

三跨有粘结预应力连续梁自振频率解析解

石鲁宁¹, 闫维明¹, 李 勇^{1,2}, 马裕超¹

(1. 北京工业大学 工程抗震与结构诊治北京市重点实验室, 北京 100124; 2. 清华大学 土木工程系, 北京 100084)

摘 要: 为了研究三跨有粘结预应力连续梁的动力特性, 建立了基于 Bernoulli-Euler 梁理论的有粘结预应力钢筋布置形式的连续梁分析模型。通过建立有粘结预应力与位移的函数关系, 将连续梁视为满足弯矩、转角和位移条件的多个单跨梁, 采用分段联立法建立三跨预应力连续梁的振动方程组, 获得了频率方程的解析解。通过求解频率方程得到自振频率, 以三跨有粘结预应力连续梁为例, 分别将本文方法计算结果与有限元法计算结果及实桥测试结果进行对比。研究结果表明: 本文方法所得预应力梁的基频与有限元法计算结果的相对误差仅为 0.6%, 与实桥测试结果的误差为 -1.18%; 前四阶频率与有限元法计算结果的最大误差在 3% 以内; 前三阶自振频率与实桥测试结果的平均误差在 3% 以内, 结果吻合较好。通过本文公式可以较准确地求得三跨有粘结预应力连续梁的自振频率等动力参数。

关键词: 桥梁工程; 三跨有粘结预应力连续梁; 自振频率; 频率方程; 振动方程; 动力特性

中图分类号: U448.21

文献标志码: A

Analytical solution for natural frequency of three-span bonded prestressed continuous beam

SHI Lu-ning¹, YAN Wei-ming¹, LI Yong^{1,2}, MA Yu-chao¹

(1. Key Laboratory of Earthquake Engineering and Structure Retrofit of Beijing, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China; 2. Department of Civil Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: In order to study the dynamic characteristics of three-span bonded prestressed continuous beam, the paper established the analysis model of prestressed tendon layout based on the Bernoulli-Euler beam theory. Through establishing the relationship between prestress force and displacement and taking the continuous beam as the multiple single beams satisfying with the moment, angle and displacement boundary conditions, the vibration equation of beam using piecewise simultaneous method was established and the analytical solution of the frequency equation was obtained. Then the frequency equation was solved to get natural frequency. Taking a three-span bonded prestressed continuous beam as example, the natural frequencies obtained by this method was compared with those calculated by finite element method (FEM) and actual bridge test. The results show that relative error of fundamental frequency is only 0.6% and the maximum error of the first four frequencies is within 3% when this method and finite element method are adopted. The relative error of fundamental frequency is -1.18% and the average error of the first three frequencies is within 3% when this method and actual bridge test are adopted. It is found the results

calculated by the formulas are in good agreement with the results of FEM and actual bridge tests. Thus by adopting this method, the dynamic parameters such as natural frequencies of three-span bonded prestressed continuous beams can be obtained accurately. 2 tabs, 10 figs, 15 refs.

Key words: bridge engineering; three-span bonded prestressed continuous beam; natural frequency; frequency equation; vibration equation; dynamic behavior

0 引言

预应力混凝土连续梁桥因具有整体性能好、结构刚度大、变形小、抗震性能好和行车舒适等诸多优点,在中国公路、城市和铁路桥梁工程中得到广泛采用。中国的预应力混凝土连续梁桥大部分采用有粘结预应力形式,且多为三跨一联、四跨一联和五跨一联连续梁桥。随着连续梁桥跨度的增加,布置的预应力钢筋越来越多,结构受预应力的作用越来越复杂,预应力在大幅提高连续梁桥承载力的同时也对结构的动力特性产生不可忽略的影响^[1-3]。但是现有桥梁设计中通常忽略预应力对连续梁桥动力特性的影响,这将影响桥梁的冲击系数和桥梁抗震性能计算的准确性^[4-5]。因此有必要研究有粘结预应力对连续梁桥动力特性的影响。

近年来国内外对体外预应力结构动力特性进行了大量研究^[6-8],由于预应力对结构动力特性的影响较复杂,研究多限于体外预应力简支梁等简单结构的理论和试验等方面。对于有粘结预应力结构动力特性的研究较少,Saïdi 等通过试验研究了混凝土梁中预应力与自振频率的关系,发现混凝土梁基频随着预应力的增加而增大^[9];张耀庭等对有粘结力预应力混凝土简支梁进行动力有限元程序设计^[10-11];Hamed 等研究了有粘结预应力对简支梁自振频率的影响^[12];齐军防等通过试验方法研究了有粘结预应力加固简支梁的动力特性^[13]。

