

基于 Udwadia 和 Kalaba 方程的 机械臂轨迹跟踪控制

张新荣¹, CHEN Yehwa², 平昭琪¹

(1. 长安大学 道路施工技术与装备教育部重点实验室, 陕西 西安 710064;

2. 佐治亚理工大学 机械工程学院, 佐治亚洲 亚特兰大 30332-04)

摘 要:针对机械臂轨迹跟踪控制问题,提出了一种新的控制方法。该方法建立在 Udwadia 和 Kalaba 方程的基础上,可以在不引入拉格朗日乘数等额外参数的情况下对约束系统的约束力进行求解。与传统方法不同,这里将机械系统的运动要求作为一种约束来看待,这种约束称为轨迹跟踪约束,为了满足该约束要求需要对系统施加一定的伺服约束力;利用 Udwadia 和 Kalaba 方程给出了伺服约束力的求解方法。在这种伺服约束概念的基础上,通过理论分析,提出了伺服约束下机械臂跟踪控制方法,并通过建立平面二自由度机械手臂动力学模型,给出了控制结构,并在假设机械手臂轨迹运动要求的基础上,通过 Matlab 语言仿真计算出需要的控制,并给出了仿真结果。仿真试验结果表明:在约束初始条件相容的情况下,利用该方法可以实时计算出机械臂操纵系统所需要的控制力矩,机械臂在该控制作用下各构件运动结果符合要求,机械臂末端轨迹很好地跟踪了系统要求的曲线,并具有较高的跟踪控制精度。

关键词:机械工程;Udwadia 和 Kalaba 方程;伺服约束;机械手臂;跟踪;控制

中图分类号:TH113

文献标志码:A

Mechanical manipulator tracking control based on Udwadia and Kalaba equation

ZHANG Xin-rong¹, CHEN Yehwa², PING Zhao-qi¹

(1. Key Laboratory of Road Construction Technology and Equipment of the Ministry of Education,

Chang'an University, Xi'an 710064, Shaanxi, China; 2. School of Mechanical Engineering,

Georgia Institute of Technology, Atlanta 30332-04, Georgia, USA)

Abstract: A new approach to the tracking control of mechanical manipulator was proposed based on the Udwadia and Kalaba equation, by which we could obtain the constraints without using Lagrange multiplier or other auxiliary variables. Different from other existing approaches, the desired performance and desired trajectory were treated as constraints. The problem was then to design a control which could render the system to follow the constraints. Based on the Udwadia and Kalaba equation, the closed-form expression of the servo constraint was proposed. Based on the idea of servo constraint control, the servo constraint control of mechanical manipulator was presented through theoretical analysis. The goal was to render the mechanical system to follow the

constraints after establishing the dynamic model of the system. The simulation research was conducted using Matlab. The results show that the servo constraint control can be obtained using this method, the results of manipulator components' movement meet the requirements and the tracking trajectory of manipulator is perfect and exact. 1 tab, 6 figs, 15 refs.

Key words: mechanical engineering; Udwadia and Kalaba equation; servo constraint; mechanical manipulator; tracking; control

0 引言

对于具有相互约束的复杂机械系统进行动力学建模方法的研究是分析动力学领域的核心内容之一。自从拉格朗日(Lagrange)建立分析力学以来,经过 200 多年的研究,围绕这一问题,许多数学家和物理学家都作出了重要贡献。例如,先后提出了 Maggi 方程、Boltzmann 和 Hamel 方程、Gibbs 和 Appell 方程、Udwadia 和 Kalaba 方程等。在大多数的研究成果中,其本质都是基于达朗贝尔(d'Alembert)原理与虚位移原理,也就是说,这些方程从某种程度上说都是等价的。对于约束机械系统,利用拉格朗日乘子可以有效地进行约束力的计算,但在实际应用中,该方法的应用并不是一件容易的事情,特别是针对多自由度复杂系统使用该方法更为困难。美国南加州大学 Udwadia 等在该领域进行了长期研究,并取得了许多研究成果,提出了 Udwadia 和 Kalaba 方程^[1-4]。该方法可以相对简单地建立完整约束和非完整约束下系统的运动方程,并利用该方程,可以在不出现拉格朗日乘子的条件下,得出约束力的解析求法,成为分析动力学领域的一个重要突破^[5]。

