

文章编号:1671-8879(2014)06-0117-08

拉压弹性模量不同材料板的热弯曲及屈曲

吴 晓¹,赵均海²,黄志刚¹,杨立军¹

(1. 湖南文理学院 土木建筑工程学院,湖南 常德 415000; 2. 长安大学 建筑工程学院,陕西 西安 710061)

摘 要:为了分析拉压弹性模量不同材料板在热状态下的力学行为,采用弹性理论研究了拉压弹性模量不同材料板的热弯曲及屈曲问题。建立了拉压弹性模量不同材料板在热状态下的弯曲微分方程,推导出了相关板热弯曲的解析解;选取梁函数作为试函数,采用 Galerkin 原理推导出了热屈曲时的临界载荷,该方法计算结果与有关文献计算结果的误差很小;并讨论分析了长宽比、温度对拉压弹性模量不同材料板热弯曲及屈曲的影响。研究结果表明:拉压弹性模量不同材料四边简支矩形板的中点弯曲挠度随着长宽比的增大逐渐变小,而随着温度比增大拉压弹性模量不同材料四边简支矩形板中点弯曲挠度也逐渐增大;当拉压弹性模量相差较大时,采用单模量弹性理论研究拉压弹性模量不同材料板热弯曲及屈曲是不合适的。

关键词:弹性模量;板;热弯曲;屈曲;温度;弹性理论

中图分类号:O343

文献标志码:A

Thermal bending and buckling calculations of bimodulous plate

WU Xiao¹, ZHAO Jun-hai², HUANG Zhi-gang¹, YANG Li-jun¹

(1. School of Architecture and Civil Engineering, Hunan University of Arts and Science, Changde 415000, Hunan, China; 2. School of Civil and Engineering, Chang'an University, Xi'an 710061, Shaanxi, China)

Abstract: In order to analyze the mechanical behavior of bimodulous plate in thermal state, the thermal bending and buckling calculations of bimodulous plate were studied by using elastic theory. Thermal bending differential equations for the bimodulous plate were established and the analytical solution to thermal bending calculation of relevant plate was derived. Galerkin principle was used to deduce the critical load of thermal buckling by taking beam functions as trial functions, and the calculation errors were very small. The effects of length-width ratio and temperature on thermal bending and buckling of the bimodulous plate were discussed and analyzed. The results show that as the ratio of length to width increases, the midpoint deflection of bimodulous rectangular plate with simple support decreases gradually; as the temperature ratio increases, the midpoint deflection of bimodulous rectangular plate with simple support also increases. Analysis on examples indicates that it's in appropriate to use elastic theory with same elastic modulus to study the thermal bending and buckling calculations of bimodulous plate with different tensile elastic modulus and compressive elastic modulus. 4 tabs, 3 figs, 13 refs.

收稿日期:2014-06-10

基金项目:湖南省科技计划项目(2011SK3145); 湖南“十二五”重点建设学科项目(湘教发[2011]76号);

湖南省自然科学基金项目(2015JJ6073)

作者简介:吴 晓(1965-),男,湖南常德人,教授,E-mail:wx2005220@163.com。

Key words: elastic modulus; plate; thermal bending; buckling; temperature; elastic theory

0 引言

经典弹性理论认为材料在受拉和受压时呈现出相同的弹性性质,也是对材料非线性的一种简化结果。大量的试验和研究表明,材料在绝对值相同的拉应力或压应力作用下,会发生绝对值不同的拉应变或压应变,即材料具有明显的拉压弹性模量不同特征。事实上,许多工程材料都在不同程度上表现出拉压弹性模量的性质,如复合材料、金属合金、混凝土等材料。工程设计中对材料的拉压弹性模量一般不予区分,现仍沿用经典弹性理论,在某些情况下会因本构关系不符合造成较大误差,有可能成为工程结构失效的隐患。所以,在梁、弹性平面等问题的结构中,已经开始考虑材料的拉压弹性模量不同的特性。国外有关学者采用有限元法研究了拉压弹性模量不同结构的弯曲变形问题^[1-2];文献[3]研究了利用剪切效应原理计算双模量材料的性能参数解;文献[4-6]研究了拉压弹性模量不同材料的本构关系及简单弹性平面问题;文献[7-8]研究了拉压弹性模量不同材料的简单桁架问题;文献[9-14]研究了拉压弹性模量不同材料板的弯曲和非线性弯曲问题。但是,工程实际中许多拉压弹性模量不同材料的结构都处于热状态下的工作环境中,因此由高温所产生的热应力问题已成为实际工程中的重大问题,而与拉压弹性模量不同材料结构寿命有关的热应力分析已在结构设计中占据重要地位。目前,有关拉压弹性模量不同材料的热弯曲及屈曲问题的研究文献还很少见。为此,本文采用弹性理论研究了拉压弹性模量不同材料板的热弯曲及屈曲问题。

