

文章编号:1671-8879(2014)06-0100-07

# 考虑主塔刚度影响的三塔自锚式 悬索桥竖弯频率计算公式

张 超,黄群君,许 莉

(福州大学 土木工程学院,福建 福州 350108)

**摘 要:**为方便计算多塔自锚式悬索桥的竖向自振频率,基于最简单的多塔自锚式悬索桥形式——三塔自锚式悬索桥,考虑主塔刚度对振动频率的影响,应用 Rayleigh 法,推导了 1 阶反对称和正对称竖弯振动频率计算公式,并提出主塔刚度影响系数的表达式。公式的精确性采用缩尺模型的模态测试结果和实际桥梁的数值分析结果进行验证。研究结果表明:主塔刚度对于三塔自锚式悬索桥的竖弯刚度影响较大,进行频率计算时不可忽略;影响程度可以通过给出的主塔刚度影响系数计算公式进行计算;公式计算结果与模态识别结果和数值分析结果的误差率均在 3% 以内,表明给出的公式具有较高的计算精度。

**关键词:**桥梁工程;三塔悬索桥;自锚式悬索桥;频率公式;主塔刚度

**中图分类号:**U441.3

**文献标志码:**A

## Frequency formulas for vertical vibration of three-tower self-anchored suspension bridge considering tower stiffness influence

ZHANG Chao, HUANG Qun-jun, XU Li

(School of Civil Engineering, Fuzhou University, Fuzhou 350108, Fujian, China)

**Abstract:** In order to calculate vertical vibration frequencies of multi-tower self-anchored suspension bridge (MSSB) conveniently, the three-tower self-anchored suspension bridge (TSSB) was taken as research object, which is the simplest type of MSSB. Based on the Rayleigh method, frequency formulas for 1st anti-symmetric and symmetric vertical vibration modes of TSSB were derived in consideration of the influence of tower stiffness on vibration frequencies. The modal test results of scaled TSSB and numerical analysis result of TSSB were taken as examples to check the accuracy of proposed formulas respectively. The results show that: vertical frequencies are significantly affected by tower stiffness of TSSB and the extent of influence can be assessed by the main tower stiffness coefficients formulas. The errors between formulas calculation result and modal test result or numerical analysis result are within 3%, which shows the good accuracy of the frequency formulas. 4 tabs, 8 figs, 16 refs.

**Key words:** bridge engineering; three-tower suspension bridge; self-anchored suspension bridge; frequency formula; tower stiffness

收稿日期:2014-09-26

基金项目:教育部博士点基金项目(20133514120006);福建省自然科学基金项目(2013J05072);福州大学育苗基金项目(2012-XY-24)

作者简介:张 超(1985-),男,福建三明人,助理研究员,工学博士,E-mail:zhangchao1985@fzu.edu.cn.

## 0 引言

悬索桥的自由振动特性是工程师较为关注的结构特性之一<sup>[1-2]</sup>。悬索桥的频率计算公式具有很广泛的适用性,可以快速得到自振频率,还可以清晰地得到各结构参数对频率的影响规律<sup>[3-4]</sup>。因此,频率计算公式在悬索桥方案选形及概念设计阶段尤为适用<sup>[5-6]</sup>。

对于传统两跨悬索桥,其缆索承受较大的拉应力,竖向振动中主塔纵向刚度远小于缆索纵向刚度,因此,在频率简化计算中通常忽略主塔刚度的影响<sup>[7]</sup>。但是,鞠小华等对广东虎门大桥、江苏江阴长江大桥、珠海伶仃东航道桥三座两塔地锚式悬索桥的自由振动分析结果表明,竖向振动频率计算时需要考虑桥塔刚度的影响<sup>[8]</sup>。多塔悬索桥作为较特殊的悬索桥结构,结构力学特性与传统双塔悬索桥有较大的不同<sup>[9-11]</sup>。目前,对于多塔悬索桥竖弯频率计算公式的研究工作还开展的较少。西南交通大学刘斌等和福州大学张超等分别针对三塔地锚式悬索桥和三塔自锚式悬索桥,推导了竖弯频率计算公式,但是以上公式推导过程中均忽略主塔刚度的影响以简化推导过程<sup>[12-13]</sup>。由于多塔悬索桥的中间桥塔两侧主缆等效刚度较低,为了满足主梁变形要求,中塔通常被设计得刚度较大<sup>[14]</sup>。因此,多塔悬索桥自由振动中,主塔刚度对振动频率的影响通常不容忽视。张超以某三塔自锚式悬索桥为例,采用数值有限元方法对比了“忽略桥塔刚度影响”和“考虑桥塔刚度影响”2种情况下三塔自锚式悬索桥 1 阶竖弯振动频率,其分析结果表明,是否考虑桥塔刚度对 1 阶竖向振动频率的计算结果影响较大,最大差值高达 43.83%<sup>[15]</sup>。

