第 35 卷 第 3 期
2015 年 5 月

长安大学学报(自然科学版)
Journal of Chang'an University(Natural Science Edition)

Vol. 35 No. 3
May 2015

文章编号:1671-8879(2015)03-0067-07

压力作用下冻结粉质粘土的水分迁移特征

明 锋,李东庆

(中国科学院寒区旱区环境与工程研究所 冻土工程国家重点实验室,甘肃 兰州 730000)

摘 要:水分迁移是引起路基下土体冻胀的重要因素,目前国内外仍采用刚性孔隙来模拟水分迁移,这对承受荷载的土体并不适用。根据能量平衡与质量守恒原理,结合有效应力与孔隙率、体积含冰量与温度的关系,建立了压力作用下的考虑孔隙率变化的一维水热模型。基于改进的水分迁移试验装置,利用粉质粘土进行了开放系统下的水分迁移试验。研究结果表明:随着冻结时间的增长,补水量逐渐增大,导致冻胀过程经历缓慢变形、快速上升和下降 3 个阶段,荷载对最大冻胀速率的影响明显;最大含水率位置随着冻结锋面的下移而下移;随着荷载的逐渐增大,水分迁移量逐渐减小,开始补水的时间也推后。

关键词:土木工程;水分迁移;上部荷载;含水量;开放系统

中图分类号:TU445 **文献标志码**:A

Characteristics of moisture migration in freezing silty clay under the pressure

MING Feng, LI Dong-qing

(State Key Laboratory of Frozen Soil Engineering, Cold and Arid Regions Environmental and Engineering Research Institute, Chinese Academy of Sciences, Lanzhou 730000, Gansu, China)

Abstract: The water migration is of great significance for frost heave. However, the rigid void was used to simulate the water migration process, which may not be available for the soils bearing ground pressure. According to the energy conservation and mass conservation principle, one dimensional water-heat transport theory under pressure which considered the porosity was established. This process was combined with the relationship between effective stress and pore ratio, volume ice content and the temperature. Based on the moisture migration experiment apparatus, a series of moisture migration tests were carried out on silty clay under various pressures in an open system. Results indicate that the amount of water intake increases with the elapsed time, resulting in the three different stages in the process of the frost heave, slow deformation, rapid increasing and decreasing stage, respectively. The frost heave rate is sensitive to the overburden pressure. The position of peak water content moves downward with the descending of freezing front. As the overburden pressure increases, the amount of water migration decreases gradually and the time to start water uptake delays. 1 tab, 10 figs, 16 refs.

收稿日期:2014-06-10

基金项目:国家重点基础研究发展计划(973 计划)资助项目(2012CB026102);国家自然科学基金项目(41271080);中国科学院西部行动计划项目(KZCX2-XB3-19);多年冻土地区公路建设与养护技术交通行业重点实验室青海研究观测基地开放基金资助项目(2012-12-04)

作者简介:明 锋(1986-),男,重庆人,工学博士研究生,E-mail:mf0329@163.com。

Key words: civil engineering; moisture migration; overburden pressure; water-content; open system

0 引 言

寒区建设工程及人工冻结工程中,土体的过量冻胀造成的危害屡见不鲜,冻土工程建设势必受到冻土区土体冻胀的影响。为此各国科技人员对水热问题进行了大量的研究。试验方面:Miller 进行了饱和土体和非饱和土体在冻结过程中含水量随温度变化的简单室内试验,揭示了水分运动的一般规律[1];Konrad 等通过进行不同温度梯度下冻土中水分迁移试验,得出了水分迁移通量与温度梯度 T 成正比的结论[2];Nakano 等对等温条件下的水分迁移进行了室内试验研究,认为水分迁移通量取决于土中总含水量的梯度[3];Watanabe 等利用淤泥和砂柱做冻结试验,监测了水和热的变化,对非饱和土中渗透系数的影响因素进行了分析[4];徐学祖等分别进行了封闭系统正冻土、已冻土中水分迁移试验和开放系统非饱和正冻土水分运动的测试[5];陈肖柏等对土冻结特性、冻结条件下的水分迁移、成冰作用及冻胀、盐分迁移及盐胀等问题进行了大量的室内试验研究[6];赵刚等借助室内水分迁移试验装置,研究初始含水率、温度模式对水分迁移的影响[7]。理论方面:Harlan 等从热学、力学物质守恒方面出发,利用数理方法描述了物质运动的原动力和运动方向[8];Taylor 等在 Harlan 模型基础上,以未冻水含量梯度为水分迁移驱动力[9];Newman 等给出了非饱和土冻结时水分迁移方程,该方程利用土壤冻结水分特性曲线数据联系水热运输[10];雷志栋等模拟了冻结条件下土的水热耦合迁移规律,但未考虑汽态水迁移及热对流[11];毛雪松等揭示了在恒温状态下,基质势和重力势是风积砂中水分迁移的主要动力,并依据试验结果对入流通量模型进行了修正[12]。

