

文章编号:1671-8879(2015)03-0151-08

# 多手指机器人动力学建模方法

赵睿英<sup>1,2</sup>, 焦生杰<sup>1,2</sup>, 王欣<sup>1,2</sup>

(1. 长安大学 公路养护设备国家工程实验室, 陕西 西安 710064;

2. 长安大学 道路施工技术装备教育部重点实验室, 陕西 西安 710064)

**摘要:**为了获得多手指机器人动力学解析模型,解决(建模过程)由于系统质量矩阵奇异造成的系统运动方程无解问题,应用 Udwadia-Kalaba 建模理论,提出了一种新的针对手指机器人的扩展层级建模方法,获得了系统动力学解析模型,解决了手指机器人系统质量矩阵奇异时运动方程无解的问题;以二维三手指机器人为实例,应用扩展层级建模方法,建立了手指机器人和抓取对象组成的多刚体系统动力学解析模型;将三手指机器人的动力学模型进行数值仿真,仿真结果连续、收敛。研究表明:提出的建模方法可行、有效,可以快速、高效地建立多手指机器人的动力学模型,可以获得抓取力模型和手指关节力矩模型的解析形式,为进一步实现多手指机器人的力/位混合控制奠定了理论基础。

**关键词:**机械工程;多指机器人;Udwadia-Kalaba 理论;扩展层级建模方法;奇异质量矩阵

**中图分类号:**TP242.6 **文献标志码:**A

## Dynamic modeling method of multi-fingered hand robot

ZHAO Rui-ying<sup>1,2</sup>, JIAO Sheng-jie<sup>1,2</sup>, WANG Xin<sup>1,2</sup>

(1. National Engineering Laboratory for Highway Maintenance Equipment, Chang'an University,

Xi'an 710064, Shaanxi, China; 2. Key Laboratory of Road Construction Technology and

Equipment of the Ministry of Education, Chang'an University, Xi'an 710064, Shaanxi, China)

**Abstract:** By using the Udwadia-Kalaba theory, this paper proposed an extended cascading modeling method for the multi-fingered hand robot. The problem of singular mass matrix is solved. The explicit dynamic model of the multi-fingered hand robot can be obtained. Taking the three-fingered hand robot as an example, this paper established the dynamic model of the system by the proposed method, which is composed by the hand robot and object. The numerical simulation results of the dynamic model were continuous and convergent. The results indicate that the extended cascading method could efficiently construct the dynamic model of the multi-fingered hand robot in the explicit form. The grasping force model and joint torque model lay the foundation of the force/position control for multi-fingered hand robot. 1 tab, 8 figs, 17 refs.

**Key words:** mechanical engineering; multifingeredhand robot; Udwadia-Kalaba theory; extended cascading method; singular mass matrix

收稿日期:2014-11-20

基金项目:中央高校基本科研业务费专项资金项目(0009-2014G1251024);国家科技支撑计划项目(2015BAF07B08)

作者简介:赵睿英(1985-),女,陕西西安人,工学博士研究生,E-mail:zry\_029@hotmail.com。

## 0 引言

多手指机器人具有仿生的手指设计,多关节手指能够实现多种夹持方式,可在复杂环境中精确地完成各项任务<sup>[1]</sup>。多手指机器人的数学模型是对其进行控制与应用研究的基础,由于涉及多体建模和接触运动学等理论,动力学建模一直是多手指机器人控制问题的难点之一,也是近年来该领域的热点研究问题。

目前,多手指机器人通常采用的建模方法以拉格朗日乘子法为主,利用拉格朗日乘子将手指与抓取对象的约束引入系统,建立其受约束条件下的动力学模型<sup>[2]</sup>。采用此类建模方法时系统需满足以下假设条件:①抓取力封闭;②手指的雅可比矩阵可逆;③接触力在摩擦锥内<sup>[1]</sup>。此外,在研究手指与抓取对象的接触时,需利用局部坐标参数来描述接触点的位置(例如,球面参数可用来表述手指曲面上任意点的位置<sup>[3]</sup>),由于系统引入了局部坐标参数,其质量矩阵可能出现奇异,目前,拉格朗日乘子法无法直接解决系统质量矩阵奇异的建模问题。

Udwadia-Kalaba 理论是近 20 年来拉格朗日力学界的一个重要成果,它给出了多体系统在约束条件下的运动方程。该理论的主要贡献有以下 3 个方面:①基于达朗贝尔原理和高斯定理,提出了理想约束条件下多体系统的基本运动方程<sup>[4]</sup>;②考虑到非理想约束系统不能满足达朗贝尔原理的情况,完善了多体系统的运动方程,增加了非理想约束力的解析表达式<sup>[5-6]</sup>;③针对系统质量矩阵奇异的情况,扩展了运动方程,使其能够解决质量矩阵奇异时运动方程无解的问题<sup>[7]</sup>。

层级堆聚建模法是在 Udwadia-Kalaba 理论上提出的一种多刚体系统建模方法<sup>[8]</sup>。该方法基于 Udwadia-Kalaba 方程的层级属性,将多刚体系统分解为若干个子系统,根据约束条件把系统划分为不同的层级,再通过堆聚的方法把子系统联系在一起。目前,层级堆聚建模法被应用于机器人建模的研究,例如平行结构机器人建模<sup>[9]</sup>。

针对系统质量矩阵奇异时运动方程无解和系统受非理想约束时约束力做功的情况<sup>[10]</sup>,本文对层级建模方法进行了扩展,并将这种扩展的层级建模方法首次应用于多手指机器人系统,建立多手指机器人的动力学模型,并在 Matlab 中对动力学模型进行数值仿真,为多手指机器人建模提供一个新思路。

## 1 Udwadia-Kalaba 理论与扩展的层级建模方法

### 1.1 Udwadia-Kalaba 理论

考虑一个机械系统包含  $s$  个质点和刚体。该系统在任意时刻  $t$  的位移可由广义坐标向量  $\mathbf{q} \in \mathbf{R}^n$  表示,广义速度向量为  $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbf{R}^n$ ,广义加速度向量为  $\ddot{\mathbf{q}} \in \mathbf{R}^n$ 。

无约束条件下,机械系统的运动方程可以表述为

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}, t)\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) \quad (1)$$

式中:  $\mathbf{M}(\mathbf{q}, t) = \mathbf{M}^T(\mathbf{q}, t) \in \mathbf{R}^{(n \times n)}$  为质量矩阵(或惯性矩阵);  $\mathbf{Q}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) \in \mathbf{R}^n$ , 包括重力、外力和离心力/科式力<sup>[3]</sup>。