现有的研究仅限于有粘结预应力简支梁,而对于有粘结预应力连续梁动力特性的相关研究还不够深入。为此,本文从建立三跨有粘结预应力连续梁的动力方程开始,研究施加预应力后连续梁动力特性的分析方法,并且获得了三跨有粘结预应力连续梁的频率方程,通过求解频率方程获得的自振频率分别与有限元计算结果和实桥测试结果比较,结果吻合较好,从而验证了本文方法的正确性;表明本文公式可以较准确地求得三跨有粘结预应力连续梁的自振频率等动力参数,可有效指导工程实践。

1 三跨预应力连续梁振动方程

1.1 三跨有粘结预应力连续梁振动模型

三跨有粘结预应力连续梁第 i 跨($i=1,2,3$)的等效抗弯刚度为 $EI_i(x)$,单位长度的质量为 $m_i(x)$,作用于第 i 跨上的预应力为 N_i ,横向荷载为 $P_i(x,t)$;梁的横向位移为 $u_i(x,t)$;第 i 跨梁段起点 i 的转角为 $\theta_{i,i+1}$,弯矩为 $M_{i,i+1}$,终点 $i+1$ 处的转角为 $\theta_{i+1,i}$,弯矩为 $M_{i+1,i}$,如图 1 所示。梁的运动为平面弯曲,预应力 N_i 沿梁长 x 方向无损失,且梁的弯曲变形满足平截面假定。根据文献[6]可得第 i 跨预应力梁段的自由振动方程为

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} [EI_i(x) \frac{\partial^2 u_i(x,t)}{\partial x^2}] + N_{xi} \frac{\partial^2 u_i(x,t)}{\partial x^2} - H_i \frac{\partial^2 (\Delta N_i)}{\partial x^2} + m_i(x) \frac{\partial^2 u_i(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

式中: N_{xi} 为第 i 跨梁段预应力 N_i 的水平分量; H_i 为第 i 跨梁段预应力钢筋的等效偏心距,等效偏心距可根据预应力弯矩图按面积相等原则求得; ΔN_i 为随振动位移变化引起的预加力改变量。

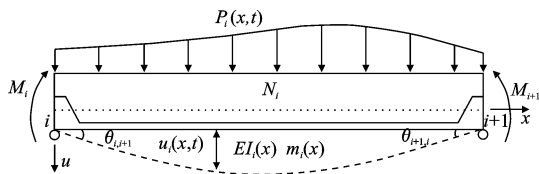


图 1 受动力荷载的第 i 跨梁段

Fig. 1 No. i beam under dynamic loads

如下页图 2 所示,三跨有粘结预应力连续梁相邻两跨的弯矩、转角和位移需满足如下边界条件

$$\begin{aligned} M_{1,2} &= 0; \theta_{2,1} = \theta_{2,3}; M_{2,1} = M_{2,3}; \\ M_{4,3} &= 0; \theta_{3,4} = \theta_{3,2}; M_{3,2} = M_{3,4}; \\ \phi_1(0) &= 0; \phi_1(L_1) = 0; \phi_2(0) = 0; \\ \phi_2(L_2) &= 0; \phi_3(0) = 0; \phi_3(L_3) = 0. \end{aligned}$$

其中 L_1, L_2, L_3 为三跨连续梁的梁长。

显然,三跨有粘结预应力连续梁的振动方程为满足弯矩、转角和位移条件的 3 个单跨梁振动方程组成的方程组。为了求解三跨有粘结预应力连续梁自由振动方程组,需先求得振动过程中预应力变化量 ΔN 与梁体振动位移 $u(x,t)$ 的关系。

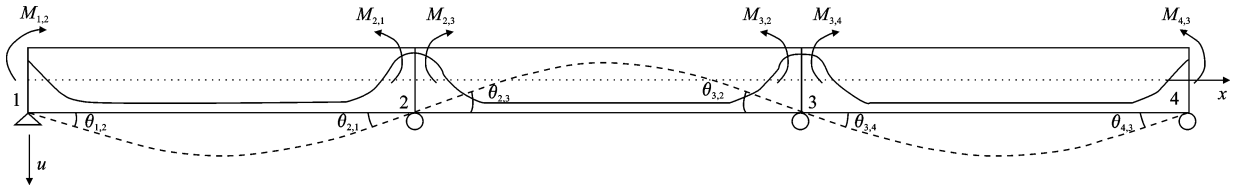


图 2 三跨有粘结预应力连续梁边界条件

Fig. 2 Boundary conditions of three-span bonded prestressed continuous beam

1.2 预应力变化量与梁位移的关系

预应力连续梁在自由振动过程中,预应力变化量 ΔN 随梁体振动位移 $u(x, t)$ 的变化而变化, ΔN 与 $u(x, t)$ 的关系比较复杂。对于有粘结预应力连续梁,预应力变化量与位移关系按下述方法确定。