1 板的热弯曲微分方程

由文献[9-10]可知拉压弹性模量不同材料板弯曲时的拉伸区高度 h_1 及压缩区高度 h_2 分别为

$$h_1 = \frac{h \sqrt{E_2(1-\mu_1)}}{\sqrt{E_1(1-\mu_2)} + \sqrt{E_2(1-\mu_1)}} \\ h_2 = h - h_1 \quad (1)$$

式中: E_1 为拉压弹性模量; E_2 为压缩弹性模量; h 为板厚; μ_1 为拉伸区泊松比; μ_2 为压缩区泊松比。

根据文献[4]的假设,在热状态下拉压弹性模量不同材料以常值热膨胀系数 α 在各方向膨胀或收缩。由弹性理论可知拉压弹性模量不同材料板在热状态下的应力与应变关系为

$$\begin{cases} \sigma_x = -\frac{E_i z}{1-\mu_i^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu_i \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \frac{E_i \alpha T}{1-\mu_i} \\ \sigma_y = -\frac{E_i z}{1-\mu_i^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu_i \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \frac{E_i \alpha T}{1-\mu_i} \\ \tau_{xy} = -\frac{E_i z}{1+\mu_i^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{cases} \quad (2)$$

式中: $i=1$ 时表示拉伸状态, $i=2$ 时表示压缩状态; σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} 分别为 x 方向的正应力、 y 方向的正应力和剪应力; w 为板弯曲时位移; T 为温度增量。

由式(2)可知拉压弹性模量不同板的弯矩、扭矩表达式为

$$\begin{cases} M_x = -\frac{E_1}{1-\mu_1^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu_1 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \int_0^{h_1} z^2 dz - \frac{E_2}{1-\mu_2^2} \cdot \\ \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \int_{-h_2}^0 z^2 dz \\ M_y = -\frac{E_1}{1-\mu_1^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \int_0^{h_1} z^2 dz - \frac{E_2}{1-\mu_2^2} \cdot \\ \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \int_{-h_2}^0 z^2 dz \\ M_{xy} = -\frac{E_1}{1+\mu_1} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \int_0^{h_1} z^2 dz - \frac{E_2}{1+\mu_2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \int_{-h_2}^0 z^2 dz \end{cases} \quad (3)$$

式中: M_x 、 M_y 、 M_{xy} 分别为 x 方向的弯矩、 y 方向的弯矩和扭弯矩。

拉压弹性模量不同矩形板弯曲时,其内力应满足以下各式,即

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}, \quad Q_y = \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} \quad (4)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + q = 0 \quad (5)$$

式中: Q_x 、 Q_y 、 Q_{xy} 分别为 x 方向、 y 方向、 xy 平面的剪力。

把式(3)、式(4)代入式(5)中可以得到下式

$$D \nabla^4 w + \nabla^2 M_T - \left(N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - q = 0 \quad (6)$$

式中: $\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial^2 x \partial^2 y} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$; $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$;

D 为弯曲刚度, $D = \frac{E_1 h_1^3}{3(1-\mu_1^2)} + \frac{E_2 h_2^3}{3(1-\mu_2^2)}$; M_T 为热弯矩, $M_T = \frac{E_1 \alpha}{1-\mu_1} \int_0^{h_1} T z dz + \frac{E_2 \alpha}{1-\mu_2} \int_{-h_2}^0 T z dz$; N_x 、

N_y 、 N_{xy} 分别为 x 方向、 y 方向、 xy 平面的中面力。

2 矩形板的热弯曲

假设非均匀温度场中,拉压弹性模量不同矩形板四边为可移简支承,在均布载荷 q_0 作用下可知, $N_x=0$ 、 $N_{xy}=0$ 、 $N_y=0$,因此可把式(6)化为

$$D \nabla^4 w + \nabla^2 M_T = q_0 \quad (7)$$

参阅文献[15]假设温度沿板厚为线性分布,即

$$T(z) = T_0 + T_1 \frac{z}{h} \quad (8)$$

所以,可得拉压弹性模量不同矩形板的热弯矩表达式为

$$M_T = \frac{E_1 \alpha}{1 - \mu_1} \left(\frac{T_0 h_1^2}{2} + \frac{T_1 h_1^3}{3h} \right) + \frac{E_2 \alpha}{1 - \mu_2} \left(-\frac{T_0 h_2^2}{2} + \frac{T_1 h_2^3}{3h} \right) \quad (9)$$

由于非均匀温度场中拉压弹性模量不同矩形板四边为可移简支承,可知其边界条件为

$$\begin{aligned} x=0, x=a \text{ 时, } w(x, y) &= 0 \\ \left[\frac{E_2 (h_1 - h)^3}{3(1 - \mu_2^2)} - \frac{E_1 h_1^3}{3(1 - \mu_1^2)} \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left[\frac{E_2 (h_1 - h)^3 \mu_2}{3(1 - \mu_2^2)} - \frac{E_1 h_1^3 \mu_1}{3(1 - \mu_1^2)} \right] \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - M_T &= 0 \\ y=0, y=b \text{ 时, } w(x, y) &= 0 \\ \left[\frac{E_2 (h_1 - h)^3}{3(1 - \mu_2^2)} - \frac{E_1 h_1^3}{3(1 - \mu_1^2)} \right] \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left[\frac{E_2 (h_1 - h)^3 \mu_2}{3(1 - \mu_2^2)} - \frac{E_1 h_1^3 \mu_1}{3(1 - \mu_1^2)} \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - M_T &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

