

文章编号:1671-8879(2015)05-0111-06

# 历史街区慢行交通连续网络设计鲁棒优化模型

王秋平<sup>1</sup>, 刘星明<sup>2</sup>, 魏 华<sup>3</sup>

(1. 西安建筑科技大学 土木工程学院, 陕西 西安 710055; 2. 广东省电力设计研究院, 广东 广州 510000;  
3. 长安大学 公路学院, 陕西 西安 710064)

**摘 要:**为了提出合理、可靠的慢行交通网络设计的新方法,基于历史街区慢行系统的结构共性——网络性,引入复杂网络理论与分析方法,对历史街区中独立的慢行交通网络进行拓扑结构转化;假定 OD 需求属于一个有界闭集,以道路红线宽度作为慢行通道通行能力增加的上限,利用鲁棒优化方法建立不确定 OD 需求下考虑用户均衡约束的慢行交通连续网络设计极小极大模型,并应用灵敏度分析结合逐次平均法进行模型求解,最后以西安市湘子庙历史街区慢行网络为例进行实际计算。研究表明:在进行交通网络设计方案确定时,鲁棒优化投资计划比传统投资计划的系统总阻抗大,但更具稳定性,可有效规避投资风险;在 OD 需求不确定的情况下,“鲁棒”投资计划显得更具稳定性,能够更大程度的规避风险;该模型可以根据交通规划决策者对于风险的偏好程度和投资费用,确定各路段的“鲁棒”投资计划。

**关键词:**交通工程;历史街区;慢行交通;连续网络设计;需求不确定;鲁棒优化

**中图分类号:**U491 **文献标志码:**A

## Robust optimization model of continuous network design of historic district slow traffic

WANG Qiu-ping<sup>1</sup>, LIU Xing-ming<sup>2</sup>, WEI Hua<sup>3</sup>

(1. School of Civil Engineering, Xi'an University of Architecture and Technology, Xi'an 710055, Shaanxi, China;  
2. Guangdong Electric Power Design Institute, Guangzhou 510000, Guangdong, China;  
3. School of Highway, Chang'an University, Xi'an 710064, Shaanxi, China)

**Abstract:** In order to put forward a reasonable and reliable slow traffic network design method, the topology conversion of separate slow traffic network in historic district was made based on theory of complex network and the common structure of historic district slow traffic system. In this paper, it's assumed that the demands between every origin and destination belonged to a bounded closed set, and the widths of road boundary lines were the upper limit of the road capacity. A min-max model of slow traffic continuous network design was proposed on the conditions of demand uncertainty and user equilibrium by use of robust optimizations, and sensitivity analysis combined with the method of sequence average was applied to solve this model. At last, the slow traffic network of Shoshi Temple historic district in Xi'an was taken as an example for the actual calculation. The results indicate that at the time of determining transportation network design scheme, the total travel time of robust investment

收稿日期:2015-04-20

基金项目:国家自然科学基金项目(51278396);中央高校基本科研业务费专项资金项目(310821151016)

作者简介:王秋平(1962-),女,陕西城固人,教授,工学博士,E-mail:583990445@qq.com。

is a little larger but this design is more reliable than the traditional solutions; robust investment's reliability under the condition of demand uncertainty can more effectively avoid investment risks. According to the risk preference degree and investment costs of the traffic planning decision maker, this model can determine robust plan of every road. 4 tabs, 4 figs, 15 refs.

**Key words:** traffic engineering; historic district; slow traffic; continuous network design problem; demand uncertainty; robust optimization

## 0 引言

历史街区的规划在保护与更新的平衡中不断发展,道路交通规划作为支撑历史街区发展的核心骨架,成为发展平衡问题中的重要研究对象。然而历史街区通常位于城市中心区,狭窄的道路路网往往成为交通发展的瓶颈;路网容量有限,狭小的道路空间承担了大量的汽车、公交车及慢行交通,致使交通运行效率低下,局部道路饱和度较高。街区内部断头路多,慢行空间无法形成完整的网络体系,这无疑增加了绕行距离。在突发事件或节假日期间,本地居民和游客的出行效率受到极大影响。因此,基于保护层面,慢行交通规划需坚持利用及改造现有道路资源,从慢行网络整体的角度去探寻解决方法。