针对这种机械系统的动力学逆问题,基于 Udwadia 和 Kalaba 方程的伺服约束控制研究是目前比较前沿的几个研究方向之一。利用 Udwadia 等的研究成果,Chen 较系统地提出了机械系统伺服约束控制的概念,利用伺服控制来实现约束力的设计问题^[6-8]。2008 年 Chen 在 Maggi 方程的基础上对伺服约束问题进行了研究,认为在经过合理设计后,可以通过伺服控制来实现可以满足需要的约束力^[9]。Bajodah 等对 Udwadia 和 Kalaba 方程在伺服控制中的一些数学运算问题进行了研究,其研究成果对该方程的实际应用提供了一些理论基础^[10]。利用该方程,对不确定系统的自适应鲁棒控制,Chen 也进行了深入研究^[11-13]。Schutte 在 Udwadia 和 Kalaba 方程的基础上,针对完整约束和非完整约束下非线性机械系统的控制问题进行了研究,提出

了一种状态反馈控制器并进行了理论分析与仿真研究^[14]。Udwadia 对于非线性机械系统的轨迹跟踪控制首先应用了伺服约束控制的方法,并在此领域也做了初步研究^[15]。与传统的非线性机械系统控制相比,Udwadia 所设计的方法可以在不增加运算量的基础上,完成机械系统的精确轨迹控制。

对于典型的机械臂这种模型不确定复杂系统的建模与控制问题也有许多研究成果,比如可以采用 PID、改进的 PID、自适应控制、模糊控制、神经网络、鲁棒控制或者综合运用这些控制方式等,而本文所提出的控制方法与这些常规的方法具有本质的区别。本文主要通过 Udwadia 和 Kalaba 方程分析求解约束力,用伺服控制的方式来实现机械手臂系统的轨迹跟踪控制,并通过仿真试验来分析控制效果。相比之下,该方法在理论上可以充实经典的控制理论,从一个新的角度来解决约束控制问题;另一方面可以解决一些非线性机械系统的控制问题。在将轨迹要求作为约束的基础上,该方法可以应用于如工程机械工作装置运动控制、自动化生产线、物流运输等许多需要轨迹跟踪的控制上,具有较好的应用前景。

1 机械约束系统的动力学模型

对于无约束机械系统,其运动方程可表示为

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}, t) \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \quad (1)$$

式中: \mathbf{q} 为描述系统的 n 维广义坐标, $\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$; \mathbf{M} 为 $n \times n$ 维对称正定矩阵; \mathbf{Q} 为广义主动力矩阵; t 为独立变量时间。

则 $\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{Q}$ 为无约束机械系统的广义加速度表达式,令 $\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{a}$ 。

给该系统施加 m 个约束为

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{b}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \quad (2)$$

式中: $\mathbf{A}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \ddot{\mathbf{q}}$ 为 $m \times n$ 维矩阵; $\mathbf{b}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \ddot{\mathbf{q}}$ 为 m 维列阵。

式(2)实际上包括了各种常见的约束:完整约束、非完整约束、定常约束、非定常约束等。由于该组约束的存在,系统除了要受到主动力的作用外,还要受到约束力的作用,系统在它们共同作用下,其运

动将发生变化。也就是说由于该组约束的存在,使得系统的运动方程变为

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}, t) \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \mathbf{Q}_c(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \quad (3)$$

式中: \mathbf{Q}_c 为 n 维约束力阵。

2 约束力的求解

设在 m 组约束式(2)的作用下,有一 n 维向量 \mathbf{v} 为某瞬时的虚位移,则

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (4)$$

令 $\mathbf{v} = \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{u}$, $\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}}$, 则有

$$\mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (5)$$

式中: \mathbf{u} 为一 n 维非零向量; \mathbf{B} 为约束矩阵。

令 $\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \ddot{\mathbf{r}}$, $\ddot{\mathbf{r}}$ 为 n 维列阵, 由式(2)可得

$$\mathbf{B}\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{b} \quad (6)$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{B}^+ \mathbf{b} + (\mathbf{I} - \mathbf{B}^+ \mathbf{B}) \mathbf{y} \quad (7)$$