从前面的分析来看,有关冻结过程中水热运输的模型及试验很多[13-14],但这些研究多是从理论上进行讨论,没有相应的试验进行佐证,且大多数没有考虑荷载对水分迁移的影响。为此,本文基于刚性冰模型,在考虑孔隙率变化的情况下,进行了压力作用下一维水热运输问题的理论推导,并进行了开放系统条件下的水分迁移试验。通过改变上部荷载边界,分析单因素影响下的水分迁移特征。

1 理论模型

1.1 基本假定

(1)相变区及未冻土区的水分迁移符合达西定律;

(2)任意微元体中介质是均质同性的;

(3)外荷载保持不变且不考虑热应力。

饱和冻土组相如图 1 所示。

冰	$n\theta_i$
水	$n(1-\theta_i)$
土颗粒	$1-n$

图 1 饱和冻土组相

Fig. 1 Phase of saturated freezing soil

土体的体积变化是由有效应力的变化引起的

$$\frac{\partial n}{\partial \sigma'}=-\alpha \tag{1}$$

式中:n 为孔隙率;α 为土体压缩系数;σ' 为有效应力。

由有效应力原理得

$$\sigma=\sigma'+P_w \tag{2}$$

式中:σ 为总应力;P_w 为水压力。

对于恒定外荷载作用下的土体,其内部任意截面上的总应力为外荷载 P_0,即

$$\sigma=P_0 \tag{3}$$

1.2 热平衡方程

忽略对流传热项,仅考虑水分迁移和冰水相变作用,土冻结过程中的温度场方程为

$$C\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}(\lambda\frac{\partial T}{\partial x})+L\rho_i\frac{\partial \theta_i}{\partial t} \tag{4}$$

式中:C 为土的容积热容量;λ 为土的导热系数;L 为单位质量的冰水相变潜热;T 为温度;θ_i 为土体中冰的体积含量;ρ_i 为冰的密度。

土体的体积热容量和导热系数可表示为

$$C=C_s(1-n)+C_w n(1-\theta_i)+nC_i\theta_i \tag{5}$$

$$\lambda=\lambda_s^{1-n}\lambda_w^{n-n\theta_i}\lambda_i^{n\theta_i} \tag{6}$$

式中:C_s、C_w、C_i 分别为土颗粒、水和冰的体积热容

量；λ_s、λ_w、λ_i 分别为土颗粒、水和冰的导热系数。

1.3　水分迁移方程

冻土中含冰量增量 $d\theta_i$ 可分为两部分：①原位未冻水冻结产生的冰增量 $d\theta_1$；②水分迁移并冻结产生的冰增量 $d\theta_2$。

原位冻结时，增加的冰的质量等于未冻水减少的质量

$$d\theta_1=\frac{\rho_w}{\rho_i}d\theta_w \tag{7}$$

单位时间内水分迁移导致的冰增量为

$$d\theta_2=\frac{\rho_w}{\rho_i}\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right) \tag{8}$$

因此单位时间内两部分冰增量产生的潜热为

$$L\rho_i\frac{\partial\theta_i}{\partial t}=L\rho_i\left[-\frac{\partial\theta_w}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)\right] \tag{9}$$

对于饱水土体，冻结过程中的水分运动方程为

$$\frac{\partial\theta_w}{\partial t}+\frac{\rho_i}{\rho_w}\frac{\partial\theta_i}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right) \tag{10}$$