近年来国内外学者从历史街区保护和交通网络设计角度进行了大量研究,惠英等在明确历史街区交通发展的价值判断基础上,针对历史街区交通规划进行了框架编制<sup>[1]</sup>;赵昕等对实行拥挤收费政策后的旅游出行方式分担率进行了量化<sup>[2]</sup>;卞长志等以随机规划理论和均值-方差模型为基础,建立了不确定 OD 需求下鲁棒交通网络设计模型<sup>[3]</sup>;Uk-kusuri 等考虑了用户均衡约束下多阶段不确定 OD 的交通网络设计模型<sup>[4]</sup>。关于连续网络设计问题及其算法的相关研究,还可以参考文献[5-8]。通过分析可以看出,国内外研究多集中于历史街区保护性规划和城市交通网络设计,而历史街区交通网络设计需要考虑其内部功能的复杂性,街区内部需要消化大量旅游出行需求,同时承担居住功能。因此,为了合理地规划街区内部交通,使整个交通系统在各种不确定的情况下正常运行不致崩溃,需选择一种保守、可靠并且可有效规避风险的方法。历史街区慢行网络同城市道路网一样,具有复杂系统的结构共性——网络性,由典型的点和边构成,都具有两大基本特征,即增长性和偏好依附性<sup>[9]</sup>。随着时间的推移不断扩张,并存在着一些慢行核心节点,随着城市慢行中心规模的不断扩大,对客流的吸引力会大于其他慢行节点<sup>[10]</sup>。因此对于一个典型的、开放的复杂系统优化问题,本文引入复杂网络理论与分析

方法,对历史街区中独立的慢行交通网络进行拓扑结构转化,采用原始法(primal approach),将慢行交叉口视为节点,将慢行路段作为边构建  $L$  空间网络。

## 1 连续交通网络设计问题

连续网络设计问题(continuous network design problem)的研究在过去的几十年中不断深入,连续交通网络设计问题一般是在给定投资预算的约束前提下,通过改善现有路段通行能力,以优化系统总阻抗或后备能力为目标,使其满足某种均衡条件<sup>[11]</sup>。连续网络设计问题的模型通常可通过 2 种方法建立:双层规划模型(BLP)和带均衡约束的数学规划模型(MPEC)。

在实际应用中,由于模型选择、现状数据及人口、土地利用等外生变量的共同影响,OD 需求通常很难预测,系统特性或参数的摄动常常是不可避免的,鲁棒优化作为系统参数不确定性与外部扰动引发的优化问题,代表着一种保守的观点,力求在最坏情况下取得最好的结果,从而使系统在一定的参数摄动下具有不敏感性,即鲁棒性。

Ben-Tal 和 Nemirovski 以凸优化理论为基础,假定不确定参数集为有界凸闭集,建立了鲁棒优化模型并应用于一些实际问题中<sup>[12]</sup>。本文采用鲁棒优化方法,研究不确定 OD 需求下慢行交通连续网络设计问题。假定 OD 需求属于一个有界凸闭集,建立不确定 OD 需求条件下用户均衡约束的慢行交通连续网络设计极小极大模型。其中 OD 需求输入由常住居民出行的固定项和旅游出行的随机项组成,而鲁棒优化模型属于一类非线性、非凸的 MPEC 问题<sup>[13]</sup>,求解极为困难。为了克服这一问题,本文采用 Yin 等提出的灵敏度分析法<sup>[14]</sup>来分析慢行网络鲁棒性,即不确定项在发生摄动的情况下,以系统总时间和其相对于需求的导数的加权作为目标函数,得到的最优解仍可满足可行性约束条件,灵敏度越高,则系统的抗干扰能力越强,鲁棒性越好。

在出行者行为方面做一假定:①忽略自行车和步行在路段上的出行特性差异;②慢行出行者行为满足用户均衡分配(user equilibrium);③常住居民的出行可视作固定需求,旅游出行视为不确定因素。

## 2 历史街区慢行交通鲁棒连续网络设计模型

在历史街区慢行交通网络  $G=(N,A)$  中,定义  $N$  为网络节点的集合; $A$  为网络边的集合; $W$  是网络上 OD 对  $rs$  的集合; $R_w$  是所有 OD 对  $rs \in W$  的路径集合; $d_{rs}$  是 OD 对  $W$  的需求。

