未改变,所以载荷角 δ 不变, F_s 都相同,齿宽 B 为单位齿宽;故只有 h 和 S_F 是 2 个变量,危险点 S 的坐标通过有限元模型最大弯曲应力处节点的坐标读取;要求 h ,必须先求出 J 点的坐标。设力 F_n 方向所在直线为 l_p ,顶点 P 的坐标也可由模型关键点坐标读取,则直线 l_p 的方程即可确定,进而求得 J 点坐标为(0,18.73)。

将优化前齿轮、最优齿轮危险截面参数列于表 5。

表 5 齿轮危险截面参数
Tab. 5 Parameters of dangerous section

| 序号 | S 点坐标 | S_F | h | h/S_F^2 |
|----------|--------------|-------|------|-----------|
| 1(优化前齿轮) | (2.96,12.72) | 5.92 | 6.01 | 0.171 |
| 2(最优齿轮) | (3.49,12.22) | 6.98 | 6.51 | 0.134 |

将序号 1 齿轮作为参考,序号 2 的齿轮从有限元分析上应力降低了 21.8%;从悬臂梁分析, h/S_F^2 相对降低了 21.6%,两者基本相同。

为了进一步从解析方法上验证有限元的准确性,求齿轮的齿形系数 Y_{Fa} 和应力集中系数 Y_{Sa} 。由于优化后的齿根过渡曲线不是滚刀圆角展成的,因

此不采用 30°切线法确定危险点的位置,还是采用有限元分析的最大弯曲应力点作为危险点。根据文献[1]及上述分析可知,求齿形系数 Y_{Fa} 的参数是已知的,只要求得了危险点的曲率半径便可以求得应力集中系数 Y_{Sa} 。由 Matlab 编程求得两齿轮危险点的曲率半径分别为 $\rho_1=1.3828$ 、 $\rho_2=1.4223$,齿根弯曲应力计算为

$$\sigma_b = \frac{F_s}{Bm} Y_{Fa} Y_{Sa} \tag{6}$$

水平分力 F_s 、单位齿宽 B 、模数 m 都相同,只要比较 Y_{Fa} 与 Y_{Sa} 的乘积即可,其值列于表 6,参数含义同表 5。

表 6 齿轮齿形系数和应力集中系数
Tab. 6 Parameters of dangerous section

| 序号 | S 点坐标 | Y_{Fa} | Y_{Sa} | $Y_{Fa} \cdot Y_{Sa}$ |
|----------|--------------|----------|----------|-----------------------|
| 1(优化前齿轮) | (2.96,12.72) | 2.487 | 1.646 | 4.1 |
| 2(最优齿轮) | (3.49,12.22) | 1.940 | 1.750 | 3.4 |

从表 6 可以看出, Y_{Fa} 与 Y_{Sa} 的乘积相对减小了 17.1%,与有限元结果 21.8%相差 4.7%,但该计算结果也证实了优化结果相对优化前齿轮齿根应力确实减小了。

2.3 齿面接触分析

为了观察优化后齿轮表面的接触状况,也为了进一步验证齿根应力的减小量,采用三维有限元进行接触分析。先用 PLANE42 单元建立二维有限元模型,采用相同的网格大小进行映射网格划分;再采用 SOLID45 单元将其拉伸成三维有限元模型;大齿轮采用 target170 作为目标单元,小齿轮采用 con-tal174 作为接触单元;为模拟被动齿轮阻力矩,需将大齿轮齿圈进行全约束,并限制小齿轮齿圈的径向与轴向自由度,再将载荷以转矩形式转化为小动齿轮齿圈节点上的平均切向力,有

$$F_\tau = \frac{T}{Rn} = 2(N) \tag{7}$$

式中: F_τ 为小齿轮齿圈节点上的平均切向力; R 为小齿轮齿圈半径; n 为小齿轮齿圈节点总数; T 为载荷。

优化前加载情况及优化后局部网格放大见下页图 11,两者大概历时 40 min 完成接触计算。

下页图 12 显示的是优化前后整体等效应力云图,最大值指的是齿根最大等效压应力,优化后降低约 16%;下页图 13 显示局部接触等效应力云图,优化前后基本不变;下页图 14 显示接触应力云图,优化后略有减小 1.2%,可能由于变形或者计算误差导致啮合点位置改变造成,理论上不变;下页图 15 显示优化前齿根弯曲拉应力为 88.82 MPa,优化后