综上所述,多塔自锚式悬索桥中间桥塔刚度较大,缆索等效刚度相对较低,主塔刚度对结构竖向振动频率影响较大。因此,本文以多塔自锚式悬索桥家族中最简单的结构形式——三塔自锚式悬索桥为研究对象,考虑主塔刚度的影响,采用 Rayleigh 法推导 1 阶反对称和正对称竖弯频率计算公式。

## 1 基于 Rayleigh 法的频率计算方法

Rayleigh 方法的基本原理为:当系统进行固有振动时,如果不考虑阻尼力消耗能量,那么其动能与位能反复交换。对于保守系统,其结构总能量是守恒的。如果结构在自由振动时,任一点、任一瞬间的位移  $y$  可以表示为

$$y(x, t) = A\bar{\phi}(x) \sin(\omega t + \varphi) \quad (1)$$

式中: $A$  为振幅; $\bar{\phi}(x)$  为满足边界条件的近似振型函数; $\varphi$  为初始相位角。

基于式(1)可以写出结构位能  $U$  和动能  $T$  的表达式。根据能量守恒原理,即可以得到频率  $\omega$  的近似计算公式为<sup>[8]</sup>

$$\omega^2 = \frac{U}{T} = \frac{\int_0^l EI(x)(\bar{\phi}'(x))^2 dx}{\int_0^l m(x)(\bar{\phi}(x))^2 dx} \quad (2)$$

式中: $EI(x)$ 、 $m(x)$  分别弯曲刚度和质量分布值。

由于悬索桥固有振动的分析本质是一个特征值求解问题,在满足边界条件的前提下,只要假设的形状函数与实际振型的形状相似,即可求得满足工程精度要求的频率值<sup>[16]</sup>。因此,只要能写出近似振型函数  $\bar{\phi}(x)$ ,即可以利用式(2)近似求出结构自振的频率。

为了简化公式推导过程,本文推导基于以下假定:①假定所有材料的应力应变关系满足虎克定律;②假定恒载为沿跨度均匀分布,且完全为缆索支承,因此在恒载作用下主缆线形为抛物线状;③假定吊索是稠密的,可比拟为仅在竖向有抗力的均匀膜,不考虑吊索的拉伸;④假定加劲梁为两端承受轴压力的等截面连续梁,不考虑加劲梁的竖曲线;⑤假定桥梁自由振动为静力平衡状态基础上产生的小幅度振动,整个过程结构刚度不变;⑥忽略主塔索鞍的纵桥向变位对主缆线形的影响。

为方便后文公式表述,本文对三塔自锚式悬索桥的参数定义如下:

$l_i$  为第  $i$  跨主梁的计算跨径; $f_i$  为第  $i$  跨主缆的矢高; $h_i$  为第  $i$  个主塔的计算高度; $y_i$  为恒载作用下第  $i$  跨主缆几何线形,表达式为  $y_i = 4f_i(x_i/l_i - (x_i/l_i)^2)$ ;  $l_{si}$  为第  $i$  跨主缆的线形参数,表达式为  $l_{si} = \int_0^{l_i} \left(\frac{ds}{dx}\right)^3 dx$ ;  $EI$ 、 $EA$ 、 $m$  分别表示构件弯曲刚度、轴向刚度和荷载集度;下标 c、t、g 分别表示构件为主缆、主塔和主梁; $S_{ti}$  为第  $i$  个主塔等效纵向刚度,等于  $\frac{3E_{ti}I_{ti}}{h_{ti}^3}$ ;  $E$  为弹性模量; $I$  为转动惯量; $v_i$  为自由振动时第  $i$  跨主梁的竖向变形; $H_i$  为自由振动时第  $i$  跨主缆水平拉力增量; $u_{ti}$  为自由振动时第  $i$  个主塔顶端纵向变形。

因此,根据三塔自锚式悬索桥的自由振动特性,可以得到结构的位能  $U$  和动能  $T$  的表达式为

$$U = \sum_{i=1}^4 \frac{H_i^2 l_{si}}{2E_c A_c} + \frac{E_g I_g}{2} \sum_{i=1}^4 \int_0^{l_i} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2 dx +$$

$$\sum_{i=1}^4 \int_0^{l_i} \frac{H_i^2}{2E_g A_g} dx + \sum_{i=1}^3 \frac{E_t I_t}{2} \int_0^{h_i} \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (3)$$
$$T = \sum_{i=1}^4 \frac{1}{2} \int_0^{l_i} m_c \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} \right)^2 dx + \sum_{i=1}^4 \frac{1}{2} \int_0^{l_i} m_g \cdot \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} \right)^2 dx + \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} \int_0^{h_i} m_t \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 dx \quad (4)$$