为了方便构建连续慢行网络设计问题的鲁棒优化模型,定义以下符号:

$v_a$  为慢行网络路段  $a$  上的流量,  $a \in A$ ;  $W$  为 OD 对  $rs$  的集合; $d_{rs}$  为 OD 对  $rs$  之间的交通量; $d_{rs}^0$  为 OD 对  $rs$  之间的交通量名义值,即传统交通规划的预测交通量; $f_p^{rs}$  为慢行网络路径  $p$  上的流量,  $p \in rs, rs \in W$ ;  $\delta_{ap}^{rs}$  如果路段  $a$  属于路径  $p$ , 则  $\delta_{ap}^{rs} = 1$ , 否则  $\delta_{ap}^{rs} = 0, rs \in W$ ;  $c_a$  为路段  $a$  的原始通行能力;  $u_a$  为路段  $a$  增加或减少的通行能力,考虑历史街区保护的的特殊性,以道路红线宽度作为通行能力增加的界限; $h_a(u_a)$  为路段  $a$  的改建投资函数,这里假定投资函数是非负、递增、可微的线性函数,且  $h_a(u_a) = u_a$ ;  $t_a(v_a, u_a)$  为路段  $a$  的走行时间函数,它与路段流量  $v$  和路段通行能力增加值  $u$  有关; $\theta$  为 OD 不确定性的偏好参数,表达交通规划者对于交通需求不确定程度的预测,  $0 \leq \theta \leq 1$ ;  $B$  为网络的总投资预算限额

$$\min \max \sum_{a \in A} v_a t_a(v_a, u_a) \quad (1)$$

$$\text{s. t. } v_a = \sum_{rs \in W} \sum_{p \in R_{rs}} f_p^{rs} \delta_{ap}^{rs} \quad (2)$$

$$\sum_{p \in R_{rs}} f_p^{rs} = d_{rs}, rs \in W \quad (3)$$

$$-c_a \leq u_a \leq c_a^{\max} - c_a, \forall a \in A \quad (4)$$

$$Q = \{d | (1-\theta)d_{rs}^0 \leq d_{rs} \leq (1+\theta)d_{rs}^0, \theta \in [0,1]\} \quad (5)$$

$$f_p^{rs} \geq 0, p \in rs \quad (6)$$

目标函数中式(1)为最小化系统总旅行时间;式(2)和式(3)为网络流量分配条件;式(4)为通行能力调整的约束范围(基于街区保护,维持历史街区道路红线宽度,仅在现有道路供给中进行慢行通道范围调整);式(5)为 OD 需求的变化范围;式(6)为非负条件。

可以看出,以上鲁棒优化模型属于一类非线性、非凸 MPEC 问题,这类问题包含无穷多个约束条件,求解十分困难。

## 3 算法求解

由于不确定 OD 需求下鲁棒网络优化模型是一个 NP-hard 问题<sup>[15]</sup>。本文提出了一个启发式算法求解以上问题。文献[14]提出的基于敏感度分析的方法,可以得到平衡路段流量与路段能力增加之间的近似线性关系和 OD 对需求的导数关系。本文采用灵敏度分析结合逐次平均法,通过一系列迭代过程,直到符合收敛条件求得最优解。具体算法过程如下:

Step1:初始化,记外层迭代次数  $n=0$ ,确定初始值  $u_a^n$ ;

Step2:在给定  $u_a^n$  的情况下,求解对应的最坏需求情景的内层问题

$$\max \sum_{a \in A} v_a t_a(v_a, u_a)$$

$$\text{s. t. } \sum_{a \in A} h_a(u_a) \leq B$$

$$v_a = \sum_{rs \in W} \sum_{p \in R_{rs}} f_p^{rs} \delta_{ap}^{rs}$$

$$\sum_{p \in R_{rs}} f_p^{rs} = d_{rs}, rs \in W$$

$$-c_a \leq u_a \leq c_a^{\max} - c_a, \forall a \in A$$

$$Q = \{d | (1-\theta)d_{rs}^0 \leq d_{rs} \leq (1+\theta)d_{rs}^0, \theta \in [0,1]\}$$