如果该机械系统受到  $l$  组约束(完整约束或非完整约束),约束方程为

$$\sum_{s=1}^n A_{rs}(\mathbf{q}, t)\dot{q}_s + C_r(\mathbf{q}, t) = 0 \quad r=1, 2, \dots, l \quad (2)$$

式中:  $l(l < n)$  为约束的个数;  $A_{rs}(\cdot): \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  和  $C_r(\cdot): \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  是  $C^1$  连续的。

该约束可用矩阵形式表示为

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}, t)\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, t) = 0 \quad (3)$$

式中:  $\mathbf{A}(\mathbf{q}, t) \in \mathbf{R}^{(l \times n)}$ ;  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, t) \in \mathbf{R}^l$ 。

将约束方程式(3)对时间  $t$  求导,得到

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}, t)\ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{A}}(\mathbf{q}, t)\dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, t) = 0 \quad (4)$$

令

$$\mathbf{b}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) := -\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{q}, t)\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, t) \quad (5)$$

则约束方程的二阶形式可以表示为

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}, t)\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{b}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) \quad (6)$$

假设 1 质量矩阵非奇异/可逆: 对于任意  $(\mathbf{q}, t) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$ ,  $\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}, t)$  都存在。

假设 2 约束方程式(6)是非空的(non-empty):  $\text{rank}[\mathbf{A}(\mathbf{q}, t)] \geq 1$ 。

假设 3 约束方程式(6)是相容的(consistent): 对于任意  $\mathbf{A}(\mathbf{q}, t)$  和  $\mathbf{b}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)$ , 至少存在一个  $\ddot{\mathbf{q}}$  满足方程式(6)。

**定理 1** 满足假设 1~假设 3, 受约束的机械系统运动方程, 即 Udwadia-Kalaba 方程可以表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\mathbf{q}, t)\ddot{\mathbf{q}} = & \mathbf{Q}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) + \mathbf{M}^{1/2}(\mathbf{q}, t) \cdot \\ & (\mathbf{A}(\mathbf{q}, t)\mathbf{M}^{-1/2}(\mathbf{q}, t))^+ (\mathbf{b}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) - \\ & \mathbf{A}(\mathbf{q}, t)\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}, t)\mathbf{Q}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)) \end{aligned} \quad (7)$$

式中:  $(\mathbf{A}(\mathbf{q}, t)\mathbf{M}^{-1/2}(\mathbf{q}, t))^+$  是  $\mathbf{A}(\mathbf{q}, t)\mathbf{M}^{-1/2}(\mathbf{q}, t)$  的广义逆矩阵<sup>[11]</sup>。

该方程可由高斯定理<sup>[12]</sup>、达朗贝尔原理<sup>[13-14]</sup>和

扩展的达朗贝尔原理<sup>[15]</sup>推导得出。通过对比式(1)和式(7),由外加约束产生的约束力(constraint force)可表述为

$$\begin{aligned} Q^C(\dot{q}, q, t) = & M^{1/2}(q, t)(A(q, t)M^{-1/2} \\ & (q, t))^+ (b(\dot{q}, q, t) - \\ & A(q, t)M^{-1}(q, t)Q(\dot{q}, q, t)) \end{aligned} \quad (8)$$

如果系统的约束不全是理想约束,即约束力在虚位移上所做的虚功之和不为 0,则约束力  $Q^C$  在任意时刻  $t$  沿虚位移所做的虚功为<sup>[6]</sup>

$$\delta q^T Q^C(\dot{q}, q, t) = \delta q^T C(\dot{q}, q, t) \quad (9)$$

式中:  $C(\dot{q}, q, t) \in \mathbf{R}^n$  为根据非理想约束的物理特性得到的已知函数;  $\delta q \in \mathbf{R}^n$  为虚位移,并满足下式<sup>[13]</sup>

$$A(q, t)\delta q^T = 0 \quad (10)$$

**定理 2** 假设机械系统式(1)的质量矩阵  $M(q, t)$  是一个半正定的奇异矩阵,并满足假设 2 和假设 3,当系统受到约束方程式(6)的约束时,系统的运动方程为<sup>[7]</sup>

$$\begin{aligned} \ddot{q} = & \bar{M}(\dot{q}, q, t) \begin{bmatrix} Q(\dot{q}, q, t) + C(\dot{q}, q, t) \\ b(\dot{q}, q, t) \end{bmatrix} + \\ & (I - \bar{M}^+(\dot{q}, q, t)M(\dot{q}, q, t))\eta \end{aligned} \quad (11)$$

式中:  $\eta$  为一个任意  $n$  维向量;  $\bar{M}(\dot{q}, q, t)$  的表达式为

$$\bar{M}(\dot{q}, q, t) = \begin{bmatrix} (I + A^+(q, t)A(q, t))M(q, t) \\ A(q, t) \end{bmatrix} \quad (12)$$

若矩阵  $\bar{M}(\dot{q}, q, t)$  非满秩,由于  $n$  维向量  $\eta$  是任意的,系统运动方程不唯一;若矩阵  $\bar{M}(\dot{q}, q, t)$  满秩,

$$Q_{i(l+1)}(\dot{q}_{j(l+1)}, q_{j(l+1)}, t) := M_{i(l+1)}(q_{j(l+1)}, t) \bar{M}_{i(l+1)}(\dot{q}_{j(l+1)}, q_{j(l+1)}, t) \cdot$$

$$\begin{bmatrix} \hat{Q}_{i(l+1)}(\dot{q}_{j(l+1)}, q_{j(l+1)}, t) + C_{i(l+1)}(\dot{q}_{j(l+1)}, q_{j(l+1)}, t) \\ b_{jl}(\dot{q}_{j(l+1)}, q_{j(l+1)}, t) \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\bar{M}_{i(l+1)}(\dot{q}_{j(l+1)}, q_{j(l+1)}, t) := \begin{bmatrix} I + A_{jl}^+(\dot{q}_{j(l+1)}, q_{j(l+1)}, t)A_{jl}(\dot{q}_{j(l+1)}, q_{j(l+1)}, t) \\ A_{jl}(\dot{q}_{j(l+1)}, q_{j(l+1)}, t) \end{bmatrix} \quad (17)$$