式中：ρ_w 为水的密度；θ_w 为液相水的体积含量；k 为综合导水系数；Ψ 为土水势。

饱和土体的水头可表示为

$$\Psi=(P_w+G)/\rho_w g \tag{11}$$

式中：G 为重力势；g 为重力加速度。

在大多数情况下，由于重力势很小，可忽略不计，因此式(10)可写成如下形式

$$\frac{\partial\theta_w}{\partial t}+\frac{\rho_i}{\rho_w}\frac{\partial\theta_i}{\partial t}=\frac{k}{\rho_w g}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial P_w}{\partial x}\right) \tag{12}$$

由于研究的是饱和土体，可得到

$$\theta_w+\theta_i=n \tag{13}$$

结合式(12)、式(13)，可得

$$\frac{\partial n}{\partial t}-\frac{\rho_w-\rho_i}{\rho_w}\frac{\partial\theta_i}{\partial t}=\frac{k}{\rho_w g}\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial P_w}{\partial x}\right) \tag{14}$$

在刚性冰模型基础上，通过改进得到了考虑孔隙率变化的水分迁移方程。

1.4　水分迁移驱动力

Kay 于 1988 年提出的水分驱动力可以用克拉贝龙方程来描述

$$P_w=\frac{\rho_w}{\rho_i}P_i+L\rho_w\ln\left(\frac{T}{T_0}\right) \tag{15}$$

采用相对压力和摄氏温度表示，则有

$$P_w=\frac{\rho_w}{\rho_i}P_i+\left(\frac{\rho_w}{\rho_i}-1\right)P_a+L\rho_w\ln\left(\frac{T+273}{273}\right) \tag{16}$$

式中：P_a 为大气压；P_i 为冰的压力。

冻土中的孔隙压力可描述为

$$\sigma=\chi P_i+(1-\chi)P_w \tag{17}$$

式中：χ 为应力分配系数，$\chi=(1-\theta_i)^{1.5}$。

联立式(3)、式(16)、式(17)可得

$$P_w=\frac{(1-\chi)(\rho_w-\rho_i)P_a+\rho_w P_0}{(1-\chi)\rho_i+\chi\rho_w}+\frac{(1-\chi)\rho_i\rho_w L\ln[(T+273)/273]}{(1-\chi)\rho_i+\chi\rho_w} \tag{18}$$

在水分迁移驱动力的计算中，考虑了外荷载对迁移动力的影响。需要说明的是，由于施加的荷载较小，未考虑压力对冻结温度的影响。

当土样中有冰晶形成之后，水分迁移通道会受阻，因此需要调节渗透系数来体现这种特征。冻土渗透系数 k 与温度 T 有关，可写成 T 的函数[15]

$$k=\begin{cases}k_0[1-(T-T_0)]^{\beta} & T\leqslant T_0\\ k_0 & T>T_0\end{cases} \tag{19}$$

式中：k_0 为未冻土导水系数；β 为试验常数；T_0 为冻结温度。

冻土中冰的体积含量是温度的函数[16]，有

$$\theta_i=\begin{cases}1-[1-(T-T_0)]^{\xi} & T\leqslant T_0\\ 0 & T>T_0\end{cases} \tag{20}$$

式中：ξ 为系数。

含水量 w 为

$$w=\frac{\rho_i n\theta_i+\rho_w n(1-\theta_i)}{\rho_s(1-n)} \tag{21}$$

由式(20)、式(21)可知，只要算出孔隙率和温度，就能求得含水量。

由以上的推导可以看出，模型考虑了外荷载以及孔隙率变化对水分迁移的影响。式(4)、式(14)构成水热耦合问题的控制方程，通过式(20)将两者联系起来。赋予一定的边界条件及初值，就可得出温度、含水量的分布情况。

2　模型试验

为了检验数学模型的实用性，采用数值分析与室内试验进行对比。为了分析荷载对水分迁移的影响，其他条件不变，设计上部荷载从 100 kPa、200 kPa到 400 kPa，共 3 个试验。

2.1　试验仪器

传统的冻融循环试验仪器包括制冷系统、温控系统、补水系统、数据采集系统等。由于无法施加压力，因此不能进行有压作用下的冻结试验。

(1)在无压的基础上，本文添加了压力装置，可进行压力作用下的冻结试验。通过油压来进行加卸载，可控制荷载的大小。将顶板固定，底板通过调整油压，可以上下移动。并在底板上放置一个位移计(FXg-81/±25 mm，精度 0.01 mm)，可量测底板的