根据拉压弹性模量不同矩形板四边为可移简支承的边界条件,令拉压弹性模量不同简支矩形板的弯曲挠度表达式为

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (11)$$

再将 M_T 、 q_0 也展开为同样的级数形式

$$\begin{aligned} M_T &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ q_0 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \end{aligned} \quad (12)$$

式中: $B_{mn} = \frac{4M_T}{\pi^2 mn} [1 - \cos(m\pi)][1 - \cos(n\pi)]$, $C_{mn} =$

$$\frac{4q_0}{\pi^2 mn} [1 - \cos(m\pi)][1 - \cos(n\pi)].$$

把式(11)、式(12)代入式(7)中可得

$$\begin{aligned} D \left(\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right)^2 A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) - \\ \left(\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right) B_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) = \end{aligned}$$

$$C_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (13)$$

由式(13)可以求得

$$\begin{aligned} A_{mn} = \\ \frac{4[1 - \cos(m\pi)][1 - \cos(n\pi)][q_0 + ((m^2 \pi^2 / a^2) + n^2 \pi^2 / b^2)M_T]}{\pi^2 mn D (m^2 \pi^2 / a^2 + n^2 \pi^2 / b^2)^2} \end{aligned} \quad (14)$$

把式(14)代入式(11)中即得到拉压弹性模量不同四边为可移简支承矩形板的弯曲挠度表达式为

$$\begin{aligned} w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \cdot \\ \frac{4[1 - \cos(m\pi)][1 - \cos(n\pi)][q_0 + ((m^2 \pi^2 / a^2) + n^2 \pi^2 / b^2)M_T]}{\pi^2 mn D [(m^2 \pi^2 / a^2) + (n^2 \pi^2 / b^2)]^2} \cdot \\ \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \end{aligned} \quad (15)$$

式中: a 、 b 分别为矩形板的长和宽; T_0 、 T_1 均为温度初始常量。

3 矩形板的热屈曲

假设拉压弹性模量不同矩形板四边为不可移支承,且在非均匀温度场中没有外载荷作用时,将式(6)化为

$$\begin{aligned} D \nabla^4 w + \nabla^2 M_T - \left(N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \right. \\ \left. N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

式中: $N_x = N_y = -N_T$, $N_{xy} = 0$ 。

由弹性理论可知拉压弹性模量不同材料板在非均匀温度场中的热力表达式为

$$\begin{aligned} N_T = \frac{E_1 \alpha}{1 - \mu_1} \int_0^{h_1} T dz + \frac{E_2 \alpha}{1 - \mu_2} \int_{-h_2}^0 T dz = \\ \frac{E_1 \alpha}{1 - \mu_1} \left(T_0 h_1 + \frac{T_1 h_1^2}{2h} \right) + \frac{E_2 \alpha}{1 - \mu_2} \left(T_0 h_2 + \frac{T_1 h_2^2}{2h} \right) \end{aligned} \quad (17)$$

利用 Galerkin 原理及式(17)可以把式(16)化为如下形式

$$\begin{aligned} \int_0^a \int_0^b \left[D \nabla^4 w + \nabla^2 M_T + N_T \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] \cdot \\ w(x, y) dx dy = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

当拉压弹性模量不同矩形板四边为不可移简支承时,可设板弯曲挠度为梁函数

$$w(x, y) = R_0 \left(\frac{x^4}{a^4} - 2 \frac{x^3}{a^3} + \frac{x}{a} \right) \left(\frac{y^4}{b^4} - 2 \frac{y^3}{b^3} + \frac{y}{b} \right) \quad (19)$$

式中: R_0 为挠度。

把式(9)、式(17)、式(19)代入式(18)中可以得到拉压弹性模量不同矩形板四边为不可移简支承时

的临界热屈曲载荷及临界热屈曲温度分别为

$$N_T = \frac{D}{(1+\lambda^2)b^2} \left(\frac{9.883}{\lambda^2} + 9.883 \lambda^2 + 19.7406 \right) \tag{20}$$

$$T_{cr} = \frac{D}{(1+\lambda^2)b^2 K} \left(\frac{9.883}{\lambda^2} + 9.883 \lambda^2 + 19.7406 \right) \tag{21}$$

式中： $K = \frac{E_1 \alpha}{1-\mu_1} \left(h_1 + \frac{kh_1^2}{2h} \right) + \frac{E_2 \alpha}{1-\mu_2} \left(h_2 - \frac{kh_2^2}{2h} \right)$, $k = \frac{T_1}{T_0}$, $\lambda = \frac{a}{b}$ 。