式中:  $q_{j(l+1)} \in \mathbf{R}^{n_{j(l+1)}}$ , 由与  $C_{jl}$  约束相关联的各子系统  $S_{il}$  的局部坐标  $q_{il}$  组成;  $A_{jl}(\dot{q}_{j(l+1)}, q_{j(l+1)}, t) \in \mathbf{R}^{m_{jl} \times n_{j(l+1)}}$ ;  $b_{jl}(\dot{q}_{j(l+1)}, q_{j(l+1)}, t) \in \mathbf{R}^{m_{jl}}$ ;  $M_{i(l+1)}(q_{j(l+1)}, t) = \text{diag}[M_{il}]$ ,  $M_{i(l+1)}(q_{j(l+1)}, t) \in \mathbf{R}_{n_{i(l+1)} \times n_{j(l+)}}$ ,  $M_{i(l+1)}$  为与约束  $C_{jl}$  相关联的各子系统质量矩阵;  $\hat{Q}_{i(l+1)}(\dot{q}_{j(l+1)}, q_{j(l+1)}, t) \in \mathbf{R}^{n_{il}}$ , 由与约束  $C_{jl}$  相关联的各子系统  $Q_{il}(\dot{q}_{il}, q_{il}, t)$  组成; 矩阵  $\bar{M}_{i(l+1)}(\dot{q}_{j(l+1)}, q_{j(l+1)}, t)$  为满秩。

各子系统  $S_{i(l+1)}$  约束力的解析表达式也可以通过式(16)推导得到

$$\begin{aligned} Q_{i(l+1)}^C(\dot{q}_{j(l+1)}, q_{j(l+1)}, t) = & Q_{i(l+1)} \\ & (\dot{q}_{j(l+1)}, q_{j(l+1)}, t) - \\ & \hat{Q}_{i(l+1)}(\dot{q}_{j(l+1)}, q_{j(l+1)}, t) \end{aligned} \quad (18)$$

方程式(11)右边第 2 项为 0,则系统运动方程存在且唯一。

## 1.2 扩展的层级建模方法

根据 Udwadia-Kalaba 方程的层级属性,可以将质点、刚体系统或其他多体系统分解为数个子系统,再根据各子系统之间的约束关系建立多体系统模型。文献[9]对多体系统层级建模方法进行了讨论,本文将该方法扩展到系统的质量矩阵为奇异矩阵的情况。

考虑  $n_l$  个子系统不受约束的情况,此时系统的运动方程为

$$\begin{aligned} S_{il} : M_{il}(q_{il}, t) \ddot{q}_{il} = \\ Q_{il}(\dot{q}_{il}, q_{il}, t) \quad i=1, 2, \dots, n_l \end{aligned} \quad (13)$$

式中:  $S_{il}$  为第  $i$  个子系统;  $q_{il} \in \mathbf{R}^{n_{il}}$  为子系统的局部坐标向量;  $\dot{q}_{il} \in \mathbf{R}^{n_{il}}$  为子系统的局部速度向量;  $\ddot{q}_{il} \in \mathbf{R}^{n_{il}}$  为子系统的局部加速度向量;  $M_{il}(q_{il}, t) \in \mathbf{R}^{n_{il} \times n_{il}}$  为子系统质量矩阵(奇异或非奇异矩阵);  $Q_{il}(\dot{q}_{il}, q_{il}, t) \in \mathbf{R}^{n_{il}}$  包括重力、外力和离心力/科氏力等。

如果  $n_l$  个子系统之间有约束关系,且这些约束在各子系统间不重叠,即子系统  $S_{il}$  的局部坐标  $q_{il}$  不会出现在多于 1 个约束中。假设这些约束有  $k_l$  个,且  $k_l \leq n_l$ ,其表达式为

$$\begin{aligned} C_{jl} : A_{jl}(\dot{q}_{jl}, q_{jl}, t) \ddot{q}_{jl} = \\ b_{jl}(\dot{q}_{jl}, q_{jl}, t) \quad (j=1, 2, \dots, k_l) \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} S_{i(l+1)} : M_{i(l+1)}(q_{j(l+1)}, t) \ddot{q}_{j(l+1)} = \\ Q_{i(l+1)}(\dot{q}_{j(l+1)}, q_{j(l+1)}, t) \end{aligned} \quad (15)$$

上述过程和表达式所描述的即是“扩展的层级建模方法”的核心内容,其具体表述和与其他方法的对比将另文阐述。

## 2 纯滚动约束下多手指机器人的动力学建模

本文以二维三手指机器人为例,采用上节提出的扩展层级建模方法,在纯滚动约束下对系统进行动力学建模。二维三手指机器人与抓取对象之间的运动学关系如下页图 1 所示,  $\{O\}$  为抓取对象坐标系,  $\{B_i\}$  ( $i=1, 2, 3$ ) 为第  $i$  个手指的基坐标系,  $\{B\}$  为系统的基坐标系。各关节通过旋转铰连接,指尖与抓取对象为点接触,且满足纯滚动约束。手指

指尖与抓取对象的接触点会随二者之间的运动而变化,为了精确描述接触点的位置,引入辅助坐标  $u_i$  和  $v_i$ ,如图2所示。 $u_i$  为第  $i$  根手指与抓取对象接触时,抓取对象坐标系  $\{O\}$  下的局部坐标。 $v_i$  为第  $i$  根手指与抓取对象接触时,第  $i$  个指尖坐标系  $\{f_i\}$  下的局部坐标。

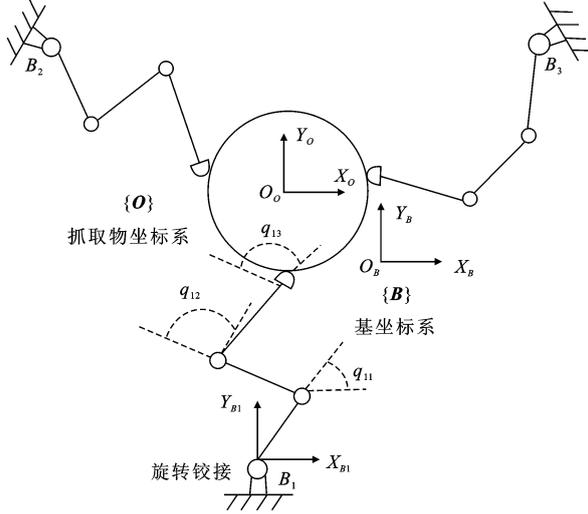


图1 三手指机器人与抓取对象运动学关系示意

Fig. 1 Three fingered hand robot holding an object with rolling constraint

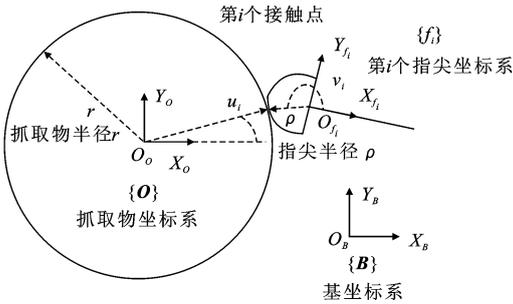


图2 第  $i$  根手指指尖与抓取对象滚动接触

Fig. 2 The  $i$  fingertip rolling on the object

建模过程中,将机器人与抓取对象看作一个复杂多刚体系统,并将这个复杂多刚体系统分为4个子系统:3个手指子系统和1个抓取对象子系统。手指子系统可以视为1个三连杆机构,其模型中涉及的参数如下。