从预应力梁中取出长度 dx 的微单元,如图 3 所示。由平截面假定可知,在梁弯曲时微单元两侧横截面将相对旋转一个角度 $d\theta$;横截面的转动将使梁凹边纵向线缩短,凸边纵向线伸长,假定预应力钢筋与混凝土间无相对滑移。梁弯曲时,相邻横截面绕中性轴作相对运动^[11]。现研究横截面上距中性轴为 z 处的预应力钢筋的纵向线应变。作 BG 与 AE 平行,则可得该点处的纵向线应变 ϵ 为

$$\epsilon = \frac{\widehat{GF}}{\widehat{O_1O_2}} = z \frac{d\theta}{dx} \quad (2)$$

式中: $\widehat{O_1O_2}$ 为在中性层上纵向线段的长度, $\widehat{O_1O_2} = dx$ 。

预应力作用下中性层的曲率 ρ 为

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} \quad (3)$$

将式(3)代入式(2)得

$$\epsilon = z/\rho \quad (4)$$

微单元内预应力钢筋内力变化量为

$$\Delta N = E_p A_p \epsilon \quad (5)$$

式中: E_p 为预应力钢筋弹性模量; A_p 为预应力钢筋面积。

将式(4)代入式(5)得微单元内预应力变化量为

$$\Delta N = E_p A_p z/\rho \quad (6)$$

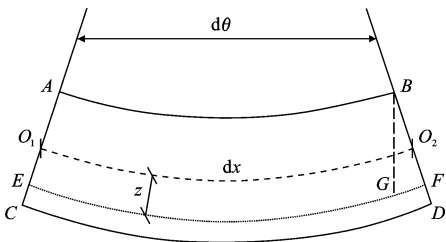


图 3 梁弯曲微单元

Fig. 3 Micro unit of continuous beam

从几何方面看,梁的曲率可写为^[11]

$$\frac{1}{\rho(x)} = \pm \frac{\mu''}{(1+\mu'^2)^{3/2}} \quad (7)$$

式中: μ 近似为预应力作用下梁体挠曲线。

将式(6)和式(7)整理,得预应力变化量为

$$\Delta N = \pm E_p A_p z(x) \frac{\mu(x, t)''}{[1+\mu(x, t)'^2]^{3/2}} \quad (8)$$

式中: $z(x)$ 为预应力钢筋偏心距函数,为了简化计算可取为等效偏心距 H 。

由于 $\mu(x, t)'^2$ 属于高阶微量可忽略不计,根据梁振动过程中预应力的变化与梁凹凸性关系,上式可简化为如下形式

$$\Delta N = -E_p A_p H \mu(x, t)'' \quad (9)$$

1.3 等效偏心距 H 的求解

H 可根据预应力作用弯矩图按面积相等原则,利用力法将预应力效应引起的弯矩等效为沿梁长不变的均布弯矩求得^[6,8,12-15]。对三跨有粘结预应力连续梁的边跨($i=1,3$),可简化为图 4 的结构。

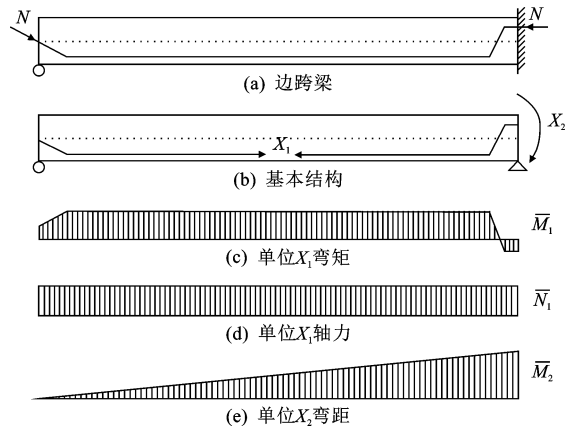


图 4 连续梁边跨简化模型及内力

Fig. 4 Side span model and internal force of continuous beam

将预应力变化量和连续梁中间支座处的弯矩作为赘余力 X_1 (即 ΔN) 和 X_2 , 去掉赘余力得到基本体系,求得单位力 $X_1=1, X_2=1$ 作用下的弯矩图,由图 4 可求得边跨预应力效应引起的弯矩 M_N 为

$$M_N = (\overline{M_1} - \frac{\delta_{12}}{\delta_{22}} \overline{M_2}) \Delta N \quad (10)$$

其中, $\delta_{ij} = \sum \int \frac{\overline{M}_i \overline{M}_j}{EI} dx + \sum \int \frac{\overline{N}_i \overline{N}_j}{EA} dx$, 则

M_N 弯矩图面积为

$$S_{M_N} = (S_{\overline{M}_1} - \frac{\delta_{12}}{\delta_{22}} S_{\overline{M}_2}) \Delta N \quad (11)$$