当拉压弹性模量不同矩形板四边为固支承时，可设板弯曲挠度为梁函数

$$w(x,y) = R_0 \left(\frac{x^4}{a^4} - 2 \frac{x^3}{a^3} + \frac{x^2}{a^2} \right) \left(\frac{y^4}{b^4} - 2 \frac{y^3}{b^3} + \frac{y^2}{b^2} \right) \tag{22}$$

把式(9)、式(17)、式(22)代入式(18)中可以得到拉压弹性模量不同矩形板四边为固支承时的临界热屈曲载荷及临界热屈曲温度分别为

$$N_T = \frac{D}{(1+\lambda^2)b^2} \left(\frac{40.953}{\lambda^2} + 40.953 \lambda^2 + 21.8397 \right) \tag{23}$$

$$T_{cr} = \frac{D}{(1+\lambda^2)b^2 K} \left(\frac{40.953}{\lambda^2} + 40.953 \lambda^2 + 21.8397 \right) \tag{24}$$

当拉压弹性模量不同矩形板四边为可移简支承且仅在 x 方向两对边受均布压力时，采用本文方法可知其临界屈曲载荷为

$$N_{cr} = \frac{D}{b^2} \left(\frac{9.883}{\lambda^2} + 9.883 \lambda^2 + 19.7406 \right) \tag{25}$$

在式(25)中令 $\lambda = 1$ ，可知 $N_{cr} = \frac{39.5068}{b^2} D$ ，文献[13]给出的结果是 $N_{cr} = \frac{39.4384}{b^2} D$ ，本文方法与文献[16]用无穷级数求得的精确结果的误差为 0.173 1%。

当拉压弹性模量不同矩形板四边为固支承且仅在 x 方向两对边受均布压力时，采用本文方法可知其临界屈曲载荷为

$$N_{cr} = \frac{D}{b^2} \left(\frac{40.953}{\lambda^2} + 40.953 \lambda^2 + 21.8397 \right) \tag{26}$$

在式(26)中令 $\lambda = 1$ ，可知 $N_{cr} = \frac{103.7457}{b^2} D$ ，文献[13]给出的结果是 $N_{cr} = \frac{99.2861}{b^2} D$ ，本文方法与文献[16]用无穷级数求得的精确结果的误差

为 0.173 1%。

从以上计算结果可以看出，本文方法计算结果与文献[13]用无穷级数求得的精确结果的误差很小，均在实际工程中要求控制的误差 5% 以内。所以，本文选取梁函数作为试函数，采用 Galerkin 原理研究拉压弹性模量不同矩形板的热屈曲问题是可行的。

4 算例分析及讨论

以某拉压弹性模量不同材料为例，讨论并分析了温度对拉压弹性模量不同材料板热弯曲及屈曲的影响。拉压弹性模量不同材料参数为： $E_1 = 172 \text{ GPa}$, $\mu_1 = 0.34$, $E_2 = 295 \text{ GPa}$, $\mu_2 = 0.395$, $\alpha = 125 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$ 。

4.1 算例 1

某拉压弹性模量不同材料四边简支矩形板如图 1 所示，板厚 $h = 0.05 \text{ m}$, $a = 1.5 \text{ m}$, $q_0 = 2000 \text{ N/m}$ 。把拉压弹性模量不同四边简支矩形板的中点弯曲挠度随温度及长宽比变化的结果列于下页表 1、表 2 中。

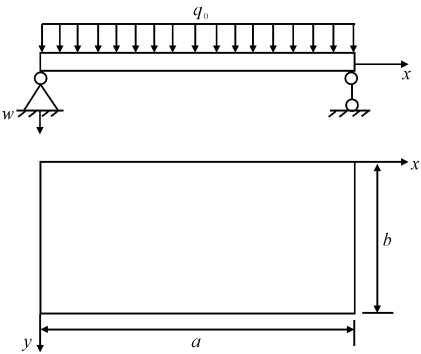


图 1 四边简支矩形板

Fig. 1 Simply supported rectangular plate

4.2 算例 2

图 2 所示为某拉压弹性模量不同材料四边不可移简支矩形板，板厚 $h = 0.05 \text{ m}$, $a = 1.5 \text{ m}$ 。把拉压弹性模量不同四边为不可移简支矩形板的屈曲临界温度 T_{cr} 列在下页表 3 中。

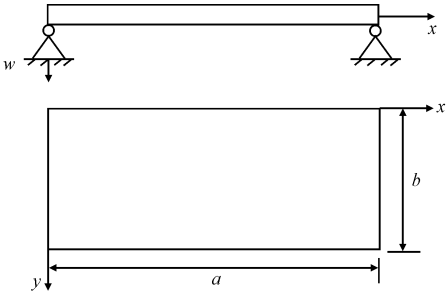


图 2 四边为不可移简支矩形板

Fig. 2 Rectangular plate with non-moving simple support

表 1 四边简支矩形板的中点弯曲挠度 $w\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)(10^{-5}\text{ m}), (T_0=0, T_1=0)$