$m_{ij}$  为第  $i$  根手指第  $j$  个关节的质量;  $l_{ij}$  为第  $i$  根手指第  $j$  个关节的长度;  $I_{ij}$  为第  $i$  根手指第  $j$  个关节对质心的惯性矩;  $q_{ij}$  为第  $i$  根手指第  $j$  个关节的旋转位移;  $v_i$  为第  $i$  根手指指尖与抓取对象接触点在指尖坐标系下的局部坐标;  $g$  为重力加速度; 其中  $i=1,2,3, j=1,2,3$ 。

令  $\mathbf{q}_{fi} = [q_{i1}, q_{i2}, q_{i3}, v_i]^T$ , 为第  $i$  根手指子系统的坐标参数向量,  $i=1,2,3$ 。手指子系统模型为<sup>[16]</sup>

$$\mathbf{M}_{fi}(\mathbf{q}_{fi})\dot{\mathbf{q}}_{fi} = \mathbf{Q}_{fi}(\dot{\mathbf{q}}_{fi}, \mathbf{q}_{fi}) \quad (19)$$

$$\mathbf{M}_{fi}(\mathbf{q}_{fi}) := \begin{bmatrix} M_{fi11} & M_{fi12} & M_{fi13} & M_{fi14} \\ M_{fi21} & M_{fi22} & M_{fi23} & M_{fi24} \\ M_{fi31} & M_{fi32} & M_{fi33} & M_{fi34} \\ M_{fi41} & M_{fi42} & M_{fi43} & M_{fi44} \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\mathbf{Q}_{fi}(\dot{\mathbf{q}}_{fi}, \mathbf{q}_{fi}) := [\mathbf{Q}_{fi1} \quad \mathbf{Q}_{fi2} \quad \mathbf{Q}_{fi3} \quad \mathbf{Q}_{fi4}]^T \quad (21)$$

其中

$$M_{fi11} = I_{i1} + \frac{1}{2}l_{i1}^2 m_{i1} + m_{i2}l_{i1}^2 + m_{i3}(l_{i1}^2 + l_{i2}^2 + 2l_{i1}l_{i2}\cos(q_{i2})) \quad (22)$$

$$M_{fi12} = m_{i3}l_{i2}^2 + m_{i3}l_{i1}l_{i2}\cos(q_{i2}) \quad (23)$$

$$M_{fi22} = I_{i2} + m_{i3}l_{i1}^2 \quad (24)$$

$$M_{fi33} = I_{i3} \quad (25)$$

$$M_{fi13} = M_{fi14} = M_{fi23} = M_{fi24} = M_{fi31} = M_{fi32} = M_{fi34} = M_{fi41} = M_{fi42} = M_{fi43} = M_{fi44} = 0 \quad (26)$$

$$\mathbf{Q}_{fi1} = 2m_{i3}l_{i1}l_{i2}(2\dot{q}_{i1}\dot{q}_{i2} + \dot{q}_{i2}^2)\cos(q_{i1}) - (\frac{1}{2}m_{i2}l_{i2}g + m_{i3}l_{i2}g)\cos(q_{i2}) - \frac{1}{2}m_{i3}l_{i3}g\cos(q_{i1} + q_{i2} + q_{i3}) \quad (27)$$

$$\mathbf{Q}_{fi2} = -m_{i3}l_{i2}^2 + m_{i3}l_{i1}l_{i2}\cos(q_{i2}) - (\frac{1}{2}m_{i2}l_{i2}g + m_{i3}l_{i2}g)\cos(q_{i1} + q_{i2}) - \frac{1}{2}m_{i3}l_{i3}\cos(q_{i1} + q_{i2} + q_{i3}) \quad (28)$$

$$\mathbf{Q}_{fi3} = -\frac{1}{2}m_{i3}l_{i3}\cos(q_{i1} + q_{i2} + q_{i3}) \quad (29)$$

$$\mathbf{Q}_{fi4} = 0 \quad (30)$$

抓取对象子系统的坐标参数向量为  $\mathbf{q}_o = [x_o, y_o, \phi, u_1, u_2, u_3]^T$ , 其中  $(x_o, y_o)$  为抓取对象质心在基坐标系  $\{B\}$  的位置参数,  $\phi$  为抓取对象坐标系  $\{O\}$  相对于基坐标系  $\{B\}$  的旋转位移,  $u_i$  为第  $i$  根手指与抓取对象接触点在  $\{O\}$  内的局部坐标参数<sup>[17]</sup>。抓取对象子系统模型为

$$\mathbf{M}_o(\mathbf{q}_o)\dot{\mathbf{q}}_o = \mathbf{Q}_o(\dot{\mathbf{q}}_o, \mathbf{q}_o) \quad (31)$$

$$\mathbf{M}_o(\mathbf{q}_o) := \begin{bmatrix} m_o & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_o & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_o & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$\mathbf{Q}_o(\dot{\mathbf{q}}_o, \mathbf{q}_o) := [0 \quad -m_o g \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \quad (33)$$

式中:  $m_o$  为抓取对象质量;  $I_o$  为抓取对象对其质心的惯性矩。

将手指子系统和抓取对象子系统看作“非约束”系统,并建立其系统模型

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} = \hat{\mathbf{Q}}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) \quad (34)$$

$$\mathbf{q} = [q_{f1} \quad q_{f2} \quad q_{f3} \quad q_o]^T \quad (35)$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) := \begin{bmatrix} M_{f1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_{f2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{f3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_o \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$\begin{bmatrix} x_o \\ y_o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\sin(\varphi) & -\cos(\varphi) \\ \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r\cos(u_i) \\ r\sin(u_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{bi} \\ y_{bi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_{i1}\cos(q_{i1}) + l_{i2}\cos(q_{i1} + q_{i2}) + l_{i3}\cos(q_{i1} + q_{i2} + q_{i3}) \\ l_{i1}\sin(q_{i1}) + l_{i2}\sin(q_{i1} + q_{i2}) + l_{i3}\sin(q_{i1} + q_{i2} + q_{i3}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos(q_{i1} + q_{i2} + q_{i3}) & -\sin(q_{i1} + q_{i2} + q_{i3}) \\ \sin(q_{i1} + q_{i2} + q_{i3}) & \cos(q_{i1} + q_{i2} + q_{i3}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho\cos(v_i) \\ \rho\sin(v_i) \end{bmatrix} \quad (38)$$