位移变化。

(2)试验所采用的冻融循环箱为 Xutemp 的 XT5405 系列土工冻胀实验箱,可满足 −40 ℃～60 ℃的冻融循环试验要求。顶板、底板、箱温采用独立的温度控制系统。箱温采用风冷式降温,箱体的温度最佳波动为±0.2 ℃;底板和顶板采用酒精降温,温度最佳波动达到±0.1 ℃。

(3)试样筒体为有机玻璃制成,外径为 140 mm,内径为 100 mm(壁厚 20 mm),高度为 200 mm。最低的温度探头距底部压头的距离为 5 mm,最高的温度探头距顶部压头的距离为 5 mm。在试样筒壁 1/3 圆周的螺旋线上,每隔 10 mm 钻孔径为 3 mm 的圆形小孔,用于安插测量试样温度的热敏电阻。热敏电阻温度传感器精度为 0.05 ℃。

(4)试样在开放系统中(马廖特瓶无压补水)进行自上而下的连续冻结试验。水分可通过底板的凹槽向土样补水。控制补水的水头高度与土柱底部齐平,避免水分在水头压力差的作用下发生迁移。人工记录补水量。

试验装置示意如图 2 所示。

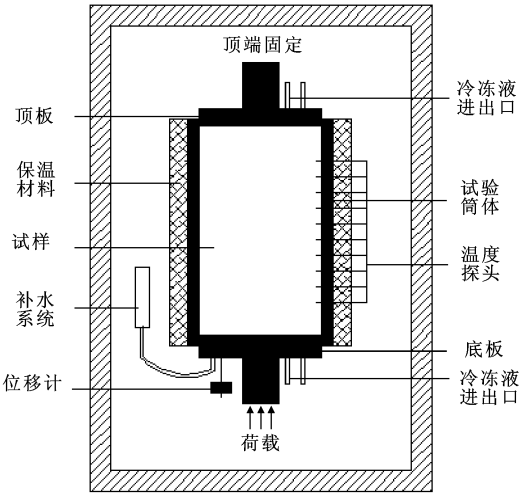

图 2 试验装置

Fig. 2 Experimental apparatus

2.2 试验材料

试验选用粉质粘土,土样颗粒分布曲线如图 3 所示。将土体配至饱和状态,含水量约 16%,干密度为 1.69～1.71 g/cm^3。将配制好的土样分层装入标准罐(直径 100 mm,高 125 mm)中,通过击实达到预定的密实状态。试样均制成高 100 mm,直径 100 mm。通过压力机将土样压入有机玻璃试验筒中。从图 2 可以看到,顶板、底板具有一定的长度,压头需要进入到试验筒体中。调整底板位置,可让顶板和底板与土样的上下端面良好接触。

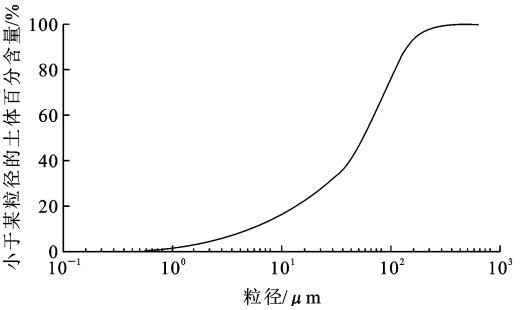

图 3 土样颗粒分布曲线

Fig. 3 Grain size distribution of soil sample

2.3 试验流程

将制好的试样放在 2.5 ℃的恒温箱中 12 h,让试件温度均匀分布。荷载从 0 开始以 20 N/s 的加载速率,加载至指定荷载,然后保持荷载不变。调整顶板温度控制在 −2 ℃,底板与箱温控制在 2.5 ℃,开始试验。温度与冻胀量采用 DT80 数据采集仪记录,采样间隔为 5 min。根据土工试验规范要求,单向冻结时间为 72 h。试验完毕后将试验切片,每 1 cm取 2 份土样,取其平均值作为该土层的含水率,采用烘干法测定含水率。试验流程见图 4。