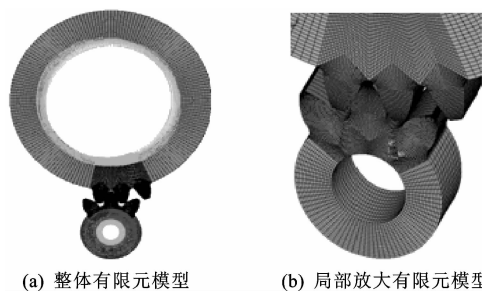


图 11 三维接触有限元模型

Fig. 11 Three-dimensional finite element model of contact

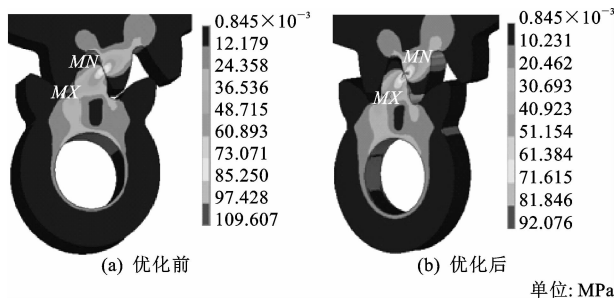


图 12 啮合齿轮整体等效应力云图

Fig. 12 Mises stress contour of mesh gear

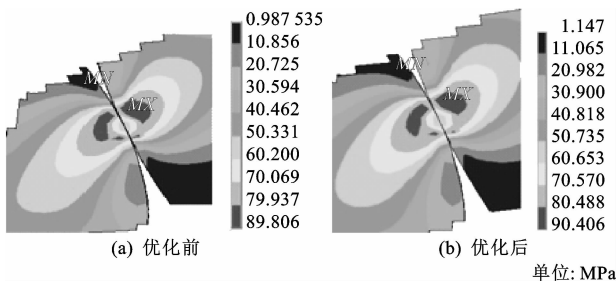


图 13 局部等效接触应力云图

Fig. 13 Part von Mises contact stress contour

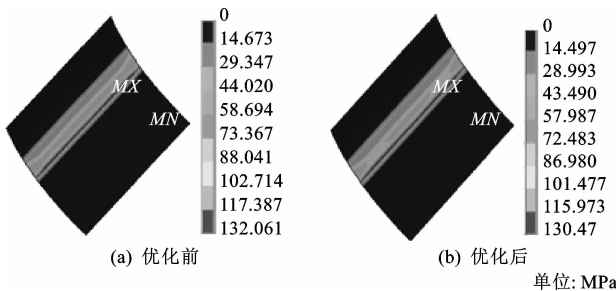


图 14 齿面接触应力云图

Fig. 14 Contact stress contour of tooth profile

为 80.39 MPa,降低了约 9.5%。可以看出,齿根弯曲拉应力的减小量与二维有限元结果差别较大,这主要是由于网格划分方式及网格精度、加载位置和载荷大小不同引起的;但总的来看,都能使齿根弯曲应力降低。

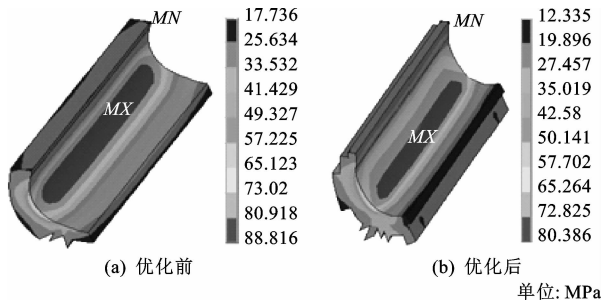


图 15 局部弯曲等效拉应力云图

Fig. 15 Part von Mises bending tensile stress contour

3 结 语

(1)介绍了有理二次 Bezier 曲线的性质,采用该曲线描述滚刀展成的齿轮齿根过渡曲线,以 3 个权因子为优化设计变量,齿根最大弯曲拉应力为目标函数;为加快优化速度,建立二维有限元模型,采用随机搜索和一阶方法进行优化。结果表明:对于 10 齿齿轮,最优化结果使齿根弯曲应力降低 21.8%。

(2)采用单齿悬臂梁模型对优化结果进行验证,该结果与有限元分析的结果基本一致,但通过比较齿形系数和应力集中系数的乘积,发现应力降低了 17.1%,与有限元结果 21.8%相差 4.7%,但该结果仍然可以证实优化结果确实使齿根应力降低。

(3)进行齿轮接触分析,在给定接触位置及载荷下,优化后齿根弯曲拉应力降低 9.5%,等效接触应力相对优化前基本不变,而接触应力降低 1.2%,可能是变形或计算误差导致啮合位置的改变造成。