式中:  $(x_{bi}, y_{bi})$  为第  $i$  根手指基部  $B_i$  在基坐标系  $\{\mathbf{B}\}$  中的位置参数;  $r$  为抓取对象曲面半径;  $\rho$  为指尖曲面半径。

手指与抓取物在接触点处无相对滑动,即手指与接触点满足速度约束,第  $i$  根手指和抓取物的速度约束可以表示为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_o \\ \dot{y}_o \end{bmatrix} + \dot{\varphi} \begin{bmatrix} -\sin(\varphi) & -\cos(\varphi) \\ \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r\cos(u_i) \\ r\sin(u_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_{fi} \\ \dot{y}_{fi} \end{bmatrix} + (\dot{q}_{i1} + \dot{q}_{i2} + \dot{q}_{i3}) \cdot \begin{bmatrix} \cos(q_{i1} + q_{i2} + q_{i3}) & -\sin(q_{i1} + q_{i2} + q_{i3}) \\ \sin(q_{i1} + q_{i2} + q_{i3}) & \cos(q_{i1} + q_{i2} + q_{i3}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho\cos(v_i) \\ \rho\sin(v_i) \end{bmatrix} \quad (39)$$

其中

$$\begin{aligned} \dot{x}_{fi} = & l_{i1}\dot{q}_{i1}\cos(q_{i1}) + l_{i2}(\dot{q}_{i1} + \dot{q}_{i2})\cos(q_{i1} + \\ & q_{i2}) + l_{i3}(\dot{q}_{i1} + \dot{q}_{i2} + \dot{q}_{i3}) \cdot \\ & \cos(q_{i1} + q_{i2} + q_{i3}) \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_{fi} = & l_{i1}\dot{q}_{i1}\sin(q_{i1}) + l_{i2}(\dot{q}_{i1} + \dot{q}_{i2})\sin(q_{i1} + \\ & q_{i2}) + l_{i3}(\dot{q}_{i1} + \dot{q}_{i2} + \dot{q}_{i3}) \cdot \\ & \sin(q_{i1} + q_{i2} + q_{i3}) \end{aligned} \quad (41)$$

指尖平面和抓取物平面在接触点的单位法向量大小相等,且位于公切面的相反方向。第  $i$  根手指与抓取物在接触点的法向量约束可表示为

$$\begin{aligned} - \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(u_i) \\ \sin(u_i) \end{bmatrix} = \\ \begin{bmatrix} \cos(q_{i1} + q_{i2} + q_{i3}) & -\sin(q_{i1} + q_{i2} + q_{i3}) \\ \sin(q_{i1} + q_{i2} + q_{i3}) & \cos(q_{i1} + q_{i2} + q_{i3}) \end{bmatrix} \cdot \\ \begin{bmatrix} \cos v_i \\ \sin v_i \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (42)$$

对式(38)~式(42)求导,可得到约束的二阶形式,并将二阶约束用矩阵的形式表示为

$$\mathbf{A}_i(\dot{\mathbf{q}}_i, \bar{\mathbf{q}}_i)\ddot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{b}_i(\dot{\mathbf{q}}_i, \bar{\mathbf{q}}_i) \quad (43)$$

式中:  $\bar{\mathbf{q}}_i = [\mathbf{q}_{fi}^T, \mathbf{q}_{oi}^T]^T$ ,  $\mathbf{q}_{oi} = [x_o, y_o, \varphi, u_i]^T$ ,  $i = 1, 2, 3$ 。

式(43)可以被分解为

$$[\mathbf{A}_{i1}(\dot{\mathbf{q}}_{fi}, \mathbf{q}_{fi}) \quad \mathbf{A}_{i2}(\dot{\mathbf{q}}_{oi}, \mathbf{q}_{oi}) \quad \mathbf{A}_{i3}(\dot{\mathbf{q}}_{oi}, \mathbf{q}_{oi})] \cdot$$

$$\hat{\mathbf{Q}}(\dot{\mathbf{q}}_o, \mathbf{q}_o) = [\mathbf{Q}_{f1} \quad \mathbf{Q}_{f2} \quad \mathbf{Q}_{f3} \quad \mathbf{Q}_o]^T \quad (37)$$

手指机器人在与抓取对象之间维持纯滚动运动时,手指与抓取对象需要满足以下3个约束条件<sup>[2]</sup>:手指与抓取物在接触点的位置、速度及法向量约束。

手指与抓取物保持接触时,第  $i$  根手指和抓取物满足位置约束,约束方程可表示为

$$\begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_{fi} \\ \ddot{\mathbf{q}}_{oi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{i1}(\dot{\mathbf{q}}_i, \bar{\mathbf{q}}_i) \\ b_{i2}(\dot{\mathbf{q}}_i, \bar{\mathbf{q}}_i) \end{bmatrix} \quad (44)$$

其中

$$\mathbf{A}_{i1}(\dot{\mathbf{q}}_{fi}, \mathbf{q}_{fi}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} \end{bmatrix} \quad (45)$$

$$\mathbf{A}_{i2}(\dot{\mathbf{q}}_{oi}, \mathbf{q}_{oi}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -rs_{\varphi u_i} \\ 0 & 1 & rc_{\varphi u_i} \\ 1 & 0 & -rs_{\varphi u_i} \\ 0 & 1 & rc_{\varphi u_i} \\ 0 & 0 & s_{\varphi u_i} \\ 0 & 0 & -c_{\varphi u_i} \end{bmatrix} \quad (46)$$

$$\mathbf{A}_{i3}(\dot{\mathbf{q}}_{oi}, \mathbf{q}_{oi}) = \begin{bmatrix} -rs_{\varphi u_i} \\ rc_{\varphi u_i} \\ 0 \\ 0 \\ s_{\varphi u_i} \\ -c_{\varphi u_i} \end{bmatrix} \mathbf{b}_{i1}(\dot{\mathbf{q}}_i, \bar{\mathbf{q}}_i) = \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \bar{b}_3 \\ \bar{b}_4 \\ \bar{b}_5 \\ \bar{b}_6 \end{bmatrix} \quad (47)$$

$$\mathbf{b}_{i2}(\dot{\mathbf{q}}_i, \bar{\mathbf{q}}_i) = \begin{bmatrix} -c_{\varphi u_i}(\dot{\varphi} + \dot{u}_i)^2 - c_{123v_i}(\dot{q}_{i1} + \dot{q}_{i2} + \dot{q}_{i3} + \dot{v}_i)^2 \\ -s_{\varphi u_i}(\dot{\varphi} + \dot{u}_i)^2 - s_{123v_i}(\dot{q}_{i1} + \dot{q}_{i2} + \dot{q}_{i3} + \dot{v}_i)^2 \end{bmatrix} \quad (48)$$