式中: S_{M_N} 、 $S_{\overline{M}_1}$ 和 $S_{\overline{M}_2}$ 分别为相应弯矩图面积。

等效偏心距 $H = S_{M_N} / (\Delta NL)$, L 为梁长。由式(11)得等效偏心距 H 为

$$H = \frac{1}{L} (S_{\overline{M}_1} - \frac{\delta_{12}}{\delta_{22}} S_{\overline{M}_2}) \quad (12)$$

三跨有粘结预应力连续梁的中间跨($i=2$)可近似简化为图 5 所示结构, 将预应力变化量和支座处的弯矩作为赘余力 X_1 (即 ΔN)、 X_2 和 X_3 , 去掉赘余力得到基本体系, 求得单位力 $X_1=1$, $X_2=1$, $X_3=1$ 作用下的弯矩图。由图 5 可求得中间跨预应力效应引起的弯矩 M_N 为

$$M_N = (\overline{M}_1 - \frac{\delta_{12}\delta_{22} - \delta_{13}\delta_{23}}{\delta_{22}^2 - \delta_{23}^2} \overline{M}_2 - \frac{\delta_{13}\delta_{22} - \delta_{12}\delta_{23}}{\delta_{22}^2 - \delta_{23}^2} \overline{M}_3) \Delta N \quad (13)$$

同理, 可求得中间跨等效偏心距 H

$$H = \frac{1}{L} (S_{\overline{M}_1} - \frac{\delta_{12}\delta_{22} - \delta_{13}\delta_{23}}{\delta_{22}^2 - \delta_{23}^2} S_{\overline{M}_2} - \frac{\delta_{13}\delta_{22} - \delta_{12}\delta_{23}}{\delta_{22}^2 - \delta_{23}^2} S_{\overline{M}_3}) \quad (14)$$

式中: S_{M_N} 、 $S_{\overline{M}_1}$ 、 $S_{\overline{M}_2}$ 和 $S_{\overline{M}_3}$ 分别为相应弯矩图面积。

将等效偏心距和预应力变化量随梁体振动位移关系代入式(1), 可得三跨等截面有粘结预应力连续梁的自由振动方程组

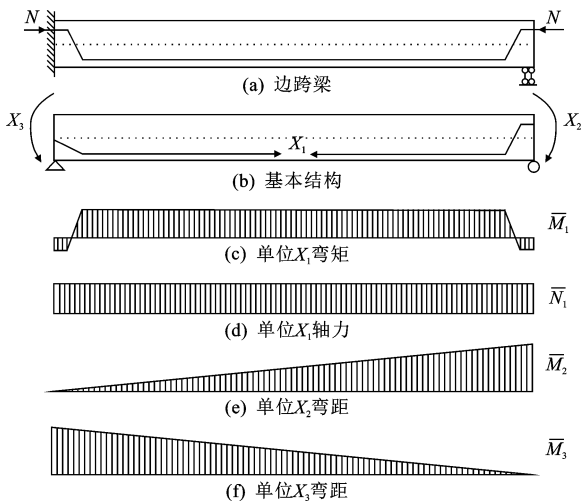


图 5 连续梁中间跨简化模型及内力

Fig. 5 Middle span model and internal force of continuous beam

$$(EI + E_p A_p H_i^2) \frac{\partial^4 \mu_i(x, t)}{\partial x^4} +$$

$$N_{ix} \frac{\partial^2 \mu_i(x, t)}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 \mu_i(x, t)}{\partial t^2} = 0, i=1, 2, 3 \quad (15)$$

2 三跨有粘结预应力连续梁频率

2.1 振动方程求解

将三跨有粘结预应力连续梁振动方程的求解转化为满足弯矩、转角和位移条件的多个单跨振动方程的求解, 通过求解振动方程组可得到频率方程。根据式(15), 三跨有粘结预应力连续梁第 i 跨的振动方程可简化为

$$\frac{\partial^4 \mu_i(x, t)}{\partial x^4} + \frac{N_{ix}}{EI + E_p A_p H_i^2} \frac{\partial^2 \mu_i(x, t)}{\partial x^2} + \frac{m}{EI + E_p A_p H_i^2} \frac{\partial^2 \mu_i(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (16)$$

该方程采用分离变量法求解^[13], 假定解具有如下形式

$$u_i(x, t) = \phi_i(x) Y(t) \quad (17)$$

将上述解的形式代入式(16)可解得

$$\phi_i'''(x) + g_i^2 \phi_i''(x) - a^4 \phi_i(x) = 0 \quad (18)$$

$$Y''(t) + \omega^2 Y(t) = 0 \quad (19)$$

式中: $\omega^2 = \frac{a^4 (EI + E_p A_p H_i^2)}{m}$; $g_i^2 = \frac{N_{xi}}{EI + E_p A_p H_i^2}$ 。