$$f_p^{rs} \geq 0, p \in rs$$

Step3:根据得到的最佳值  $d^n$ ,求解以下确定性的网络设计问题,并找到搜索方向  $y^n$

$$\min \sum_{a \in A} v_a t_a(v_a, u_a)$$

$$\text{s. t. } \sum_{a \in A} h_a(u_a) \leq B$$

$$v_a = \sum_{rs \in W} \sum_{p \in R_{rs}} f_p^{rs} \delta_{ap}^{rs}$$

$$\sum_{p \in R_{rs}} f_p^{rs} = d_{rs}, rs \in W$$

$$-c_a \leq u_a \leq c_a^{\max} - c_a, \forall a \in A$$

$$f_p^{rs} \geq 0, p \in rs$$

Step4:迭代,计算  $u_a^{n+1} = u_a^n + \lambda^{(n)}(y^n - u_a^n)$ ;这里  $\lambda^{(n)}$  可取  $\frac{1}{n}$ ;

Step5:收敛检验,如果  $\max(|u_a^{n+1} - u_a^n|) \leq \delta$ ,则停止;否则,令  $n=n+1$ ,返回 Step2。

算法的第 2 步和第 3 步须分别求解一个 MPEC 问题。本文采用文献[14]中基于灵敏度的算法进行求解。

## 4 实例分析

本文以西安湘子庙历史街区(图 1)慢行网络为

研究对象,为了研究方便,需将慢行网络进行适当的简化并进行  $L$  空间拓扑。该网络包含 13 个节点,15 条路段,4 个 OD 对,其中路段 6 为拟新建路段,如图 2 所示。路段费用函数采用 BPR 函数

$$t_a(v_a,u_a)=t_a^0[1+0.15(\frac{x_a}{c_a+z_a})^4]$$

(7)

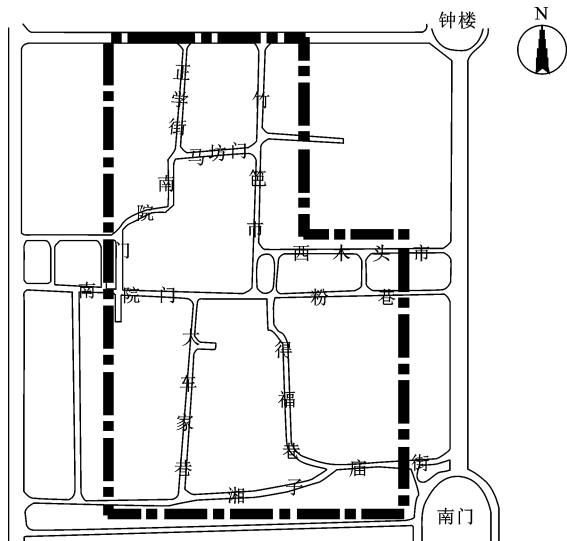


图 1 湘子庙历史街区范围

Fig. 1 Scope of Shoshi Temple historic district

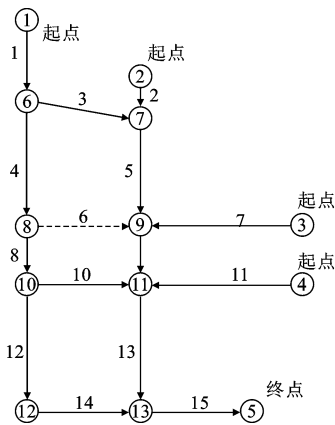


图 2 湘子庙历史街区慢行网络

Fig. 2 Slow traffic network of Shoshi Temple historic district

路段费用函数的相关参数( $t_a^0, c_a$ )和需求名义值 $d_n^0$ 设定见表 1 和表 2。路段投资费用函数假设为 $h_a(u_a)=u_a$ 。设收敛精度 $\delta=0.01$ ,在投资预算 $B=10\,000$ ,及 OD 需求不确定性参数 $\theta=0.1$ 的情况下,系统总阻抗的变化情况如图 2 所示。

根据上一节给出的算法对鲁棒优化模型进行求解。图 3 给出了在投资预算 $B=10\,000, \theta=0.1$ 时算法的收敛情况,可以看出在迭代次数逐渐增加时,系统总阻抗不断下降并趋于稳定。表 3 列出了在预算 $B=10\,000$ 时, $\theta$ 不同的情况下的“名义”投资计