Tab. 1 Midpoint deflection $w\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)$ of the simply supported rectangular plate						
a/b	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4
$w\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)$	[5.75]	[4.33]	[3.01]	[2.03]	[1.36]	[0.92]
	4.38	3.30	2.30	1.55	1.04	0.70
	(3.20)	(2.41)	(1.68)	(1.13)	(0.76)	(0.51)

注:表中括号[]中数据为 $E_1=E_2=172\text{ GPa}, \mu_1=\mu_2=0.340$ 时单模量板中点弯曲挠度及屈曲临界温度;括号()中数据为 $E_1=E_2=295\text{ GPa}, \mu_1=\mu_2=0.395$ 时单模量板中点弯曲挠度及屈曲临界温度,无括号数据为双模量板中点弯曲挠度及屈曲临界温度;表 2、表 3、表 4 同。

4.3 算例 3

图 3 为某拉压弹性模量不同材料四边固支矩形

板,板厚 $h=0.05\text{ m}, a=1.5\text{ m}$ 。下面把拉压弹性模量不同四边固支矩形板的屈曲临界温度 T_{cr} 列在下一页表 4 中。

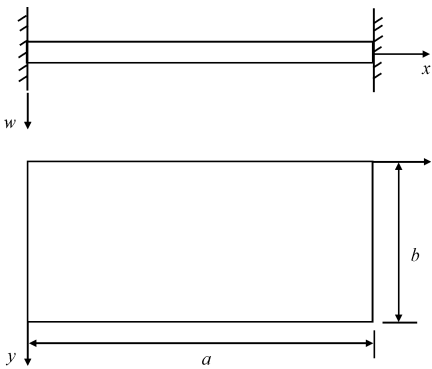


图 3 四边固支矩形板

Fig. 3 Fixed rectangular plat

表 2 四边简支矩形板的中点弯曲挠度 $w\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)(10^{-3}\text{ m}), (T_0=30\text{ }^{\circ}\text{C})$

Tab. 2 Midpoint deflection $w\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)$ of the simply supported rectangular plate						
T_1/T_0	a/b					
	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4
0.2	[5.480 7]	[4.850 0]	[4.078 1]	[3.352 1]	[2.737 8]	[2.241 6]
	5.558 8	4.921 0	4.139 6	3.403 6	2.780 7	2.277 2
	(5.677 9)	(5.027 9)	(4.230 9)	(3.479 8)	(2.843 6)	(2.329 1)
0.4	[10.904 1]	[9.656 5]	[8.126 3]	[6.683 9]	[5.461 9]	[4.473 9]
	11.074 1	9.808 9	8.256 2	6.791 8	5.551 1	4.547 3
	(11.323 7)	(10.031 8)	(8.445 2)	(6.948 4)	(5.679 5)	(4.653 0)
0.6	[16.327 4]	[14.463 1]	[12.174 4]	[10.015 6]	[8.186 3]	[6.706 3]
	16.589 8	14.696 9	12.372 8	10.180 1	8.321 3	6.817 4
	(16.969 4)	(15.035 9)	(12.659 4)	(10.417 0)	(8.515 6)	(6.977 0)
0.8	[21.750 1]	[19.269 6]	[16.222 3]	[13.347 5]	[10.910 5]	[8.938 5]
	22.104 0	19.584 7	16.489 2	13.568 3	11.091 6	9.087 6
	(22.615 1)	(20.039 3)	(16.873 7)	(13.885 0)	(11.351 5)	(9.300 9)
1.0	[27.173 6]	[24.076 7]	[20.269 9]	[16.679 3]	[13.634 6]	[11.170 9]
	27.619 7	24.472 5	20.605 8	16.957 1	13.862 0	11.357 7
	(28.261 9)	(25.043 9)	(21.087 9)	(17.354 5)	(14.187 7)	(11.625 3)

对表 1、表 2 进行分析可知:随着长宽比 a/b 的增大,拉压弹性模量不同材料四边简支矩形板的中点弯曲挠度逐渐变小,这是因为长宽比 a/b 的增大相对使拉压弹性模量不同材料四边简支矩形板弯曲刚度相应也增大,导致其抗弯能力增强。在横向外载荷作用下双模量板中点弯曲挠度介于单模量板中点弯曲挠度之间;同样尺寸拉压弹性模量不同材料四边简支矩形板,在横向外载荷作用下其中点弯曲挠度远远小于横向外载荷与温度载荷联合作用下其中点弯曲挠度;当 T_0 固定且随着温度比 T_1/T_0 增大,拉压弹性模量不同材料四边简支矩形板中点弯曲挠度也逐渐增大,这是因为温度升高会降低拉压