式(18)为四阶常系数微分方程, 设解的形式为 $\Phi_i(x) = Ge^{sx}$, 将其代入方程可得

$$s_{1,2} = \pm ih_i, s_{3,4} = \pm in_i \quad (20)$$

式中: $h_i = \sqrt{(a^4 + \frac{g_i^4}{4})^{\frac{1}{2}} + \frac{g_i^2}{2}}$; $n_i = \sqrt{(a^4 + \frac{g_i^4}{4})^{\frac{1}{2}} - \frac{g_i^2}{2}}$ 。

代入 $\Phi_i(x) = Ge^{sx}$, 得方程的通解

$$\phi_i(x) = G_1 e^{ih_i x} + G_2 e^{-ih_i x} + G_3 e^{n_i x} + G_4 e^{-n_i x} \quad (21)$$

式中: G_1 、 G_2 、 G_3 和 G_4 为复常数。

用三角函数和双曲函数等价替换指数函数, 并令式(21)中的虚部为 0, 得到三跨有粘结预应力连续梁第 i 跨振型方程

$$\phi_i(x) = A_i \sin(h_i x) + B_i \cos(h_i x) + C_i \sinh(n_i x) + D_i \cosh(n_i x) \quad (22)$$

式中: A_i 、 B_i 、 C_i 和 D_i 是实常数, 这 4 个实常数可由梁端边界条件(位移、转角和弯矩等)计算得到。

2.2 振型方程的求解

如图 2 所示, 第 i ($i=1, 2, 3$) 跨梁段两端的位移和弯矩需满足

$$\begin{aligned}\phi(0) &= 0, \phi''(0) = -\frac{M_{i,i+1}}{EI}, \\ \phi(L_i) &= 0, \phi''(L_i) = -\frac{M_{i+1,i}}{EI}\end{aligned}\tag{23}$$

利用式(22)和它对 x 的二阶偏导数,由式(23)可求解得出

$$\begin{cases} A_i = \frac{M_{i+1,i} - M_{i,i+1} \cos(h_i L_i)}{EI(h_i^2 + n_i^2) \sin(h_i L_i)} \\ B_i = \frac{M_{i,i+1}}{EI(h_i^2 + n_i^2)} \\ C_i = \frac{M_{i,i+1} \cosh(n_i L_i) - M_{i+1,i}}{EI(h_i^2 + n_i^2) \sinh(n_i L_i)} \\ D_i = \frac{-M_{i,i+1}}{EI(h_i^2 + n_i^2)} \end{cases}\tag{24}$$

将求得的系数 A_i 、 B_i 、 C_i 和 D_i 代入式(22),可得第 i 跨振型方程的解析表达式。

$$\begin{bmatrix} \eta_1 \cos(h_1 L_1) - \Psi_1 \cosh(n_1 L_1) + \\ \eta_2 \cos(h_2 L_2) - \Psi_2 \cosh(n_2 L_2) + \\ \Psi_2 - \eta_2 \\ \eta_2 \cos(h_2 L_2) - \Psi_2 \cosh(n_2 L_2) + \\ \eta_3 \cos(h_3 L_3) - \Psi_3 \cosh(n_3 L_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = 0\tag{27}$$

对于三跨有粘结预应力连续梁,在任意激励作用下矩阵方程式(27)必存在非零解。则有矩阵方程式(27)的系数矩阵行列式恒为 0,通过化简该系数矩阵行列式,可得到含有未知量 ω (圆频率)的恒等式,即为三跨有粘结预应力连续梁的频率方程

$$\begin{aligned} & [\eta_1 \cos(h_1 L_1) - \Psi_1 \cosh(n_1 L_1) + \\ & \eta_2 \cos(h_2 L_2) - \Psi_2 \cosh(n_2 L_2)] \cdot \\ & [\eta_2 \cos(h_2 L_2) - \Psi_2 \cosh(n_2 L_2) + \\ & \eta_3 \cos(h_3 L_3) - \Psi_3 \cosh(n_3 L_3)] - \\ & [\Psi_2 - \eta_2]^2 = 0 \end{aligned}\tag{28}$$

3 频率方程的验证

3.1 有限元数值模拟验证

某三跨有粘结预应力连续梁为矩形截面,梁高 1.0 m,梁宽 0.7 m,计算跨径组合(10+16+10) m;混凝土等级为 C35,预应力钢筋采用 4 根 1860 级 $\phi 15.2$ 钢绞线,每根预应力钢绞线的有效预应力为 140 kN,预应力钢筋布置可简化为多折线形式,如图 6 所示。求解式(28)得到频率方程根的分布情况,如图 7 所示,所有的根均可逐次求得。利用 ANSYS 建立有限元模型,打开预应力选项,考虑预应力的影响对模型进行特性值分析。式(28)的计算结果和有限元分析结果见表 1。