式中: 上标“+”代表 Moor-Penrose 广义逆; \mathbf{y} 为任意 n 维向量; \mathbf{I} 为单位阵。

因为约束力在虚位移上所作的功之和为 0, 则

$$\mathbf{v}^T \mathbf{Q}_c = \mathbf{v}^T [\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{Q}] = 0 \quad (8)$$

根据前面的定义, 有

$$\mathbf{u}^T \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{Q}_c = \mathbf{u}^T \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{M}^{\frac{1}{2}} \ddot{\mathbf{r}} - \mathbf{Q}) =$$

$$\mathbf{u}^T (\ddot{\mathbf{r}} - \mathbf{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{Q}) = 0 \quad (9)$$

$$\mathbf{u}^T [\mathbf{B}^+ \mathbf{b} + (\mathbf{I} - \mathbf{B}^+ \mathbf{B}) \mathbf{y} - \mathbf{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{Q}] = 0 \quad (10)$$

因为 $\mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{0}$, $\mathbf{u}^T \mathbf{B}^T = \mathbf{0}$, 根据 Moor-Penrose 广义逆的性质可知, $\mathbf{u}^T \mathbf{B}^+ = \mathbf{0}$, 式(10)可变为

$$\mathbf{u}^T (\mathbf{y} - \mathbf{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{Q}) = 0 \quad (11)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (12)$$

代入式(7)为

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{B}^+ \mathbf{b} + (\mathbf{I} - \mathbf{B}^+ \mathbf{B}) \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{Q} \quad (13)$$

因为 $\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \ddot{\mathbf{r}}$, 则

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{q}} &= \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{B}^+ \mathbf{b} + \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{I} - \mathbf{B}^+ \mathbf{B}) \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{Q} = \\ &= \mathbf{M}^{-1} \mathbf{Q} + \mathbf{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{B}^+ \mathbf{b} - \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{B}^+ \mathbf{B} \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{Q} = \\ &= \mathbf{M}^{-1} \mathbf{Q} + \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{B}^+ (\mathbf{b} - \mathbf{B} \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{Q}) \end{aligned}$$

上式两端同乘以 \mathbf{M} , 并将 $\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}}$ 代入得

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q} + \mathbf{M}^{\frac{1}{2}} (\mathbf{A}\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}})^+ (\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{M}^{-1} \mathbf{Q}) \quad (14)$$

式(14)称为 Udwadia 和 Kalaba 动力学方程。

于是约束系统所受约束力可表示为

$$\mathbf{D}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} (\frac{1}{3}m_1 + m_2 + m_3 + m_4)l_1^2 + (\frac{1}{3}m_2 + m_4)l_2^2 + (m_2 + 2m_4)l_1l_2c_2 & (\frac{1}{3}m_2 + m_4)l_2^2 + \frac{1}{2}(m_2 + 2m_4)l_1l_2c_2 \\ (\frac{1}{3}m_2 + m_4)l_2^2 + \frac{1}{2}(m_2 + 2m_4)l_1l_2c_2 & (\frac{1}{3}m_2 + m_4)l_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_c = \mathbf{M}^{\frac{1}{2}} (\mathbf{A}\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}})^+ (\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{M}^{-1} \mathbf{Q}) \quad (15)$$

显然, 该约束力表达式中并没有出现拉格朗日常数等额外参数。

3 机械臂模型的建立

图 1 所示为一平面二自由度机械手臂。连杆 1 和连杆 2 相对关节的变量分别为转角 θ_1 和 θ_2 、长度分别为 l_1 和 l_2 , 相应关节 1 与关节 2 的力矩分别为 τ_1 和 τ_2 。假设连杆为均质杆, 质量分别为 m_1 和 m_2 , 关节 2 处的电机质量为 m_3 , 夹取物件的质量为 m_4 。

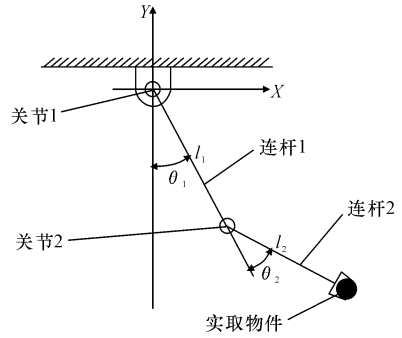


图 1 机械手臂模型

Fig. 1 Model of manipulator

系统动能为

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} (\frac{1}{3}m_1 + m_2 + m_3 + m_4) l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \\ &+ \frac{1}{2} (\frac{1}{3}m_2 + m_4) l_2^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + \\ &+ \frac{1}{2} (m_2 + 2m_4) l_1 l_2 c_2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) \end{aligned}$$