2 三塔自锚式悬索桥基本振型及变形协调

根据三塔自锚式悬索桥的结构特点,可以得到其 1 阶反对称与正对称竖弯振型,分别如图 1、图 2 所示<sup>[5]</sup>。

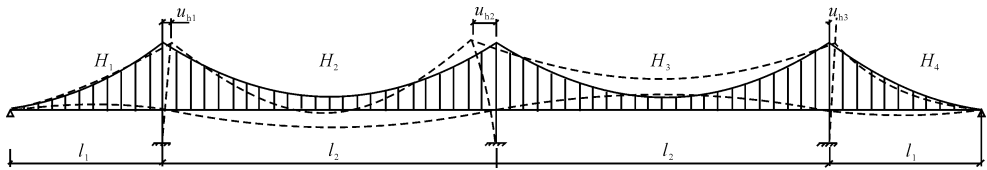


图 1 1 阶反对称竖弯振型

Fig. 1 Mode shape of 1st antisymmetric vertical vibration

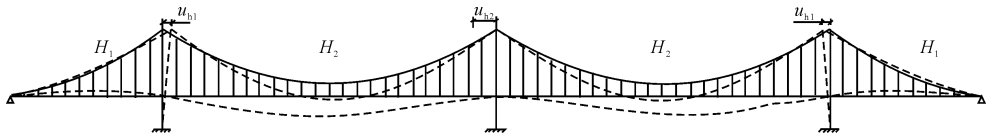


图 2 1 阶正对称竖弯振型

Fig. 2 Mode shape of 1st symmetric vertical vibration

根据上图可知,三塔自锚式悬索桥自由振动时,各跨间主缆水平变形量应等于两端主塔顶水平位移量之差。因此,得到各跨主缆变形协调方程为

$$-H_2 \frac{l_{s2}}{E_c A_c} + y_2 \int_0^{l_2} v_2 dx = u_{h1} + u_{h2} \quad (5)$$

$$-H_3 \frac{l_{s3}}{E_c A_c} + y_3 \int_0^{l_3} v_3 dx = -(u_{h2} + u_{h3}) \quad (6)$$

对于三塔自锚式悬索桥全桥而言,自由振动中各跨主缆水平变形量之和应与加劲梁水平变形量相协调。因此,可以得到全桥主梁变形协调方程为

$$-\sum_{i=1}^4 H_i \frac{l_{si}}{E_c A_c} + \sum_{i=1}^4 y_i \int_0^{l_i} v_i dx = H_1 \frac{L}{E_g A_g} \quad (7)$$

式中: $L$  为桥梁跨径。

3 1 阶反对称竖弯频率计算公式

根据三塔四跨自锚式悬索桥发生 1 阶反对称竖弯振动变形图(图 1),选取“均布荷载作用下简支跨梁的挠曲线”作为单跨主梁竖向变形的形状函数;选取“均布侧向力作用下悬臂柱变形曲线”作为主塔纵向变形的形状函数,分别为

$$v_i = A_i (x^4 - 2l_i x^3 + l_i^3 x) \sin(\omega t + \varphi) \quad (8)$$
$$x \in [0, l_i]$$

$$u_i = 3 \frac{u_{hi}}{h^3} \left( \frac{1}{2} h x^2 - \frac{1}{6} x^3 \right) \sin(\omega t + \varphi) \quad (9)$$
$$x \in [0, h_i]$$

竖向自由振动过程中,主塔两侧主缆水平不平衡力通过主塔弯曲变形来平衡,如图 3 所示。各个主塔两侧主缆拉力水平增量之差等于塔顶的弹性反

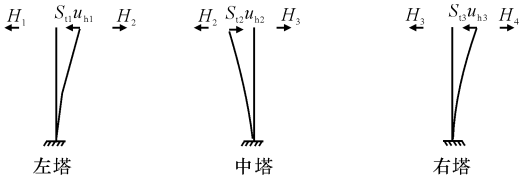


图 3 1 阶竖向反对称竖弯振动中各主塔受力图

Fig. 3 Tower force diagram of 1st antisymmetric vertical vibration

力,可以分别得到 3 个主塔受力平衡方程。由于主缆直接锚固于加劲梁两端,当自锚式悬索桥的加劲梁与主塔无纵向约束时,主梁两端受力平衡方程,可以得到  $H_1 = H_4$ 。