2.3 频率方程的求解

第 $i(i=1,2,3)$ 跨梁段由振型方程式(22),微分一次得转角方程;对于三跨预应力连续梁的中间支座 $i(i=2,3)$,由于 $M_i=M_{i,i+1}=M_{i,i-1}$,则中间支座 i 两侧转角为

$$\theta_{i,i+1} = [\Psi_i \cosh(h_i L_i) - \eta_i \cos(h_i L_i)] M_i - (\Psi_i - \eta_i) M_{i+1}\tag{25}$$

$$\theta_{i,i-1} = (\Psi_{i-1} - \eta_{i-1}) M_{i-1} - [\Psi_{i-1} \cosh(n_{i-1} L_{i-1}) - \eta_{i-1} \cos(h_{i-1} L_{i-1})] M_i\tag{26}$$

式中: $\eta_i = \frac{h_i}{EI(h_i^2 + n_i^2) \sin(h_i L_i)}$; $\Psi_i = \frac{n_i}{EI(h_i^2 + n_i^2) \sinh(h_i L_i)}$ 。

对于三跨连续梁相邻两跨转角需满足 $\theta_{i,i-1} = \theta_{i,i+1}$,且有 $M_1=0, M_4=0$,整理式(25)和式(26)写成矩阵形式

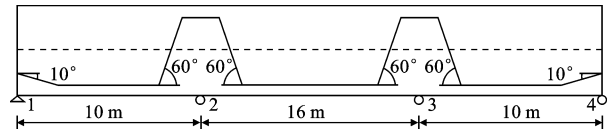


图 6 三跨预应力连续梁

Fig. 6 Three-span bonded prestressed continuous beam

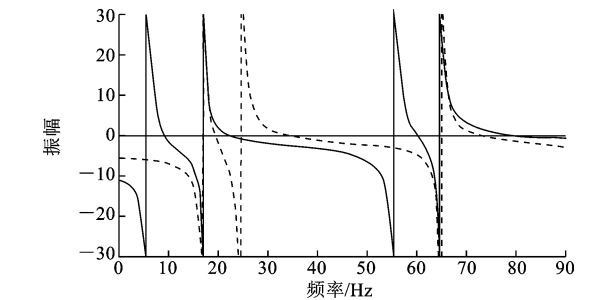


图 7 三跨有粘结预应力连续梁频率方程根的分布

Fig. 7 Distribution of roots of frequency equation

表 1 三跨有粘结预应力连续梁自振频率分析结果

模态阶数	频率/Hz		相对误差 %
	本文公式	有限元	
1	9.11	9.05	0.60
2	18.91	18.45	2.49
3	22.22	21.58	2.97
4	34.13	33.44	2.06

3.2 实桥测试验证

北京市京承线某主线桥为三跨预应力混凝土连续箱梁桥,跨径组合为 28 m+34 m+28 m=90 m,

如图 8 所示。主梁混凝土等级 C50,预应力钢筋采用 1860 级的 7Φ5 高强低松弛预应力钢绞线,每束预应力钢筋均有 9 根 7Φ5 钢绞线,全桥共布置 36 根预应力钢筋,张拉控制应力为 $0.72\sigma_{con}$ 。



图 8 测试桥梁全貌及传感器采集模块

Fig. 8 Testing bridge and sensor acquisition module

现对该桥进行动力测试,箱梁截面尺寸及预应力钢筋布置形式和加速度传感器布置见图 9。加速度传感器布置于主跨和边跨跨中及四分点位置,全桥共布置 4 个加速度传感器,标准车辆以 30 km/h 匀速通过桥梁,对主跨跨中和边跨跨中加速度传感器采集到的加速度数据进行频谱分析获得桥梁的固有频率,见图 10。利用本文频率方程式(28)求得三跨有粘结预应力混凝土连续箱梁桥自振频率,计算中考虑了 10 cm 混凝土铺装层、12 cm 沥青混凝土和防撞护栏的质量,混凝土弹性模量和重度采用实测值。理论计算结果和实测结果对比见表 2。