(4)分析方法不同、网格划分方式不同、加载位置和载荷大小不同,都会对优化结果带来影响,但都表明采用 Bezier 曲线优化齿根过渡曲线确实是可行的,具有工程应用价值。

(5)针对齿根弯曲强度问题,理论上分析了曲线优化可以提高齿轮的弯曲强度,但如何制造优化的齿轮以及通过试验验证优化齿轮弯曲强度的提高是今后研究的内容。

参考文献:

References:

[1] 朱孝录,鄂中凯. 齿轮承载能力分析[M]. 北京:高等教育出版社,1992.
ZHU Xiao-lu, E Zhong-kai. Gear bearing capacity analysis[M]. Beijing: Higher Education Press, 1992. (in Chinese)
[2] 靳广虎,朱如鹏,李政民卿,等. 齿宽系数对面齿轮齿

- 根弯曲应力的影响[J]. 中南大学学报:自然科学版, 2011,42(5):1303-1309.
- JIN Guang-hu, ZHU Ru-peng, LI Zheng-min-qing, et al. Impact of coefficient of tooth width on bending stress of face gear[J]. Journal of Central South University: Science and Technology, 2011, 42(5): 1303-1309. (in Chinese)
- [3] Li S. Effect of addendum on contact strength, bending strength and basic performance parameters of a pair of spur gears[J]. Mechanism and Machine Theory, 2008,43(12):1557-1584.
- [4] Sánchez M B, Pedrero J I, Pleguezuelos Miguel. Contact stress calculation of high transverse contact ratio spur and helical gear teeth[J]. Mechanism and Machine Theory, 2013,64(6):93-110.
- [5] Wang J, Howard I. Finite element analysis of high contact ratio spur gears in mesh[J]. Journal of Tribology, 2005,127(3):469-483.
- [6] Wang L P, Xu Y Q, Wang L L, et al. Effect of transition curve on gear bending strength[J]. Applied Mechanics and Materials, 2010,34-35(10):1640-1644.
- [7] 何晓华, 陈兵奎. 齿条型刀具对齿轮弯曲疲劳强度的影响分析[J]. 机械传动, 2011,35(7):58-61.
- HE Xiao-hua, CHEN Bing-kui, et al. Impact of rack-kind tools on the bending fatigue strength of gear teeth[J]. Journal of Mechanical Transmission, 2011, 35(7):58-61. (in Chinese)
- [8] Sankar S, Nataraj M. Profile modification—a design approach for increasing the tooth strength in spur gear[J]. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2011,55(1):1-10.
- [9] Pedersen N L. Improving bending stress in spur gears using asymmetric gears and shape optimization[J]. Mechanism and Machine Theory, 2010,45(11):1707-1720.
- [10] Kumar V S, Muni D V, Muthuveerappan G. Optimization of asymmetric spur gear drives to improve the bending load capacity[J]. Mechanism and Machine Theory, 2008,43(7):829-858.
- [11] Costopoulos T, Spitas V. Reduction of gear fillet stresses by using one-sided involute asymmetric teeth[J]. Mechanism and Machine Theory, 2009,44(8):1524-1534.
- [12] Hebbal M S, Math V B, Sheeparamatti B G. A study on reducing the root fillet stress in spur gear using internal stress relieving feature of different shapes[J]. Int J RTE, 2009,1(5):163-165.
- [13] 杨庆祥, 高玉魁, 王仁智, 等. 渗碳及渗碳喷丸齿轮轮齿弯曲疲劳极限的定量分析[J]. 机械工程学报, 2004,40(7):34-40.
- YANG Qing-xiang, GAO Yu-kui, WANG Ren-zhi, et al. Quantitative analyses on bending fatigue limits of teeth of carburized and shot-peened gear specimens[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2004,40(7):34-40. (in Chinese)
- [14] 罗希年. 齿根弯曲应力计算的优化[D]. 西安:长安大学, 2012.
- LUO Xi-nian. The optimization of calculation of gear bending stress[D]. Xi'an: Chang'an University, 2012. (in Chinese)
- [15] 张敏. 直齿圆柱齿轮齿根应力计算与动态测试[D]. 长沙:湖南大学, 2012.
- ZHANG Min. The calculation and dynamic test on root stress of spur gears[D]. Hunan: Hunan University, 2012. (in Chinese)
- [16] 王仁宏. 数值逼近[M]. 北京:高等教育出版社, 1999.
- WANG Ren-hong. Numerical approximation[M]. Beijing: Higher Education Press, 1999. (in Chinese)