其中

$$\begin{aligned} a_{11} &= l_{i1}s_1 + l_{i2}s_{12} + l_{i3}s_{123} + \rho s_{123v_i}, \\ a_{21} &= -l_{i1}c_1 - l_{i2}c_{12} - l_{i3}c_{123} - \rho c_{123v_i}, \\ a_{31} &= l_{i1}s_1 + l_{i2}s_{12} + l_{i3}s_{123} + \rho s_{123v_i}, \\ a_{41} &= -l_{i1}c_1 - l_{i2}c_{12} - l_{i3}c_{123} - \rho c_{123v_i}, \\ a_{51} &= s_{123v_i}, a_{61} = -c_{123v_i}, a_{12} = l_{i2}s_{12} + \\ & l_{i3}s_{123} + \rho s_{123v_i}, a_{22} = -l_{i2}c_{12} - l_{i3}c_{123} - \rho c_{123v_i}, \\ a_{32} &= l_{i2}s_{12} + l_{i3}s_{123} + \rho s_{123v_i}, a_{42} = -l_{i2}c_{12} - l_{i3}c_{123} - \\ & \rho c_{123v_i}, a_{52} = s_{123v_i}, a_{62} = -c_{123v_i}, a_{13} = l_{i3}s_{123} + \rho s_{123v_i}, \\ a_{23} &= -l_{i3}c_{123} - \rho c_{123v_i}, a_{33} = l_{i3}s_{123} + \rho s_{123v_i}, a_{43} = -l_{i3} \cdot \\ & c_{123} - \rho c_{123v_i}, a_{53} = s_{123v_i}, a_{63} = -c_{123v_i}, a_{14} = \rho s_{123v_i}, \\ a_{24} &= -\rho c_{123v_i}, a_{34} = a_{44} = 0, a_{54} = s_{123v_i}, a_{64} = -c_{123v_i}, \\ \bar{b}_1 &= rc_{\varphi u_i}(\dot{\varphi} + \dot{u}_i)^2 - l_{i1}c_{12}\dot{q}_{i1}^2 - l_{i2}c_{12}(\dot{q}_{i1} + \dot{q}_{i2})^2 - l_{i3} \cdot \\ & c_{123}(\dot{q}_{i1} + \dot{q}_{i2} + \dot{q}_{i3})^2 - \rho c_{123v_i}(\dot{q}_{i1} + \dot{q}_{i2} + \dot{q}_{i3} + \dot{v}_i)^2, \\ \bar{b}_2 &= rs_{\varphi u_i}(\dot{\varphi} + \dot{u}_i)^2 - l_{i1}s_{12}\dot{q}_{i1}^2 - l_{i2}s_{12}(\dot{q}_{i1} + \dot{q}_{i2})^2 - l_{i3} \cdot \\ & s_{123}(\dot{q}_{i1} + \dot{q}_{i2} + \dot{q}_{i3})^2 - \rho s_{123v_i}(\dot{q}_{i1} + \dot{q}_{i2} + \dot{q}_{i3} + \dot{v}_i)^2, \\ \bar{b}_3 &= rc_{\varphi u_i}(\dot{\varphi} + \dot{u}_i)^2 - l_{i1}c_{12}\dot{q}_{i1}^2 - l_{i2}c_{12}(\dot{q}_{i1} + \dot{q}_{i2})^2 - l_{i3} \cdot \\ & c_{123}(\dot{q}_{i1} + \dot{q}_{i2} + \dot{q}_{i3}) - \rho c_{123v_i}(\dot{q}_{i1} + \dot{q}_{i2} + \dot{q}_{i3} + \dot{v}_i)(\dot{q}_{i1} + \\ & \dot{q}_{i2} + \dot{q}_{i3}), \bar{b}_4 = rs_{\varphi u_i}(\dot{\varphi} + \dot{u}_i)^2 - l_{i1}s_{12}\dot{q}_{i1}^2 - l_{i2}s_{12} \cdot \\ & (\dot{q}_{i1} + \dot{q}_{i2})^2 - l_{i3}s_{123}(\dot{q}_{i1} + \dot{q}_{i2} + \dot{q}_{i3})^2 - \rho s_{123v_i}(\dot{q}_{i1} + \\ & \dot{q}_{i2} + \dot{q}_{i3} + \dot{v}_i)(\dot{q}_{i1} + \dot{q}_{i2} + \dot{q}_{i3}). \end{aligned}$$

式中:  $s_1 = \sin(q_{i1})$ ;  $s_{12} = \sin(q_{i1} + q_{i2})$ ;  $s_{123} = \sin(q_{i1} + q_{i2} + q_{i3})$ ;  $s_{123v_i} = \sin(q_{i1} + q_{i2} + q_{i3} + v_i)$ ;  $c_1 = \cos(q_{i1})$ ;  $c_{12} = \cos(q_{i1} + q_{i2})$ ;  $c_{123} = \cos(q_{i1} + q_{i2} + q_{i3})$ ;  $c_{123v_i} = \cos(q_{i1} + q_{i2} + q_{i3} + v_i)$ ;  $s_{\varphi u_i} = \sin(\varphi + u_i)$ ;  $c_{\varphi u_i} = \cos(\varphi + u_i)$ 。

利用式(15),可以建立手指与抓取对象系统的运动方程,其表达式为

$$\ddot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} (\mathbf{I} - \mathbf{A}^+(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q})\mathbf{A}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}))\mathbf{M}(\mathbf{q}) \\ \mathbf{A}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) \end{bmatrix}^+ \cdot \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{Q}}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) \\ \mathbf{b}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) \end{bmatrix} \quad (49)$$

其中

$$\mathbf{q} = [\mathbf{q}_{f1}^T \quad \mathbf{q}_{f2}^T \quad \mathbf{q}_{f2}^T \quad \mathbf{q}_o^T]^T \quad (50)$$

$$\mathbf{A}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & 0 & 0 & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_{21} & 0 & \mathbf{A}_{22} & 0 & \mathbf{A}_{23} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} & 0 & 0 & \mathbf{A}_{33} \end{bmatrix} \quad (51)$$

$$\mathbf{b}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) = [\mathbf{b}_1^T \quad \mathbf{b}_2^T \quad \mathbf{b}_3^T]^T \quad (52)$$

系统的约束力可以从式(18)中推导出来,其表达式为

$$\mathbf{Q}^C(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) = \mathbf{Q}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) - \hat{\mathbf{Q}}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) \quad (53)$$