弹性模量不同材料四边简支矩形板的抗弯刚度,导致其抗弯能力减弱。

由表 1 可知,仅在横向外载荷作用下,单模量板中点弯曲挠度与双模量板中点弯曲挠度的误差非常大,误差在 30%左右;双模量板中点弯曲挠度大于单弹性模量大的板中点弯曲挠度,小于单弹性模量小的板中点弯曲挠度。由表 2 可知,横向外载荷与温度载荷联合作用下单模量板中点弯曲挠度与双模量板中点弯曲挠度的误差较小,误差在 2%左右;双模量板中点弯曲挠度小于单弹性模量大的板中点弯曲挠度,大于单弹性模量小的板中点弯曲挠度。

表 3 四边不可移简支矩形板的屈曲临界温度 $T_{cr} (^{\circ}\text{C}) (T_0 = 30\text{ }^{\circ}\text{C})$

Tab. 3 Critical buckling temperature T_{cr} of the simply supported rectangular plate

T_1/T_0	a/b					
	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4
0.2	[6.34]	[7.43]	[8.95]	[10.92]	[13.32]	[16.16]
	6.08	7.13	8.59	10.48	12.78	15.51
	(6.09)	(7.13)	(8.60)	(10.49)	(12.80)	(15.53)
0.4	[6.34]	[7.43]	[8.95]	[10.92]	[13.32]	[16.16]
	6.08	7.13	8.59	10.48	12.78	15.51
	(6.09)	(7.13)	(8.60)	(10.49)	(12.80)	(15.53)
0.6	[6.34]	[7.43]	[8.95]	[10.92]	[13.32]	[16.16]
	6.08	7.13	8.59	10.48	12.78	15.51
	(6.09)	(7.13)	(8.60)	(10.49)	(12.80)	(15.53)
0.8	[6.34]	[7.43]	[8.95]	[10.92]	[13.32]	[16.16]
	6.08	7.13	8.59	10.48	12.78	15.51
	(6.09)	(7.13)	(8.60)	(10.49)	(12.80)	(15.53)
1.0	[6.34]	[7.43]	[8.95]	[10.92]	[13.32]	[16.16]
	6.08	7.13	8.59	10.48	12.78	15.51
	(6.09)	(7.13)	(8.60)	(10.49)	(12.80)	(15.53)

表 4 四边固支矩形板的屈曲临界温度 $T_{cr} (^{\circ}\text{C}) (T_0 = 30\text{ }^{\circ}\text{C})$

Tab. 4 Critical buckling temperature T_{cr} of the simply supported rectangular plate

T_1/T_0	a/b					
	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4
0.2	[21.68]	[22.00]	[24.17]	[28.67]	[35.64]	[45.02]
	20.81	21.11	23.19	27.52	34.20	43.21
	(20.83)	(21.13)	(23.22)	(27.54)	(34.24)	(43.25)
0.4	[21.68]	[22.00]	[24.17]	[28.67]	[35.64]	[45.02]
	20.81	21.11	23.19	27.52	34.20	43.21
	(20.83)	(21.13)	(23.22)	(27.54)	(34.24)	(43.25)
0.6	[21.68]	[22.00]	[24.17]	[28.67]	[35.64]	[45.02]
	20.81	21.11	23.19	27.52	34.20	43.21
	(20.83)	(21.13)	(23.22)	(27.54)	(34.24)	(43.25)
0.8	[21.68]	[22.00]	[24.17]	[28.67]	[35.64]	[45.02]
	20.81	21.11	23.19	27.52	34.20	43.21
	(20.83)	(21.13)	(23.22)	(27.54)	(34.24)	(43.25)
1.0	[21.68]	[22.00]	[24.17]	[28.67]	[35.64]	[45.02]
	20.81	21.11	23.19	27.52	34.20	43.21
	(20.83)	(21.13)	(23.22)	(27.54)	(34.24)	(43.25)

对表 3、表 4 进行分析可以知:随着长宽比 a/b 的增大,拉压弹性模量不同材料矩形板的屈曲临界温度逐渐增高,这是因为长宽比 a/b 的增大相对使拉压弹性模量不同材料矩形板弯曲刚度也相应增大,导致其抗屈曲能力增强。当 T_0 固定且随着温度比 T_1/T_0 增大,拉压弹性模量不同材料矩形板的屈曲临界温度不变,双模量板屈曲临界温度均小于单弹性模量板屈曲临界温度,但双模量板屈曲临界温度与单弹性模量大的板屈曲临界温度接近,单弹性模量小的板屈曲临界温度与双模量板屈曲临界温度的误差在 4% 以上。由式(21)、式(24)可知单弹性模量板的屈曲临界温度仅与泊松比等有关,与弹

性模量无关,而含有泊松比的式子是作为分母出现的,所以双模量板屈曲临界温度均小于单弹性模量板屈曲临界温度。

5 结 语

(1)选取梁函数作为试函数,采用 Galerkin 原理研究拉压弹性模量不同矩形板的热屈曲问题不但计算精度较高而且计算简便,所以是可行的。

(2)长宽比增大拉压弹性模量不同材料四边简支矩形板的中点弯曲挠度逐渐变小。随着温度比 T_1/T_0 增大,拉压弹性模量不同材料四边简支矩形板中点弯曲挠度也逐渐增大。在横向外载荷作用下