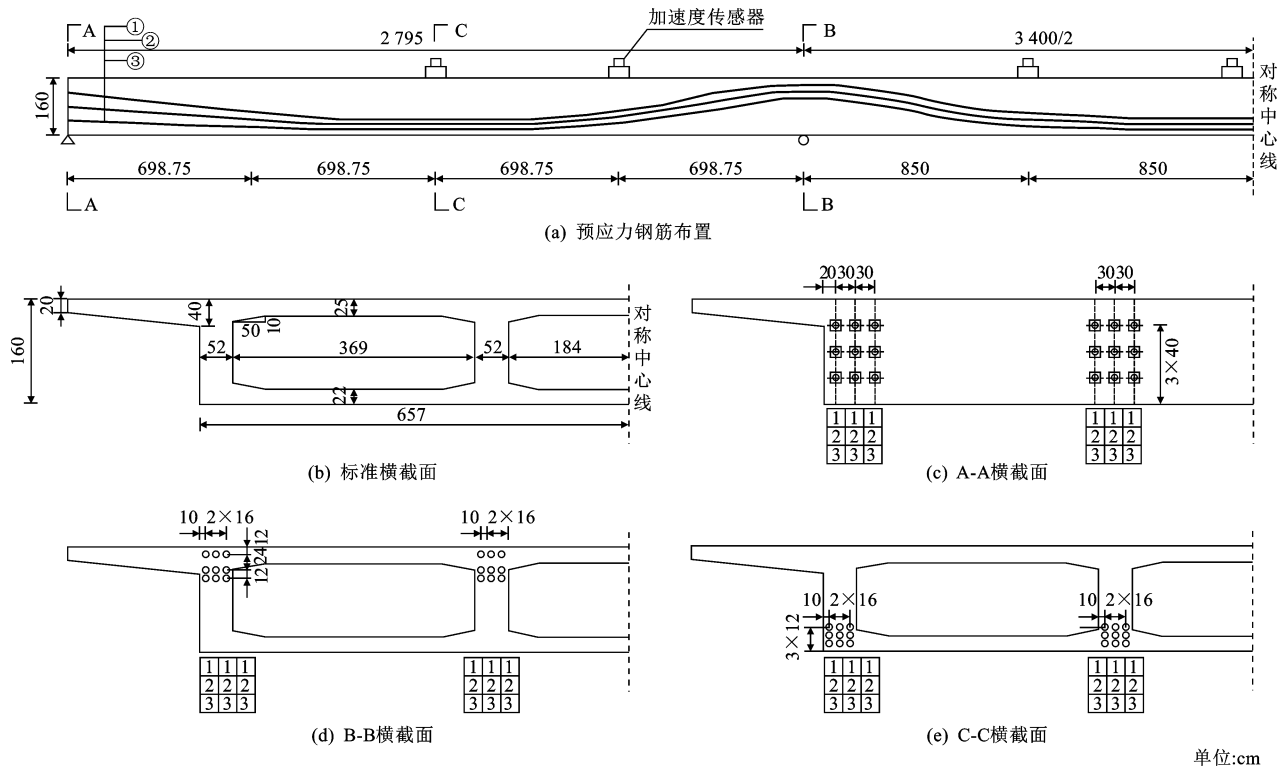


图 9 箱梁截面和预应力钢筋布置

Fig. 9 Cross section and position of tendon of box girdev

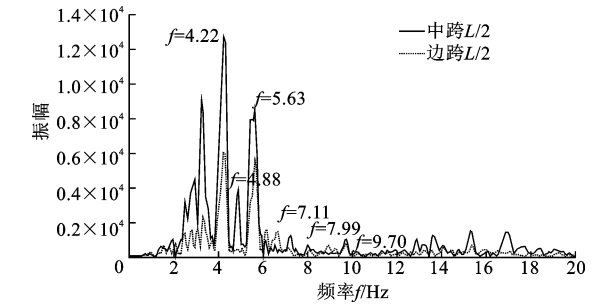


图 10 加速度测试频谱分析

Fig. 10 Spectrum analysis of acceleration test

表 2 三跨有粘结预应力连续梁桥自振频率分析结果

Tab. 2 Frequency of three-span bonded prestressed continuous beam bridge

模态阶次	频率/Hz		相对误差/%
	本文公式	实测	
1	4.17	4.22	-1.18
2	4.96	4.88	1.64
3	5.81	5.63	3.20
4	7.37	7.11	3.66
5	8.36	7.99	4.63
6	10.20	9.70	5.15

由表 1 和表 2 可知,本文方法计算的三跨有粘结预应力连续梁基频与有限元计算结果的相对误差

为0.6%;与实桥测试结果的误差为-1.18%;本文方法计算的有粘结预应力连续梁前四阶频率与有限元计算结果和实桥测试结果的平均误差均在3%以内;表明本文方法计算的三跨有粘结预应力连续梁的自振频率具有较高的精度,从而验证了本文理论推导的正确性。

4 结 语

(1)推导了三跨有粘结预应力连续梁的振动方程,将连续梁视为满足位移、转角和弯矩条件的多个单跨梁,采用分段联立法求解振动方程,并获得了三跨有粘结预应力连续梁频率方程的解析解。

(2)给出了三跨有粘结预应力连续梁振动过程中预应力变化量与振动位移关系的计算公式以及等效偏心距 H 的计算公式。

(3)本文方法计算结果与有限元计算结果和实桥测试结果吻合较好,从而验证了本文方法的正确性;利用本文方法可以较准确地求得三跨有粘结预应力连续梁的自振频率,可以有效指导工程应用。