划和“鲁棒”投资计划。而当投资预算不断增加时,路段的通行能力不断加大至自由流状态,因此系统总阻抗随 $B$ 的变化在此不做赘述。

表 1 湘子庙历史街区慢行网络路段自由流行走时间和路段通行能力

Tab. 1 Free flow travel time and link capacity of slow traffic network of Shoshi Temple historic district

路段编号	自由流行走时间/s	现有路段通行能力/(pcu·h <sup>-1</sup> )
1	12	16 320
2	10	34 272
3	9	19 040
4	21	12 240
5	11	26 572
6	6	0
7	21	19 040
8	6	12 240
9	6	26 572
10	6	28 832
11	20	28 832
12	22	16 320
13	22	14 688
14	17	35 360
15	13	35 360

注:表中路段通行能力为现有路段宽度的总通行能力,自行车流和步行流量统一按通过路段的单位时间内的总人数统计。

表 2 湘子庙历史街区慢行网络 OD 之间的名义需求

Tab. 2 Nominal demand of OD pairs in slow traffic network of Shoshi Temple historic district

OD	1	2	3	4
5	8 000	32 000	16 000	24 000

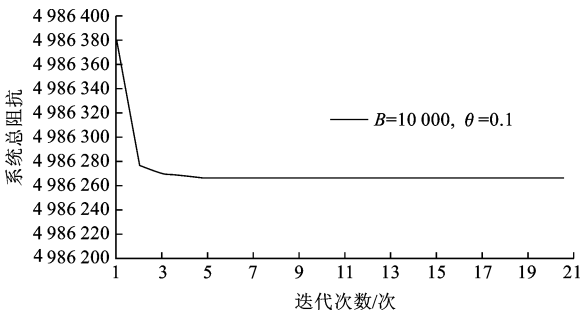


图 3 系统总阻抗与迭代次数的关系

Fig. 3 Relation between system costs and number of iteration

表 3 投资预算 $B=10\,000$ 时,“名义”和“鲁棒”投资计划

Tab. 3 Nominal and robust investment solutions when available budget is 10 000

路段	8~9	9~11	11~13	13~5
名义计划( $\theta=0$ )	40	1 487	5 003	3 470
鲁棒计划( $\theta=0$ )	0	1 672	4 367	3 961
名义计划( $\theta=0.5$ )	544	2 156	4 178	3 132
鲁棒计划( $\theta=0.5$ )	1 623	2 175	3 159	3 051

为了明确地比较鲁棒解 $u_R$ 与预测名义解 $u_N$  2 种投资计划之间的差异和对系统总阻抗的影响,

在不确定集合内,随机产生 500 个需求,均匀分布在  $[0.6d_n^0, 1.4d_n^0]$  之间。为了比较 2 种投资计划在不同预算  $B$  条件下,系统总阻抗的期望和标准差的变化规律,这里特别对 2 种投资计划之间期望和标准差的差异进行定义

$$\begin{aligned} &(\text{mean}(\sum_a t_a(v_a, u_a^N) v_a(\tilde{d})) - \\ &\text{mean}(\sum_a t_a(v_a, u_a^R) v_a(\tilde{d}))) / \text{mean} \\ &\sum_a t_a(v_a, u_a^R) v_a(\tilde{d}) \end{aligned} \tag{8}$$
$$\begin{aligned} &(\text{std}(\sum_a t_a(v_a, u_a^N) v_a(\tilde{d})) - \text{std}(\sum_a t_a(v_a, \\ &u_a^R) v_a(\tilde{d}))) / \text{std}(\sum_a t_a(v_a, u_a^R) v_a(\tilde{d})) \end{aligned} \tag{9}$$

从图 4 可以看出,由“鲁棒”投资计划产生的系统总阻抗的期望值要高于“名义”投资计划,而“鲁棒”投资计划产生的系统总阻抗的标准差却低于“名义”投资计划。这说明鲁棒解产生的系统总阻抗更大、更趋于保守,但是稳定性更高。