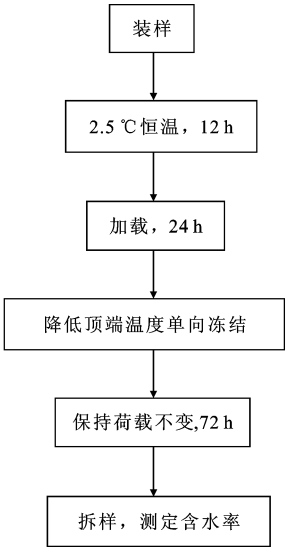

图 4 试验流程

Fig. 4 Testing process

3 数值模拟

将一个 100 mm 高的圆柱形土样,在 2.5 ℃环境中恒温足够长时间,然后将土柱顶端温度固定为 −2 ℃,底端温度固定为 2.5 ℃,侧面绝热。初始孔隙率为 0.30,顶端瞬时冻结,孔隙水只发生原位冻结,孔隙率为 0.32。土柱底端有补水通道,孔隙率保持不变,仍为 0.30;对土柱施加不同轴向压力。

由于水分和热量只在垂向上传递，且不考虑围压作用，因此该问题可以简化成一个考虑外荷载影响的一维水热耦合问题。

利用 COMSOL Multiphysics 有限元法多物理场耦合分析软件进行求解，沿高度方向将土样划分为 120 个单元，计算时间步长为 3 min。模拟过程中，取外荷载为 100 kPa。模拟中的热物理参数通过试验取得，系数根据相关文献确定，所需参数及取值见表 1。其中 ρ_s 为土颗粒密度。

表 1　计算参数

Tab. 1　Calculation parameter

参数	取值	参数	取值	参数	取值
ξ	−5	$\rho_s/(\mathrm{kg\cdot m^{-3}})$	2 670	$\lambda_w/(\mathrm{W\cdot(m\cdot K)^{-1}})$	0.58
β	−8	$\rho_i/(\mathrm{kg\cdot m^{-3}})$	917	$\lambda_i/(\mathrm{W\cdot(m\cdot K)^{-1}})$	2.22
$L/(\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}})$	334.56	$\rho_w/(\mathrm{kg\cdot m^{-3}})$	1 000	$C_s/(\mathrm{kJ\cdot m^{-3}K^{-1}})$	2 160
$k_0/10^{-10}(\mathrm{m\cdot s^{-1}})$	3.6	$g/(\mathrm{N\cdot kg^{-1}})$	9.80	$C_i/(\mathrm{kJ\cdot m^{-3}K^{-1}})$	1 875
P_a/kPa	101	$\lambda_s/(\mathrm{W\cdot(m\cdot K)^{-1}})$	1.20	$C_w/(\mathrm{kJ\cdot m^{-3}K^{-1}})$	4 180

4　结果分析

利用试验设备，对饱和土样进行了不同荷载条件下的冻胀试验。将含水量 16%、荷载 100 kPa、暖端 2.5 ℃、冷端−2 ℃条件下的试验结果，与数值计算结果进行对比分析，从而验证所建立的水热耦合模型的正确性与实用性。

4.1　温度分布

图 5 中给出了 3 个不同位置的温度趋势随时间的变化，包括模拟值与实测值。从图 5 中可以看出，在降温初期，土样冷端的温度急剧降低，随着冻结时间的增长，降温的速率有所减缓，大约在 30 h 趋于一个稳定的温度值。从图 5 可以看到，不同高度处的温度变化趋势大致一样，但是降温速率和降温幅度却有所不同。越是靠近冷端，其降温速率越快，而且降温幅度也大，达到稳定温度的时间越短。

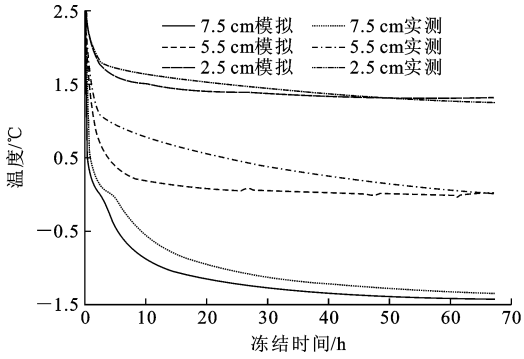

图 5　不同土样高度处温度随冻结时间的变化

Fig. 5　Temperature change with time at different positions

从图 5 还可看出，约在 30 h 后土样温度趋于稳定，因此图 6 给出了 30 h 前不同时刻温度随土样高度的变化曲线。从图 6 可以看到，试样在降温初期，温度变化幅度比较大。随着冻结时间增长，土体内温度变化逐渐减小，最后趋于稳定，此时土体内部温度可分为冻土段和未冻土段。两段土的温度分布略有差异，且冻土段温度斜率大于未冻土段斜率。实测温度与模拟温度在变化趋势上具有良好的相似性，两者在数值上差异也较小，满足计算要求。