双模量板中点弯曲挠度介于单模量板中点弯曲挠度之间;同样尺寸拉压弹性模量不同材料四边简支矩形板,在横向外载荷作用下其中点弯曲挠度远远小于横向外载荷与温度载荷联合作用下其中点弯曲挠度。

(3)随着长宽比的增大,拉压弹性模量不同材料矩形板的屈曲临界温度逐渐增高。当 T_0 固定且随着温度比 T_1/T_0 增大,拉压弹性模量不同材料矩形板的屈曲临界温度不变,双模量板屈曲临界温度均小于单弹性模量板屈曲临界温度,但双模量板屈曲临界温度与单弹性模量大的板屈曲临界温度接近,单弹性模量小的板屈曲临界温度与双模量板屈曲临界温度的误差在 4% 以上。

(4)算例分析表明,当拉压弹性模量相差较大时,采用单模量弹性理论研究拉压弹性模量不同材料板的热弯曲及屈曲是不合适的。

(5)有关拉压弹性模量不同材料的非线性热弯曲及屈曲问题将是今后研究的重点方向。

参考文献:

References:

- [1] Medri G. A nonlinear elastic model for isotropic materials with different behavior in tension and compression[J]. Journal of Engineering Materials and Technology, 1982, 104(1): 26-28.
- [2] Srinivasan R S, Ramachandra L S. Axisymmetric nonlinear dynamic response of bimodulus annular plates [J]. Journal of Vibration and Acoustics, 1990, 112(2): 202-205.
- [3] 吴晓, 杨立军, 黄志刚. 利用剪切效应原理计算双模量材料的性能参数解[J]. 中南大学学报: 自然科学, 2014, 45(2): 609-614.
WU Xiao, YANG Li-jun, HUANG Zhi-gang. Calculating performance parameters of bimodulus material with shear effect principle [J]. Journal of Central South University: Science and Technology, 2014, 45(2): 609-614. (in Chinese)
- [4] 阿巴尔楚米扬. 不同模量弹性理论[M]. 邬瑞锋, 张允真, 译. 北京: 中国铁道出版社, 1986.
Ambartsumyan S A. Elasticity theory of different modulus[M]. Translated by WU Rui-feng, ZHANG Yun-zhen. Beijing: China Railway Press, 1986. (in Chinese)
- [5] 曹平周, 过轶青. 压弯荷载作用下复合节能轻质墙板的有限元分析[J]. 建筑科学与工程学报, 2012, 29(4): 89-95.

CAO Ping-zhou, GUO Yi-qing. Finite element analysis of light weight energy-saving composite wall under vertical and lateral loads[J]. Journal of Architecture and Civil Engineering, 2012, 29(4): 89-95. (in Chinese)

- [6] 罗战友, 夏建中, 龚晓南. 不同拉压模量及软化特性材料的柱形孔扩张问题的统一解[J]. 工程力学, 2008, 25(9): 79-84.
LUO Zhan-you, XIA Jian-zhong, GONG Xiao-nan. Unified solution for expansion of cylindrical cavity in strain-softening materials with different elastic moduli in tension and compression[J]. Engineering Mechanics, 2008, 25(9): 79-84. (in Chinese)
- [7] 张晓月. 基于敏度分析的不同模量桁架正反问题求解[D]. 大连: 大连理工大学, 2008.
ZHANG Xiao-yue. Sensitivity analysis based numerical solutions of normal and inverse problems of elastic bimodulus truss structure[D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2008. (in Chinese)
- [8] 杨海天, 张晓月, 何宜谦. 基于敏度分析的拉压不同模量桁架问题的数值分析[J]. 计算力学学报, 2011, 28(2): 237-242.
YANG Hai-tian, ZHANG Xiao-yue, HE Yi-qian. Sensitivity analysis based numerical solution for truss structures with bi-modulus [J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2011, 28(2): 237-242. (in Chinese)
- [9] 吴晓, 杨立军, 黄翀, 等. 用能量法研究双模量大挠度圆板的轴对称弯曲[J]. 计算力学学报, 2011, 28(2): 274-278.
WU Xiao, YANG Li-jun, HUANG Chong, et al. Large deflection axisymmetric bending of bi-modulus circular plate with energy method [J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2011, 28(2): 274-278. (in Chinese)
- [10] 吴晓, 杨立军, 黄翀, 等. 双模量矩形板的大挠度弯曲计算分析[J]. 工程力学, 2010, 27(1): 17-22.
WU Xiao, YANG Li-jun, HUANG Chong, et al. Large deflection bending calculation and analysis of bimodulus rectangular plate [J]. Engineering Mechanics, 2010, 27(1): 17-22. (in Chinese)
- [11] 吴晓, 杨立军. 拉压弹性模量不同厚壁球壳的弹性解析解[J]. 湖南科技大学学报: 自然科学版, 2012, 27(4): 35-38.
WU Xiao, YANG Li-jun. Elastic solutions for thick wall spherical shell of bimodulus materials under uniform pressure[J]. Journal of Hunan University of Science & Technology: Natural Science Edition,