综上所述,把 3 个主塔受力平衡方程、3 个主塔变形协调方程写成矩阵形式,可以得到

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & S_{t1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -S_{t2} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & S_{t3} & 0 \\ 0 & \frac{l_{s2}}{E_c A_c} & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l_{s3}}{E_c A_c} & 0 & -1 & -1 \\ 2 \left( \frac{l_{s1}}{E_c A_c} + \frac{l_1 + l_2}{E_g A_g} \right) & \frac{l_{s2}}{E_c A_c} & \frac{l_{s2}}{E_c A_c} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ u_{h1} \\ u_{h2} \\ u_{h3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ y_2 \int_0^{l_2} v_2 dx \\ y_3 \int_0^{l_3} v_3 dx \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

根据式(10)可以求解得到6个未知数 $H_1$ 、 $H_2$ 、 $H_3$ 、 $u_{h1}$ 、 $u_{h2}$ 、 $u_{h3}$ ,代入式(2)~式(4),即可以求解得到1阶反对称竖弯频率 $\bar{f}_v^a$ 的计算公式,其中上标a表示反对称振型,下标v表示竖向振型。

$$\bar{f}_v^a = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\alpha E_c A_c + \gamma_0 E_g I_g}{m_g + m_c}} \quad (11)$$

式中: $\gamma_0$ 、 $\alpha$ 为与结构参数有关的系数,表达式为

$$\gamma_0 = 97.55 / (l_1^3 l_2 - l_1^2 l_2^2 + l_1 l_2^3) \quad (12)$$

$$\alpha = 50 f_2^2 / [(l_1^3 + l_2^3)(l_{s2} + 2E_c A_c / S_{t2} + E_c A_c / S_{t1})] \quad (13)$$

$\alpha$ 定义为反对称竖弯振型的主塔刚度影响系数。当主塔刚度 $S_t$ 较小时, $\alpha$ 趋近于0,此时式(11)即与文献[5]中式(13)、即忽略主塔刚度的反对称竖弯频率公式相一致。

## 4 1阶正对称竖弯频率计算公式

根据三塔自锚式悬索桥1阶正对称竖向振动变形图(图2)确定构件形状函数。对于边跨主梁,选取“均布荷载作用下简支梁挠曲线”为形状函数,见式(14);对于中跨主梁,选取“均布荷载作用下,一端简支一端固结的等截面梁挠曲线”为形状函数,见式(15);选取“均布侧向力作用下悬臂柱变形曲线”作为主塔纵向变形的形状函数,见式(16)。

$$v_i(x) = A_i x (x^3 - 2l_i x^2 + l_i^3) \sin(\omega t + \varphi) \quad x \in [0, l_i], i=1, 4 \quad (14)$$

$$v_i(x) = A_i x^2 \left( \frac{x^2}{3} - \frac{5l_i x}{6} + \frac{l_i^2}{2} \right) \sin(\omega t + \varphi) \quad x \in [0, l_i], i=2, 3 \quad (15)$$

$$u_i = 3 \frac{u_{hi}}{h_i^3} \left( \frac{h_i x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) \sin(\omega t + \varphi) \quad x \in [0, h_i], i=1, 2, 3 \quad (16)$$

对于各个主塔,主塔两侧主缆水平力增量与主塔变形相互平衡,如图4所示。可以得到边塔塔顶受力平衡方程。

$$B_1 = \frac{-[3f_2 - 4f_1(1 + (S_t/E_c A_c)l_{s2})][(l_{s1} + l_{s2}) + (E_c A_c/E_g A_g)(l_1 + l_2)]}{(3f_2 - 4f_1)[(l_{s1} + l_{s2} + (E_c A_c/E_g A_g)(l_1 + l_2)) + (S_t/E_c A_c)l_{s1}l_{s2} + (S_t/E_g A_g)(l_1 + l_2)l_{s2}]} \quad (24)$$

$$B_2 = \frac{-[3f_2(1 + (S_t l_{s1}/E_c A_c) + (l_1 + l_2/E_g A_g)S_t) - 4f_1][(l_{s1} + l_{s2}) + (E_c A_c/E_g A_g)(l_1 + l_2)]}{(3f_2 - 4f_1)[(l_{s1} + l_{s2} + (E_c A_c/E_g A_g)(l_1 + l_2)) + (S_t/E_c A_c)l_{s1}l_{s2} + (S_t/E_g A_g)(l_1 + l_2)l_{s2}]} \quad (25)$$

$$B_3 = \frac{-[3f_2(l_{s1} + (E_c A_c/E_g A_g)(l_1 + l_2)) + 4f_1 l_{s2}][(l_{s1} + l_{s2}) + (E_c A_c/E_g A_g)(l_1 + l_2)]}{(3f_2 - 4f_1)[(l_{s1} + l_{s2} + (E_c A_c/E_g A_g)(l_1 + l_2)) + (S_t/E_c A_c)l_{s1}l_{s2} + (S_t/E_g A_g)(l_1 + l_2)l_{s2}]} \quad (26)$$