其中

$$\mathbf{Q}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) = \mathbf{M}(\mathbf{q}) \begin{bmatrix} (\mathbf{I} - \mathbf{A}^+(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q})\mathbf{A}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}))\mathbf{M}(\mathbf{q}) \\ \mathbf{A}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) \end{bmatrix}^+ \cdot \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{Q}}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) \\ \mathbf{b}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) \end{bmatrix} \quad (54)$$

式(53)中的各关节力矩解析表达式相互独立,没有参数耦合。参考文献[16],可以计算出第*i*根手指和抓取对象接触点的雅可比矩阵  $\mathbf{J}_i(\mathbf{q}) \in \mathbf{R}^{2 \times 18}$ ,  $i=1, 2, 3$ 。

在第*i*个接触点的约束力可以表示为

$$\mathbf{F}_i^C(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) = (\mathbf{J}_i(\mathbf{q})\mathbf{J}_i^T(\mathbf{q}))^{-1}\mathbf{J}_i(\mathbf{q})\mathbf{Q}^C(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) \quad (55)$$

式中:  $\mathbf{F}_i^C(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) \in \mathbf{R}^2$ ,  $\mathbf{F}_i^C(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) = [\mathbf{F}_{ix}^C, \mathbf{F}_{iy}^C]^T$ 。

### 3 仿真

根据表1的参数值,本文对手指与抓取对象系统的动力学模型式(49)在 Matlab 中进行数值仿真。仿真过程中,给定一组初始状态。

表1 三指机器人系统仿真参数

Tab. 1 Parameters of the three fingers hand robot system

参数	数值	参数	数值
$l_{i1}/\text{mm}$	50	$m_{i1}/\text{kg}$	0.15
$l_{i2}/\text{mm}$	50	$m_{i2}/\text{kg}$	0.15
$l_{i3}/\text{mm}$	50	$m_{i3}/\text{kg}$	0.15
$I_{i1}/(\text{kg} \cdot \text{m}^2)$	$1.25 \times 10^{-4}$	$m_o/\text{kg}$	0.2
$I_{i2}/(\text{kg} \cdot \text{m}^2)$	$1.25 \times 10^{-4}$	$I_o/(\text{kg} \cdot \text{m}^2)$	$1.0 \times 10^{-4}$
$I_{i3}/(\text{kg} \cdot \text{m}^2)$	$1.25 \times 10^{-4}$	$r_o/\text{mm}$	1 000
$g/(\text{m} \cdot \text{s}^{-2})$	9.8	$\rho/\text{mm}$	10

初始位移向量

$$\mathbf{q} = [\pi/6, \pi/3, \pi/3, \pi/3, -\pi/6, \pi/3, \pi/3, \pi/3, \pi/3, \pi/3, \pi/6, \pi/6, 0, 0, 0, \pi/5, 7\pi/10, 2\pi/5]^T$$

初始速度向量

$$\dot{\mathbf{q}} = [0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.1, 0.0, 0.1, 0.0]^T$$

初始加速度向量

$$\ddot{\mathbf{q}} = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]^T$$

手指基部在基坐标系{B}中的位置参数

$$\mathbf{B}_1 = (0.75, -0.29), \mathbf{B}_2 = (-1.5, -0.3), \mathbf{B}_3 = (0.75, -0.1)。$$