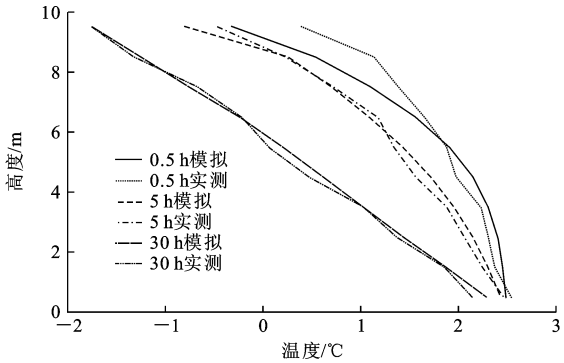

图 6　不同时刻温度与土样高度的变化

Fig. 6　Temperature profiles at different times

4.2　含水率分布

迁移水分是引起土体冻胀的主要因素。下页图 7 为模拟土样经历不同冻结时间后的含水率分布。开始阶段土样含水率一样。随着时间的增长，试样上部的含水率有所增加，含水率增大的范围主要集中在冻土段。冻结锋面邻近未冻区部分含水率有所减小，这是因为水分在温度梯度作用下迁移到了冻结区的缘故，这说明水分向冻结区迁移。随着冻结锋面逐渐下移，含水率最大的位置也在逐步向下移动。冻结时间增长，最大含水率增大，这是由于随着时间的增长，冻结锋面的移动速度逐渐减缓，温度梯度趋于稳定，水分有足够时间迁移，使得水分迁移量增大。

下页图 8 给出了不同荷载作用下含水率沿土柱高度的分布情况。从图 8 可看到，在冻结锋面附近，含水率较其他地方大。实测含水率在底部较模拟值增大，是由于该位置处于补水端，浸泡在水中，从而

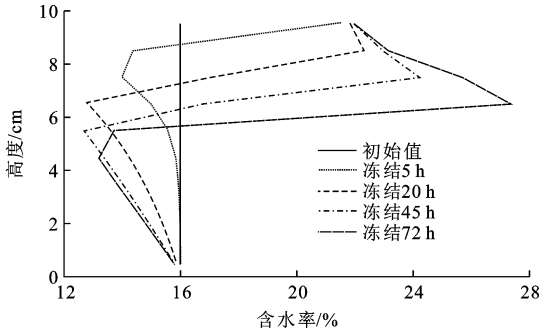

图 7 不同冻结时间的含水率分布

Fig. 7 Water content profiles at different times

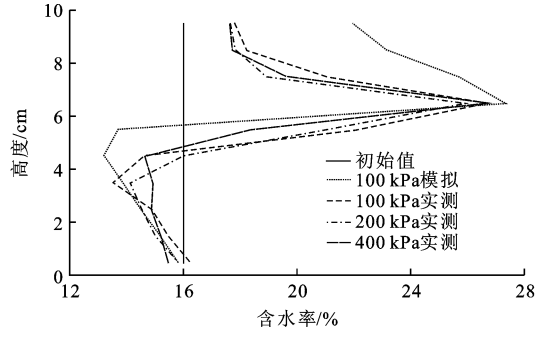

图 8 不同荷载作用下的含水率分布

Fig. 8 Water content distribution under different overburden pressures

导致实测含水率偏大。上部荷载作用在试样的顶部，作用力的方向与冻结过程中水分迁移方向相反。由于上部荷载的存在，土体膨胀受到约束，产生冻胀力。冻胀力作为压力势正值施加于未冻水中，减小未冻水势负值，相应减小冻土段的未冻水势梯度，从而减少了水分的吸入。由于施加荷载，试验初期将会产生土体固结排水。施加荷载越大，试样底部的含水率损失越大。模拟中最下端的含水率由于固定孔隙率，因此没有明显出现减小。