2012, 27(4):35-38. (in Chinese)

[12] 吴晓, 杨立军, 黄翀. 双模量圆板中心在冲击荷载作用下的弹性计算[J]. 西安建筑科技大学学报: 自然科学版, 2012, 44(5): 614-619.
WU Xiao, YANG Li-jun, HUANG Chong. Elastic dynamic calculation for bimodulus circular plate under the condition of impact load[J]. Journal of Xi'an University of Architecture & Technology: Natural Science Edition, 2012, 44(5): 614-619. (in Chinese)

[13] 吴晓, 黄翀, 孙晋. 双模量悬臂梁在分布荷载作用下的 Kantorovich 解[J]. 湖南科技大学学报: 自然科学版, 2012, 27(2): 55-59.
WU Xiao, HUANG Chong, SUN Jin. The Kantorovich solution for bimodulus cantilever under distributed loads[J]. Journal of Hunan University of Science & Technology: Natural Science Edition, 2012, 27(2): 55-59. (in Chinese)

[14] 吴晓, 黄翀, 杨立军. 双模量平行四边形板弯曲的 Kantorovich 变分解[J]. 力学季刊, 2010, 31(4): 597-603.
WU Xiao, HUANG Chong, YANG Li-jun. Kantorovich variational solution of bending bimodulus parallelogram plate[J]. Chinese Quarterly of Mechanics, 2010, 31(4): 597-603. (in Chinese)

[15] 戴德成, 任勇生. 矩形板的非线性热弹耦合振动[J]. 振动工程学报, 1990, 3(2): 65-66.
DAI De-cheng, REN Yong-sheng. Nonlinear thermoelastically coupled vibrations of rectangular plates[J]. Journal of Vibration Engineering, 1990, 3(2): 65-66. (in Chinese)

[16] 成祥生. 应用板壳理论[M]. 济南: 山东科学技术出版社, 1989.
CHEN Xiang-sheng. Applied theory of plates and shells [M]. Jinan: Shandong Science & Technology Press, 1989.

.....

(上接第 63 页)

[8] New B M, Bowers K H. Ground movement model validation at the heathrow Express trial tunnel [C]// Crowthorne House. Papers Presented at the Seuenth International Symposium, Tunnelling 94. London: Crowthorne House, 1994: 301-326.

[9] Holla L. Ground movement due to longwall mining in high relief areas in New South Wales, Australia[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Science, 1997, 34(5): 775-787.

[10] 陈晓斌, 张家生, 安关峰, 等. 高速公路采空区地面变形计算方法[J]. 岩土工程学报, 2007, 29(2): 191-197.
CHEN Xiao-bin, ZHANG Jia-sheng, AN Guan-feng, et al. Ground deformation computation method for goafs highways[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2007, 29(2): 191-197. (in Chinese)

[11] 王玉标. 采空区高速公路路基路面变形破坏规律与演化分析[D]. 长沙: 长沙理工大学, 2007.
WANG Yu-biao. The rule of deformation-failure and evolution analysis of subgrade pavement of freeway in stope area[D]. Changsha: Changsha University of Science and Technology, 2007. (in Chinese)

[12] 贺跃光, 熊莎, 吴盛才. 采空区上方高速公路允许移动变形指标研究[J]. 矿冶工程, 2013, 33(2): 27-30.
HE Yue-guang, XIONG Sha, WU Sheng-cai. Studies on indicators for tolerable displacement and deformation of expressway above mined-out area[J]. Mining and Metallurgical Engineering, 2013, 33(2): 27-30. (in Chinese)

[13] 向龙, 肖均, 陈寿根. 高速公路下伏采空区稳定性离散单元法分析[J]. 西部探矿工程, 2009, 21(8): 163-165.
XIANG Long, XIAO Jun, CHEN Shou-gen. Discrete element analysis of stability of goaf under expressways[J]. West-China Exploration Engineering, 2009, 21(8): 163-165. (in Chinese)

[14] 李学良. 采空区问题的数值模拟方法分析[J]. 煤矿安全, 2012, 43(12): 193-196.
LI Xue-liang. Numerical simulation method analysis for goaf problem[J]. Safety in Coal Mines, 2012, 43(12): 193-196. (in Chinese)

[15] Cui X M, Miao X X, Wang J A, et al. Improved prediction of differential subsidence caused by underground mining[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2000, 37(4): 615-627.

[16] Donnelly L J, Cruz H De La, Asmar I, et al. The monitoring and prediction of mining subsidence in the Amaga, Angelopolis, Venecia and Bolombolo Regions, Antioquia, Colombia[J]. Engineering Geology, 2001, 59(1/2): 103-114.