## 5 算例验证

### 5.1 算例1:物理缩尺模型试验验证

本文以某三塔自锚式悬索桥物理缩尺模型为算例,其跨径为1.60 m+3.36 m+3.36 m+1.60 m=

$$H_1 + 3 \frac{E_{t1} I_{t1}}{h_{t1}^3} u_{h1} = H_2 \quad (17)$$

根据结构变形协调原理,可以得到边跨和中跨的变形协调方程,分别为

$$\frac{H_1}{E_c A_c} l_{s1} + y_1 \int_0^{l_1} (v_1 dx) = -\frac{H_1}{E_g A_g} \frac{L}{2} + u_{h1} \quad (18)$$

$$\frac{H_2}{E_c A_c} l_{s2} + y_2 \int_0^{l_2} v_2 dx = -u_{h1} \quad (19)$$

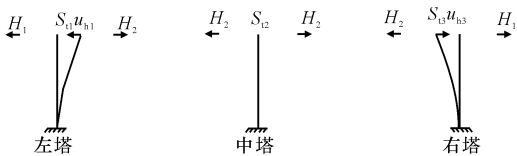


图4 1阶正对称竖弯振动中主塔受力图

Fig. 4 Towers force diagram in 1st symmetric vertical vibration

根据式(17)~式(19)可以联立求解 $H_1$ 、 $H_2$ 、 $u_{h1}$ 的表达式,代入式(2)~式(4),即可得到1阶正对称竖弯频率 $\bar{f}_v^s$ 的计算公式,其中上标s表示正对称振型,下标v表示竖向振型。

$$\bar{f}_v^s = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\beta \gamma_1 E_c A_c + \gamma_2 E_g I_g}{m_g + m_c}} \quad (20)$$

式中: $\gamma_1$ 、 $\gamma_2$ 为结构特性相关参数,表达式为

$$\gamma_1 = 2.016(3l_2^2 - 4l_1^2)^2 / [(15l_1^3 l_2^2 + 95l_2^4) \cdot (l_{s1} + l_{s2})] \quad (21)$$

$$\gamma_2 = 1.512(2l_2 + 3l_1) / (31l_1^4 l_2 + 19l_1 l_2^4) \quad (22)$$

$\beta$ 定义为正对称竖弯振型的主塔刚度影响系数,其表达式为

$$\beta = \frac{B_1^2 l_{s1} + B_1^2 (E_c A_c/E_g A_g)(l_1 + l_2) + B_2^2 l_{s2} + B_3^2 (S_t/E_c A_c)}{l_{s1} l_{s2} + (E_c A_c/E_g A_g)(l_1 + l_2)} \quad (23)$$