4.3 水分迁移

冻胀由原位冻结和迁移水分冻结两部分组成，后者占得比例更大。由式(11)、式(18)可以看出，外荷载作为一种压力势，降低了水压力，从而降低了水分迁移速率，由此在相同时间内，补水量会降低。通过水热耦合方程计算，可得到任意时刻的温度分布。根据式(18)计算孔隙水压力，再根据达西定律，确定水分迁移速率。然后计算不同时间内的水分迁移量增量，最后叠加即可求得水分迁移量(图 9)。从图 9 可看到，在冻结初期，补水量为 0，随后逐渐增大。由于冻土内的负温吸力作用，且有一定的压力梯度，加上土样底端有与外界连通的补水通道，这保证了外界的水分能够不断通过未冻区迁移到冻土区内。随着冻结时间的增长，补水量逐渐增大。外荷载对

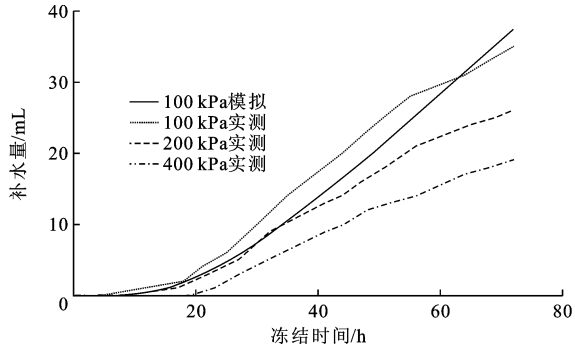

图 9 补水量随冻结时间的变化

Fig. 9 Water intake with time

补水量的影响是明显的。在压力分别为 100、200、400 kPa 作用下，补水量实测值分别为 34、25、18 mL。此外，随着荷载的增大，开始补水的时间往后推移，补水量也在逐渐减小。

4.4 冻胀速率

通过底板的位移计，可以得到冻胀量的时程曲线。将冻胀速率定义为单位时间内的冻胀量增量，通过计算得到冻胀速率与时间的关系如图 10 所示。从图 10 可看到，冻胀速率的发展经过 3 个阶段，缓慢上升段、快速上升段和下降段。当冻胀速率达到最大值以后，随即开始下降。

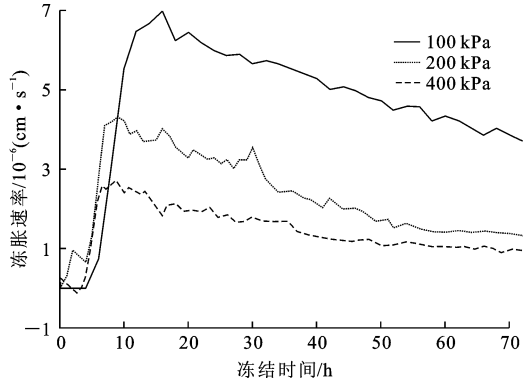

图 10 冻胀速率与冻结时间的关系

Fig. 10 Frost heave rate versus time

从图 10 可看到，3 条曲线具有相似的变化规律。在降温初期，由于冻结锋面前移十分迅速，水分只在原位冻结，所以冻胀速率很小。此外，由于土体本身具有热胀冷缩的性质，因此在土体冻结初期，土样内部进行复杂的收缩与冻胀过程。当收缩量大于冻胀量时，就出现图 10 中存在的负的冻胀速率。当收缩量小于冻胀量时，土体整个表现为冻胀，冻胀速率由负值方向转向正值方向逐渐增大。当冻胀速率达到最大值后，便开始进入波动下降阶段。在冻胀速率下降过程中，曲线存在一些波动，主要是由于冰

透镜体的分层产生所导致的。在压力为 100、200、400 kPa 时，最大冻胀速率分别为 6.96×10^{-6}、4.31×10^{-6}、2.69×10^{-6} cm/s。从前面的分析可知，荷载增大将减少水分迁移量。结合式(8)可知，随着荷载的增大，单位时间内水分迁移导致的冰增量将减小，导致冻胀速率减小。

5　结　语

(1)根据能量平衡和质量守恒原理，进行了一维水热运输的理论推导。建立了考虑孔隙率变化、外荷载影响的冻土一维水热耦合方程。

(2)土样在压力作用下的补水量随着外荷载的增大而减小，开始补水的时间也推后。实测值与计算值的总体变化趋势一致，不论荷载大小如何，补水量变化趋势是一致的。模拟结果与实测结果具有较好的一致性。

(3)外荷载对水分迁移的影响，主要表现在对水分迁移驱动力的影响上，由此引起水分迁移量、迁移速率以及冻胀速率的变化。

参考文献：

References：

[1] Miller R D. Freezing and heaving of saturated and unsaturated soils[J]. Highway Research Record, 1972, 393(1): 1-11.