三指机器人多层次堆聚模型的数值仿真结果如

图 3~图 5 所示,机器人抓取力解析表达式(40)的数值仿真结果如图 6~图 8 所示。

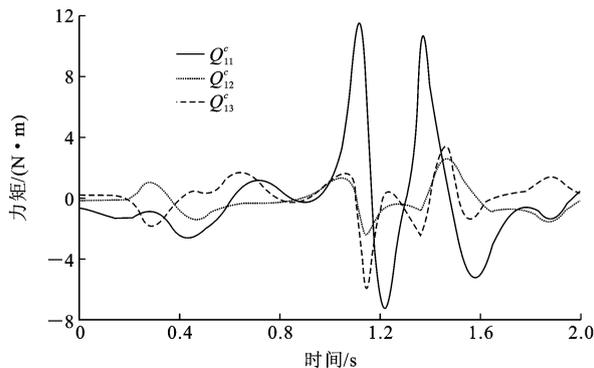


图 3 第 1 根手指三关节力矩

Fig. 3 Revolute joint torques of the first finger

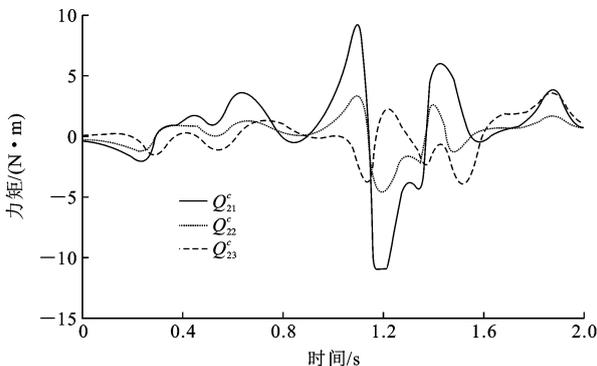


图 4 第 2 根手指三关节力矩

Fig. 4 Revolute joint torques of the second finger

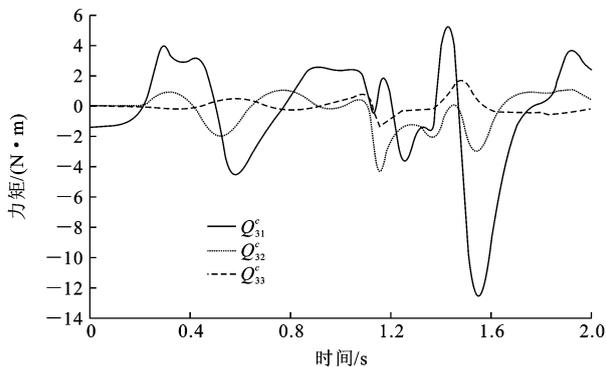


图 5 第 3 根手指三关节力矩

Fig. 5 Revolute joint torques of the third finger

从图 3~图 8 可知,利用本文所提出的扩展层级建模方法所建立的三指机器人动力学模型,数值仿真结果连续、收敛。

## 4 结 语

(1)将 Udwadia-Kalaba 理论和扩展的层级建模方法应用于多手指机器人动力学建模,阐明了方法的原理和应用条件,并对三指机器人进行了建模和

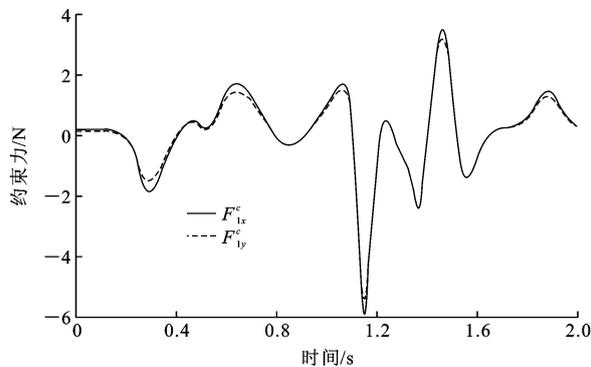


图 6 第 1 根手指与抓取对象在接触点的约束力

Fig. 6 Constraint force at the first contact point

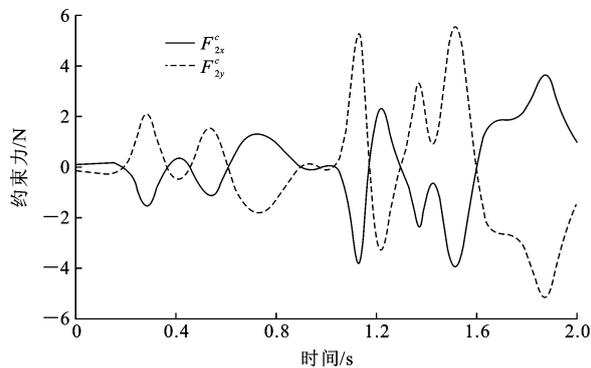


图 7 第 2 根手指与抓取对象在接触点的约束力

Fig. 7 Constraint force at the second contact point

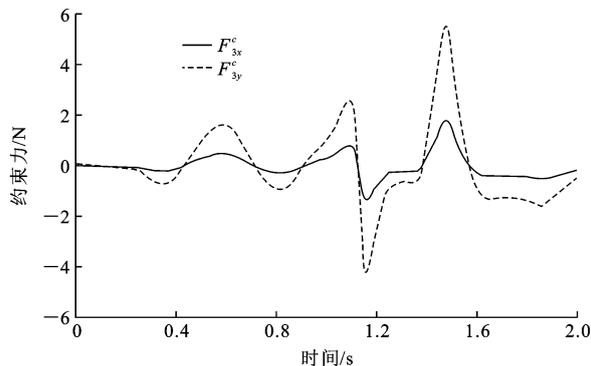


图 8 第 3 根手指与抓取对象在接触点的约束力

Fig. 8 Constraint force at the third contact point

仿真,解决了多手指机器人系统质量矩阵奇异的问题。

(2)纯滚动约束是一种较难实现的约束形式,要求指尖与抓取对象之间保持接触并无相对滑动。相比滑动约束和夹持约束,纯滚动约束的数学表达式个数较多、形式相对复杂。在纯滚动约束条件下建立的手指机器人模型可为其他形式约束下的建模过程提供参考。

(3)手指机器人控制系统中,各关节力矩经常作为系统的输入,抓取对象的位置、运动参数和抓取力

经常是控制系统的控制目标。本文建模方法可以得到机器人各关节力矩和抓取力的解析式,使得机器人便于实现下一步的力/位混合控制。

(4)扩展的层级建模方法为多手指机器人建模提供了新的思路,也可以应用于其他多体系统的建模。

(5)当手指机器人与抓取对象满足滑动约束时,指尖和抓取对象表面的相对滑动会产生摩擦力。根据库仑摩擦力的计算模型可知,机器人的摩擦力是关于接触表面约束力的函数。如果认为摩擦力是由非理想约束产生的非理想约束力,约束力模型就出现耦合。如何建立耦合的约束力模型是手指机器人建模的下一个目标。随着手指数量的增加和抓取表面接触条件的变化,手指机器人动力学建模过程更加繁琐,计算量增大。如何利用计算机技术,设计建模软件,自动化实现动力学建模过程,提高建模效率,成为了该领域的另一研究方向。

#### 参考文献:

#### References:

- [ 1 ] Murray M R, Sastry S S, Li Z X. A mathematical introduction to robotic manipulation[M]. New York: CRC Press, 1994.
- [ 2 ] Cole B A, Hauser E J, Sastry S S. Kinematics and control of multifingered hands with rolling contact [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1989, 34(4): 398-404.
- [ 3 ] Li Z X, Hsu P, Sastry S S. Grasping and coordinated manipulation by a multifingered robot hand[J]. The International Journal of Robotics Research, 1989, 8(4): 33-50.
- [ 4 ] Udwadia F E, Kalaba R E. Analytical dynamics: a new approach [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.
- [ 5 ] Udwadia F E, Kalaba R E. Nonideal constraints and lagrangian dynamics[J]. Journal of Aerospace Engineering, 2000, 13(1): 17-22.
- [ 6 ] Udwadia F E, Kalaba R E. Analytical dynamics with constraint forces that do work in virtual displacements[J]. Applied Mathematics and Computation, 2001, 121(2/3): 211-217.
- [ 7 ] Udwadia F E, Phohomsiri P. Explicit equations of motion for constrained mechanical systems with singular mass matrices and applications to multi-body dynamics[J]. Proceedings of the Royal Society: Mathematical Physical and Engineering Sciences, 2006, 462(2071): 2097-2117.
- [ 8 ] Huang J, Chen H Y, Guo K H. Novel approach to multibody systems modeling: cascading and clustering[J]. Journal of Aerospace Engineering, 2014, 27(2): 279-290.
- [ 9 ] Huang J, Chen Y H, Zhong Z H. Udwadia-Kalaba approach for parallel manipulator dynamics[J]. Journal of Dynamic Systems Measurement and Control, 2013, 135(6): 1012-1030.
- [10] Chen Y H. Equations of motion of constrained mechanical systems: given force depends on constraint force[J]. Mechatronics, 1999, 9(4): 411-428.
- [11] Bellman R. Introduction to matrix analysis[M]. New York: McGraw-Hill, 1970.
- [12] Papastavridis J G. Analytical mechanics: a comprehensive treatise on the dynamics of constrained systems for engineers physicists and mathematicians [M]. New York: Oxford University Press, 2002.
- [13] Rosenberg M R. Analytical dynamics of discrete systems[M]. New York: Plenum Press, 1977.
- [14] Pars A L. A treatise on analytical dynamics[M]. New York: OX Bow Press, 1979.
- [15] Ginsberg J. Engineering dynamics[M]. New York: Cambridge University Press, 2008.
- [16] Spong W M, Vidyasagar M. Robot modeling and control[M]. New York: Wiley and Sons, Inc, 2006.
- [17] Chen Y H. Second order constraints for equations of motion of constrained systems [J]. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, 1998, 3(3): 240-248.