(4)基于 Bernoulli-Euler 梁理论推导的三跨有粘结预应力连续梁的振动方程适用于梁的挠度远小于梁的长度的情况。此外,尚需研究考虑剪切变形和转动惯量影响的有粘结预应力连续梁的动力特性。

参考文献:

References:

- [1] Dall'Asta A, Dezi L. Discuss of "Prestress force effect on vibration frequency of concrete bridges"[J]. Journal of Structural Engineering, 1996, 122(4): 458.
- [2] Wang Tao, Han Wan-shui, Yang Fei, et al. Wind-vehicle-bridge coupled vibration analysis based on random traffic flow simulation[J]. Journal of Traffic and Transportation Engineering: English Edition, 2014, 1(4): 293-308.
- [3] Cardinale G, Orlando M. Structural evaluation and strengthening of a reinforced concrete bridge[J]. Journal of Bridge Engineering, 9(1): 35-42.
- [4] 周勇军, 赵煜, 贺拴海, 等. 刚构-连续组合桥梁冲击系数多因素灵敏度分析[J]. 振动与冲击, 2012, 31(3): 97-101.
ZHOU Yong-jun, ZHAO Yu, HE Shuan-hai, et al. Muti-parameters sensitivity analysis of impact factors for rigid-continuous combined bridge[J]. Journal of Vibration and Shock, 2012, 31(3): 97-101. (in Chinese)
- [5] 楼梦麟, 洪婷婷, 李强. 预应力桥梁竖向振动特性和地震反应分析[J]. 同济大学学报: 自然科学版, 2013, 41(2): 173-178.
LOU Meng-lin, HONG Ting-ting, LI Qiang. Vertical dynamic characteristics seismic responses of pres-

- tressed bridges[J]. Journal of Tongji University: Natural Science, 2013, 41(2): 173-178. (in Chinese)
- [6] Miyamoto A, Tei K, Nakamura H, et al. Behavior of prestressed beam strengthened with external tendons[J]. Journal of Structural Engineering, 2000, 126(9): 1033-1044.
- [7] Pisani M A. Numerical analysis of continuous beams prestressed with external tendons[J]. Journal of Bridge Engineering, 2009, 14(2): 93-101.
- [8] 熊学玉, 高峰, 李阳. 体外预应力连续梁振动特征的分析与研究[J]. 振动与冲击, 2011, 30(6): 104-108.
XIONG Xue-yu, GAO Feng, LI Yang. Analysis on vibration behavior of externally prestressed concrete continuous beam[J]. Journal of Vibration and Shock, 2011, 30(6): 104-108. (in Chinese)
- [9] Saiidi M, Douglas B, Feng S. Prestress force effect on vibration frequency of concrete bridges[J]. Journal of Structural Engineering, 1994, 120(7): 2233-2241.
- [10] 张耀庭, 刘征辉, 方东. 有粘结预应力混凝土简支梁动力有限元程序设计[J]. 华中科技大学学报: 城市科学版, 2008, 25(1): 8-11.
ZHANG Yao-ting, LIU Zheng-hui, FANG Dong. Dynamic finite element programing of simply supported bonded prestressed concrete beams[J]. Journal of Huazhong University of Science and Technology: Urban Science Edition, 2008, 25(1): 8-11. (in Chinese)
- [11] 刘征辉. 有粘结预应力砼简支梁的动力有限元程序设计[D]. 武汉: 华中科技大学, 2007.
LIU Zheng-hui. Dynamic finite element programing of simply supported bonded prestressed concrete beams [D]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology, 2007. (in Chinese)
- [12] Hamed E, Frostig Y. Natural frequencies of bonded and unbonded prestressed beams-prestress force effects[J]. Journal of Sound and Vibration, 2006, 295(1/2): 28-39.
- [13] 齐军防, 吴红林, 王强. 有粘结预应力加固简支梁动力特性试验研究[J]. 科学技术与工程, 2011, 11(22): 5335-5339.
QI Jun-fang, WU Hong-lin, WANG Qiang. Study on dynamic characteristics of bonded prestressed reinforced simply supported beam[J]. Science Technology and Engineering, 2011, 11(22): 5335-5338. (in Chinese)
- [14] 焦春节, 丁洁民. 体外预应力钢-混凝土组合连续梁自振频率分析[J]. 工程力学, 2011, 28(2): 193-197.
JIAO Chun-jie, DING Jie-min. Analysis of natural frequency of prestressed composite beam with external tendons[J]. Engineering Mechanics, 2011, 28(2): 193-197. (in Chinese)
- [15] Clough R W, Penzien J. Dynamics of Structure[M]. New York: Computers and Structures, Inc., 1995.