[2] Konrad J M, Morgenstern N R. The segregation potential of a freezing soil[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1981, 18(4): 482-491.

[3] Nakano Y, Tice A R. Transport of water due to a temperature gradient in unsaturated frozen clay[J]. Cold Regions Science and Technology, 1990, 18(1): 57-75.

[4] Watanabe K, Wake T. Hydraulic conductivity in frozen unsaturated soil[C]//Edited by Douglas L K, Kenneth M H. Proceedings of the 9th International Conference on Permafrost, Fairbanks. Thomas Alton and Fran Pedersen, 2008: 1927-1932.

[5] 徐学祖，邓友生. 冻土中水分迁移的实验研究[M]. 北京：科学出版社，1991.
XU Xue-zu, DENG You-sheng. Experimental study on water migration in freezing and frozen soils[M]. Beijing: Science Press, 1991. (in Chinese)

[6] 陈肖柏，刘建坤，刘鸿绪，等. 土的冻结作用与地基[M]. 北京：科学出版社，2006.
CHEN Xiao-bai, LIU Jian-kun, LIU Hong-xu, et al. Frost action of soil and foundation engineering[M]. Beijing: Science Press, 2006. (in Chinese)

[7] 赵　刚，陶夏新，刘　兵. 重塑土冻融过程中水分迁移试验研究[J]. 中南大学学报：自然科学版，2009，40(2)：519-525.
ZHAO Gang, TAO Xia-xin, LIU Bing. Experimental research on water migration in remoulded soil during freezing and thawing process[J]. Journal of Central South University: Science and Technology, 2009, 40(2): 519-525. (in Chinese)

[8] Harlan R L. Analysis of coupled heat-fluid transport in partially frozen soil[J]. Water Resources Research, 1973, 9(5): 1314-1323.

[9] Taylor G S, Luthin J N. A model for coupled heat, and moisture transfer during soil freezing[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1978, 15(4): 548-555.

[10] Newman G P, Wilson G W. Heat and mass transfer in unsaturated soils during freezing [J]. Canadian Geotechnical Journal, 1997, 34(1): 63-70.

[11] 雷志栋，尚松浩，杨诗秀，等. 土壤冻结过程中潜水蒸发规律的模拟研究[J]. 水利学报，1999(6)：6-10.
LEI Zhi-dong, SHANG Song-hao, YANG Shi-xiu, et al. Simulation on phreatic evaporation during soil reezing[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 1999(6): 6-10. (in Chinese)

[12] 毛雪松，侯仲杰，孔令坤. 冻结条件下开放体系风积砂水分迁移的动态观测及分析[J]. 岩石力学与工程学报，2010，29(1)：202-208.
MAO Xue-song, HOU Zhong-jie, KONG Ling-kun. Dynamic observation and analysis of moisture migration for wind-blow sand in open system during frost [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2010, 29(1): 202-208. (in Chinese)

[13] Shen M, Ladanyi B. Modelling of coupled heat moisture and stress field in freezing soil[J]. Cold Regions Science and Technology, 1987, 14(3): 237-246.

[14] 陈飞熊，李　宁，程国栋. 饱和正冻土多孔多相介质的理论构架[J]. 岩土工程学报，2002，24(2)：213-217.
CHEN Fei-xiong, LI Ning, CHENG Guo-dong. The theoretical frame of multi-phase porous medium for the freezing soil[J]. Chinese Jounal of Geotechnical Engineering, 2002, 24(2): 213-217. (in Chinese)

[15] Gilpin R R. A model for the prediction of ice lensing and frost heave in soils[J]. Water Resources Research, 1980, 16(5): 918-930.

[16] Thomas H R, Cleall P J, Li Y C, et al. Modelling of cryogenic processes in permafrost and seasonally frozen soils[J]. Geotechnique, 2009, 59(3): 173-184.