当主塔刚度 $S_t$ 较小时, $\beta$ 趋近于1。此时式(20)即与文献[5]中式(19)、即忽略主塔刚度影响的正对称竖弯频率计算公式相一致。

$B_1$ 、 $B_2$ 、 $B_3$ 为与桥塔刚度及结构参数相关的系数,计算公式为

9.92 m,具体参数见下页表1。

解:(1)方法1:物理缩尺模型模态识别结果

在结构各关键点布置加速度传感器,采用白噪声扫描法测定模型的动力特性,基于采集得到的关键节点加速度时程,采用随机子空间法进行模态识

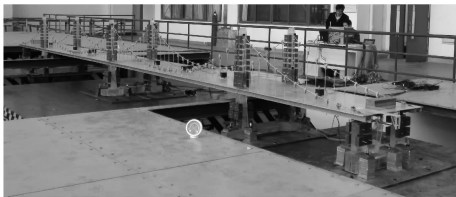


图 5 物理缩尺模型模态识别

Fig. 5 Modal identification of physical scale model

别,得到三塔自锚式悬索桥竖向振型及频率,如图 6 所示。

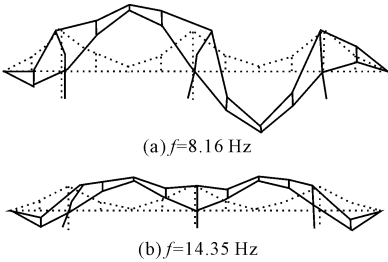


图 6 缩尺模型模态识别结果

Fig. 6 Modal identification results of physical scale model

表 1 缩尺模型结构参数

Tab. 1 Structure parameters of scale model

参数	数值	参数	数值	参数	数值
$f_1/\text{m}$	0.13	$h_t/\text{m}$	50.85	$E_c/(\text{kN}\cdot\text{m}^{-2})$	$1.95\times10^8$
$f_2/\text{m}$	0.56	$S_{t1}/(\text{kN}\cdot\text{m}^{-1})$	65.79	$E_g/(\text{kN}\cdot\text{m}^{-2})$	$7.53\times10^7$
$l_1/\text{m}$	1.60	$S_{t2}/(\text{kN}\cdot\text{m}^{-1})$	65.79	$E_t/(\text{kN}\cdot\text{m}^{-2})$	$2.69\times10^6$
$l_2/\text{m}$	3.36	$M_c/(\text{t}\cdot\text{m}^{-1})$	$8.36\times10^{-3}$	$A_c/\text{m}^2$	$1.96\times10^5$
$l_{s1}/\text{m}$	2.05	$M_g/(\text{t}\cdot\text{m}^{-1})$	$5.35\times10^{-2}$	$A_g/\text{m}^2$	$1.88\times10^3$
$l_{s2}/\text{m}$	4.15	$M/(\text{t}\cdot\text{m}^{-1})$	$6.20\times10^{-2}$	$I_g/\text{m}^4$	$7.35\times10^7$

(2)方法 2:本文简化公式计算

① 1 阶反对称竖弯频率  $\bar{f}_v^a$  计算

根据式(12)得  $\gamma_0=2.1414$

根据式(13)得  $\alpha=2.17\times10^{-3}$

根据式(11)得  $\bar{f}_v^a=7.954\text{ 3Hz}$

② 1 阶正对称竖弯频率计算

根据式(21)、式(22)得  $\gamma_1=0.025\text{ 3},\gamma_2=3.82$ ;

根据式(24)~式(26)得  $B_1、B_2、B_3$  分别为

$B_1=-0.945,B_2=-1.031,B_3=-4.99\text{ 3}$

根据式(23)得  $\beta=1.068$

根据式(20)得  $\bar{f}_v^s=13.995\text{ Hz}$

(3)计算结果比较

缩尺模型识别得到的结构竖向振动频率与本文

公式计算结果对比如表 2 所示。

表 2 缩尺模型竖弯频率对比

Tab. 2 Vertical frequencies comparison of scaled model

振型描述	实测结果/Hz	本文公式解/Hz	频率差/Hz	相差率/%
1 阶反对称竖弯	8.160 0	7.954 3	-0.205 7	-2.52
1 阶正对称竖弯	14.350 0	13.995 0	-0.355 0	-2.47

5.2 算例 2:实桥模型分析验证

以某三塔自锚式悬索桥为算例,其跨径为 80 m+168 m+168 m+80 m;主缆由 4 跨组成,主缆理论垂跨比为 1:6,边缆理论垂跨比为 1:12.88;主桥桥面宽 43 m;边塔及中塔采用相同的柔性主塔,承台以上塔高 48.9 m;全桥 2 根主缆;吊索间距 7 m。其他基本参数如表 3 所示。

表 3 实桥主要结构参数

Tab. 3 Structural parameters of real project

参数	数值	参数	数值	参数	数值
$f_1/\text{m}$	6.35	$h_t/\text{m}$	50.85	$E_c/(\text{kN}\cdot\text{m}^{-2})$	$1.95\times10^8$
$f_2/\text{m}$	28.00	$S_{t1}/(\text{kN}\cdot\text{m}^{-1})$	$4.33\times10^4$	$E_g/(\text{kN}\cdot\text{m}^{-2})$	$2.06\times10^8$
$l_1/\text{m}$	80.00	$S_{t2}/(\text{kN}\cdot\text{m}^{-1})$	$4.33\times10^4$	$E_t/(\text{kN}\cdot\text{m}^{-2})$	$3.45\times10^7$
$l_2/\text{m}$	168.00	$M_c/(\text{t}\cdot\text{m}^{-1})$	0.73	$A_c/\text{m}^2$	0.0474
$l_{s1}/\text{m}$	103.42	$M_g/(\text{t}\cdot\text{m}^{-1})$	33.40	$A_g/\text{m}^2$	1.50
$l_{s2}/\text{m}$	207.71	$M_t/(\text{t}\cdot\text{m}^{-1})$	42.10	$I_g/\text{m}^4$	1.69