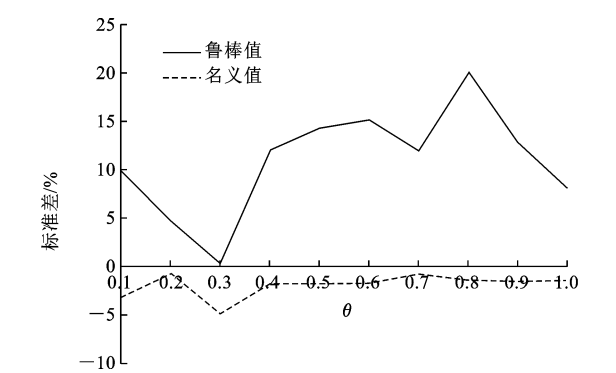


图 4 不同  $\theta$  下“名义”和“鲁棒”投资计划对应的期望和标准差差异  
Fig. 4 Percent differences between the mean and standard deviation of total travel times associated with nominal and robust investment plans under different  $\theta$

将鲁棒优化模型的最优值记为  $y^*(u_R)$ ,把“名义”投资计划产生的系统总阻抗记为  $y^*(u_N)$ 。在随机产生的 500 个需求的基础上,得到了 2 种投资计划的系统总阻抗和最优目标值  $y^*(u_R)$  和  $y^*(u_N)$ 。表 4 列出了在  $\theta=0.5$  时,不同的投资预算  $B$  条件下,满足  $\sum_a t_a(v_a, u_R) v_a(\tilde{d}) \leq y^*(u_N)$  和  $\sum_a t_a(v_a, u_N) v_a(\tilde{d}) \leq y^*(u_R)$  的随机需求个数占随机需求总数 500 的百分比分别用  $A_N$  和  $A_R$  表示。

从表 4 可以看出,在 500 个随机需求中,只有 41%左右的随机需求不超过  $y^*(u_N)$ ,换言之,“名义”投资计划的可靠度只有 41%。然而在“鲁

棒”投资计划下,  $y^*(u_R)$  的可靠度大约有 93%。因此,在 OD 需求不确定的情况下,“鲁棒”投资计划显得更具稳定性,能够更大程度的规避风险。模型可以根据交通规划决策者对于风险的偏好程度和投资费用,确定各路段的“鲁棒”投资计划。

表 4  $\theta=0.5$  时,“名义”和“鲁棒”投资计划得到的系统总阻抗的可靠度  
Tab. 4 Reliability of total travel time associated with robust and nominal capacity investment plans when  $\theta=0.5$

$B$	$y^*(u_N)$	$A_N/\%$	$y^*(u_R)$	$A_R/\%$
10 000	4 986 266.00	38.3	5 307 959.34	92.3
20 000	4 952 305.83	41.0	5 283 510.92	91.0
30 000	4 939 637.48	41.7	5 239 177.46	93.3
40 000	4 904 284.71	43.2	5 186 419.03	93.0
50 000	4 881 382.57	42.3	5 124 648.96	96.6

因此,根据交通规划决策者对需求不确定性的偏好程度,在投资预算确定情况下,可以采用鲁棒优化模型合理确定需要改造的路段。而投资方案  $h_a(u_a)=u_a$ ,因此通过  $h_a$  相应的路段通行能力,即可得到路段扩建宽度。例如从表 3 中可知,当投资预算  $B$  为 10 000,且决策者对于 OD 不确定性的预测参数  $\theta=0.5$  时的鲁棒优化投资方案。可得到路段扩建宽度为:路段 8~9 拓宽 0.68 m,路段 9~11 拓宽 0.91 m,路段 11~13 拓宽 1.32 m,路段 13~5 拓宽 1.27 m。

## 5 结 语

(1)对历史街区慢行交通网络系统设计建立了鲁棒优化模型,结果表明:在 OD 需求不确定的情况下,模型可以根据交通规划决策者对于风险的偏好程度和投资费用,确定各路段的鲁棒投资计划,相比传统的投资计划更具稳定性,可有效规避风险。

(2)从交通流角度入手,通过模拟慢行网络用户出行行为、确定政府部门规划目标等,在保证慢行系统鲁棒性的情况下,确定最佳的路段投资方案。利用西安湘子庙历史街区慢行交通网络,以现状道路红线宽度作为通行能力增加的界限建立鲁棒优化模型,结果表明,鲁棒投资方案更具可靠性。