(1)方法 1:有限元法求解

根据以上工程的结构参数,采用 SAP2000 建立

三维有限元模型。模型中主塔和主梁采用 Frame 单元;主缆及吊索采用 cable 单元。支座边界条件

采用节点耦合方式模拟。建立的三维有限元模型如图 7 所示。

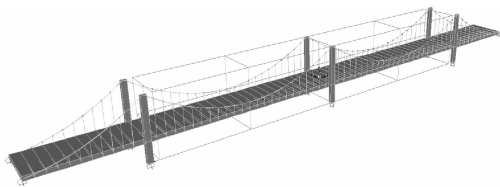


图 7 实桥的数值模型  
Fig. 7 Numerical model of real project

基于非线性恒载作用下的成桥状态,采用子空间迭代法进行结构的动力特性分析。得到结构 1 阶反对称和正对称竖向振型及频率(图 8)。

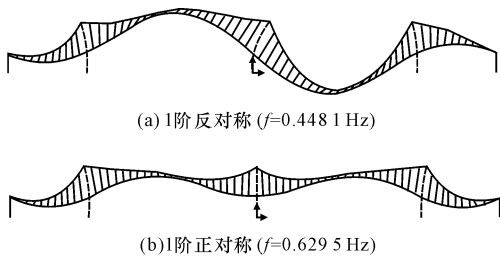


图 8 数值模型的模态分析结果

Fig. 8 Modal analysis result of numerical model

(2)方法 2:本文简化公式计算

① 1 阶反对称竖弯频率计算

根据式(12)得  $\gamma_0=3.43\times10^{-7}$

根据式(13)得  $\alpha=9.15\times10^{-6}$

根据式(11)得  $\bar{f}_v^a=0.4578\text{Hz}$

② 1 阶正对称竖弯频率计算

根据式(21)、式(22)得

$\gamma_1=1.05\times10^{-5},\gamma_2=6.12\times10^{-7}$

根据式(24)~式(26)得  $B_1、B_2、B_3$  分别为

$B_1=-0.47,B_2=-1.326,B_3=-191.81$

根据式(23)得  $\beta=1.715$

根据式(20)得  $\bar{f}_v^s=0.6298\text{Hz}$

(3)计算结果比较(表 4)

表 4 实桥算例竖弯基频对比

Tab. 4 Fundamental frequencies comparison of vertical vibrations

振型描述	有限元解/Hz	本公式解/Hz	频率差/Hz	相差率/%
1 阶反对称竖弯振动	0.448 1	0.457 8	0.009 7	2.16
1 阶正对称竖弯振动	0.629 5	0.629 8	0.000 3	0.05

以上 2 个算例的比较结果可以看出,本文推导的竖弯基频计算公式与有限元法或试验识别结构吻合较好,误差大小均在工程允许范围之内。因此,本文推导的公式可以适用于的三塔自锚式悬索桥竖弯

基频的估算。

## 6 结 语

(1)主塔刚度对于三塔自锚式悬索桥竖弯刚度的影响较大,进行频率计算时不可忽略,影响程度可以通过本文给出的主塔刚度影响系数计算公式进行计算。

(2)本文公式计算结果与模态识别结果和数值分析结果的误差率均在 3% 以内,表明本文公式具有较高的计算精度。因此,本文频率公式考虑了桥塔刚度的影响,具有较好的计算精度,可适用于三塔自锚式悬索桥竖弯频率计算,此方法可推广至多塔自锚式悬索桥的频率计算。

(3)本文竖弯频率计算公式仅适用于塔-梁分离的三塔自锚式悬索桥。对于采用塔梁固结方式的三塔自锚式悬索桥,其竖弯频率计算公式还需进行专门研究。

## 参考文献:

### References:

[ 1 ] Ren W X, Blandford G E, Harik I E. Roebling suspension bridge. I: Finite-element model and free vibration response[J]. Journal of Bridge Engineering, 2004, 9 (2): 110-118.

[ 2 ] 韩大建, 苏 成, 王乐文, 等. 香港汀九大桥动力特性研究[J]. 华南理工大学学报: 自然科学版, 1999, 27 (11): 29-35.

HAN Da-jian, SU Cheng, WANG Le-wen, et al. A study on the dynamic behavior of the Hong Kong Ting Kau Bridge[J]. Journal of South China University of Technology: Natural Science Edition, 1999, 27 (11): 29-35. (in Chinese)

[ 3 ] 刘春华, 秦 权. 悬索桥振动特性对结构参数的灵敏度[J]. 清华大学学报: 自然科学版, 1998, 38 (12): 48-51.

LIU Chun-hua, QIN Quan. Sensitivities of natural modes of suspension bridges to structural parameters [J]. Journal of Tsinghua University: Science and Technology, 1998, 38 (12): 48-51. (in Chinese)

[ 4 ] 张运波, 陈 伟, 林玉森. 影响大跨度悬索桥自振特性的参数分析[J]. 华东公路, 2002 (6): 3-6.

ZHANG Yun-bo, CHEN Wei, LIN Yu-sen. Parameter analysis on natural frequency of long span suspension bridge[J]. East China Highway, 2002 (6): 3-6. (in Chinese)

[ 5 ] 刘春华, 秦 权. 桥梁结构固有频率的统计特征[J].

- 中国公路学报,1997,10(4):49-54.
- LIU Chun-hua, QIN Quan. Statistics of natural frequencies for bridge structures[J]. China Journal of Highway and Transport,1997,10(4):49-54. (in Chinese)
- [6] Liu X G, Fan J S, Nie J G, et al. Behavior of composite rigid frame bridge under bi-directional seismic excitations[J]. Journal of Traffic and Transportation Engineering; English Edition, 2014, 1(1): 62-71.
- [7] 肖汝诚. 吊桥结构自振频率的计算方法[J]. 华东公路, 1991(1): 54-58.
- XIAO Ru-cheng. Method to calculate natural vibration frequency of suspension bridges[J]. East Road, 1991(1): 54-58. (in Chinese)
- [8] 鞠小华, 廖海黎, 沈锐利. 对悬索桥对称竖弯基频近似公式的修正[J]. 土木工程学报, 2002, 35(1): 44-49.
- JU Xiao-hua, LIAO Hai-li, SHEN Rui-li. Modification on simplified formula of symmetric vertical natural frequencies for suspension bridges[J]. China Civil Engineering Journal, 2002, 35(1): 44-49. (in Chinese)
- [9] Yoshida O, Okuda M, Moriya T. Structural characteristics and applicability of four-span suspension bridge [J]. Journal of Bridge Engineering, 2004, 9(5): 454-463.
- [10] 周 敕, 王君杰, 袁万城. 自锚式悬索桥地震反应有限元分析[J]. 长安大学学报: 自然科学版, 2008, 28(1): 66-71.
- ZHOU Mi, WANG Jun-jie, YUAN Wan-cheng. Seismic response analysis and simulation of self-anchored suspension bridge based on ANSYS[J]. Journal of Chang'an University; Natural Science Edition, 2008, 28(1): 66-71. (in Chinese)
- [11] 梁 鹏, 吴向男, 李万恒, 等. 三塔悬索桥汽车效应几何非线性[J]. 长安大学学报: 自然科学版, 2011, 31(4): 45-49.
- LIANG Peng, WU Xiang-nan, LI Wan-heng, et al. Geometrical nonlinearity under live load for three-tower suspension bridges[J]. Journal of Chang'an University; Natural Science Edition, 2011, 31(4): 45-49. (in Chinese)
- [12] 刘 斌. 三塔悬索桥振动特性的研究[D]. 成都: 西南交通大学, 2009.
- LIU Bin. Vibration characteristics research on three-tower suspension bridge[D]. Chengdu: Southwest Jiaotong University, 2009. (in Chinese)
- [13] 张 超. 多塔自锚式悬索桥竖弯基频简化计算[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2013, 37(4): 753-757.
- ZHANG Chao. Simplified calculation of primary vertical frequencies for multi-tower self-anchored suspension bridge[J]. Journal of Wuhan University of Technology: Transportation Science and Engineering, 2013, 37(4): 753-757. (in Chinese)
- [14] 邓育林, 彭天波, 李建中. 大跨多塔悬索桥纵向地震碰撞反应参数研究[J]. 振动与冲击, 2011, 30(4): 205-210.
- DENG Yu-lin, PENG Tian-bo, LI Jian-zhong. Parametric study on longitudinal seismic pounding response for a long-span multi-tower suspension bridge [J]. Journal of Vibration and Shock, 2011, 30(4): 205-210. (in Chinese)
- [15] 张 超. 三塔自锚式悬索桥动力特性及地震响应研究[D]. 福州: 福州大学, 2011.
- ZHANG Chao. Study on dynamic characteristics and seismic response of self-anchored suspension bridge with three-tower [D]. Fuzhou: Fuzhou University, 2011. (in Chinese)
- [16] 李国豪. 桥梁结构稳定与振动[M]. 北京: 中国铁道出版社, 1992.
- LI Guo-hao. Stability and vibration of bridge structure [M]. Beijing: China Railway Publishing House, 1992. (in Chinese)