(3)当投资预算确定,且决策者对于 OD 不确定性的预测参数  $\theta$  取合理值时得鲁棒优化投资方案,可据此计算各路段扩建宽度。

(4)本文忽略自行车和步行在路段上的出行特性差异,各种出行方式选择行为以及出行方式分担率是如何影响慢行交通网络设计,是今后需要进一步研究的方向。

## 参考文献:

## References:

- [1] 惠英, 张玉鑫, 杨东援, 等. 历史街区的交通规划设计编制框架探讨[J]. 城市规划学刊, 2009(5): 101-106.  
HUI Ying, ZHANG Yu-xin, YANG Dong-yuan. A discussion on transport planning and design framework for historic areas[J]. Urban Planning Forum, 2009(5): 101-106. (in Chinese)
- [2] 赵昕, 关宏志, 夏晓敬. 拥挤收费条件下旅游出行方式分担率模型[J]. 长安大学学报: 自然科学版, 2015, 35(1): 106-110.  
ZHAO Xin, GUAN Hong-zhi, XIA Xiao-jing. Tourist travel mode split under congestion pricing[J]. Journal of Chang'an University: Natural Science Edition, 2015, 35(1): 106-110. (in Chinese)
- [3] 卞长志, 关敬辉, 陆化普. 鲁棒交通网络设计方法[J]. 城市交通, 2011, 9(6): 50-55.  
BIAN Chang-zhi, GUAN Jing-hui, LU Hua-pu. Robust transportation network design under demand uncertainty[J]. Urban Transport of China, 2011, 9(6): 50-55. (in Chinese)
- [4] Ukkusuri S V, Mathew T V, Waller S T. Robust transportation network design under demand uncertainty[J]. Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering, 2007(22): 6-18.
- [5] Chootinan P, Wong S C, Chen A. A reliability-based network design problem[J]. Journal of Advanced Transportation, 2005, 39(3): 246-270.
- [6] Chiou S W. Bi-level programming for the continuous transport network design problem[J]. Transportation Research Part B, 2005, 39(4): 362-383.
- [7] Sun Y, Turnquist M A. Investment in transportation network capacity under uncertainty: a simulated annealing approach[J]. Transportation Research Record, 2007(2039): 67-74.
- [8] Lu S. Sensitivity of static traffic user equilibria with perturbation in arc cost function and travel demand[J]. Transportation Science, 2008, 42(1): 105-123.
- [9] 李聪颖, 马荣国, 王玉萍, 等. 城市慢行交通网络特性与结构分析[J]. 交通运输工程学报, 2011, 11(2): 72-78.  
LI Cong-ying, MA Rong-guo, WANG Yu-ping, et al. Characteristics and structure analysis of urban slow mode traffic network[J]. Journal of Traffic and Transportation Engineering, 2011, 11(2): 72-78. (in Chinese)
- [10] 闫慧丽. 基于复杂网络理论的城市慢行交通网络特性研究[D]. 西安: 长安大学, 2012.  
YAN Hui-li. Research on the characteristics of urban slow mode transportation network based on theory of complex network[D]. Xi'an: Chang'an University, 2012. (in Chinese)
- [11] 孙华, 高自友, 龙建成. 不确定 OD 需求下连续交通网络设计的鲁棒优化模型[J]. 交通运输系统工程与信息, 2011, 11(2): 70-76.  
SUN Hua, GAO Zi-you, LONG Jian-cheng. The robust model of continuous transportation network design problem with demand uncertainty[J]. Journal of Transportation Systems Engineering and Information Technology, 2011, 11(2): 70-76. (in Chinese)
- [12] Ben-Tal A, Nemirovski A. Robust optimization-methodology and applications[J]. Mathematical Programming, 2002, 92(3): 380-453.
- [13] Luo Z Q, Pang J S, Ralph D. Mathematical program with equilibrium constraints[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2008.
- [14] Yin Y, Madanat S M, Lu X. Robust improvement schemes for road networks under demand uncertainty[J]. European Journal of Operation Research, 2009, 198(2): 470-479.
- [15] 高自友, 张好智, 孙会君. 城市交通网络设计问题中双层规划模型、方法及应用[J]. 交通运输系统工程与信息, 2004, 4(1): 35-43.  
GAO Zi-you, ZHANG Hao-zhi, SUN Hui-jun. Bi-level programming models, approaches and applications in urban transportation network design problems[J]. Journal of Transportation Systems Engineering and Information Technology, 2004, 4(1): 35-43. (in Chinese)