系统势能为

$$\begin{aligned} V &= -(\frac{1}{2}m_1 + m_2 + m_3 + m_4) g l_1 c_1 - \\ &+ (\frac{1}{2}m_1 + m_4) g (l_2 c_{12}) \end{aligned}$$

根据拉格朗日方程可以推导出该系统的动力学方程为

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{D}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{G}(\mathbf{q}) \quad (16)$$

式中:

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}, \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}, \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}, \ddot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} -(\frac{1}{2}m_2 + m_4)l_1l_2s_2\dot{\theta}_2^2 - (m_2 + 2m_4)l_1l_2s_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \\ (\frac{1}{2}m_2 + m_4)l_1l_2s_2\dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{G}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} (\frac{1}{2}m_1 + m_2 + m_3 + m_4)gl_1s_1 + (\frac{1}{2}m_2 + m_4)gl_2s_{12} \\ (\frac{1}{2}m_2 + m_4)gl_2s_{12} \end{bmatrix}$$

式中: $\mathbf{D}(\mathbf{q})$ 为惯性矩阵, 是一正定对称阵; $\mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ 为离心力和哥氏力矢量; $\mathbf{G}(\mathbf{q})$ 为重力矢量; $s_1 = \sin(\theta_1)$, $s_2 = \sin(\theta_2)$, $c_1 = \cos(\theta_1)$, $c_2 = \cos(\theta_2)$, $s_{12} = \sin(\theta_1 + \theta_2)$; $c_{12} = \cos(\theta_1 + \theta_2)$; g 为重力加速度。

该机械臂系统在广义坐标下的无约束方程可以写为

$$\mathbf{D}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} = -\mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{G}(\mathbf{q}) \tag{17}$$

由于系统动力学方程为

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}, t)\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \mathbf{Q}_c(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \tag{18}$$

式中: $\mathbf{M}(\mathbf{q}, t) = \mathbf{D}(\mathbf{q})$; $\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = -\mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{G}(\mathbf{q})$

由式(15)得

$$\mathbf{Q}_c = \mathbf{M}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{A}\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}})^+ (\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{Q}) \tag{19}$$

在式(19)约束力的作用下, 无约束系统式(17)在约束式(2)下满足动力学方程式(18)。

4 机械手臂轨迹跟踪控制

如果给定机械手臂一组约束条件, 可以利用以上的理论计算需要的关节电机转矩, 从而达到控制目标。此时的电机转矩称为伺服约束力矩。

假如现在由于某些性能要求, 需要系统满足如下约束条件, 该约束称为轨迹跟踪约束, 则

$$\begin{cases} \theta_1 + \theta_2 = 0 \\ \theta_1 = 1.5\sin(\frac{\pi}{6}t) \end{cases} \tag{20}$$

上式对时间求二阶导数, 可得到二阶约束形式为

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 = 0 \\ \ddot{\theta}_1 = -\frac{\pi^2}{24}\sin(\frac{\pi}{6}t) \end{cases} \tag{21}$$

于是系统所要求的约束可按前面的规定写为

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{b}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\pi^2}{24}\sin(\frac{\pi}{6}t) \end{bmatrix}, \quad \ddot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

为了满足机械手臂的运动要求, 需要加在关节的电机的转矩根据式(19)为

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{M}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{A}\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}})^+ (\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{Q}) \tag{22}$$

5 仿真试验及结果分析

5.1 仿真条件

为了完成对机械手臂的伺服控制, 利用 Matlab 软件进行仿真试验。

软件中采用龙格库塔法完成常微分方程组的求解。仿真中对初始条件的设定要符合实际运动状态, 如果初始条件不相容, 仿真结果将是发散的。仿真参数见表 1。

表 1 仿真参数
Tab. 1 Parameters for simulation

仿真参数	数值
连杆 1 长度 l_1/m	1
连杆 2 长度 l_2/m	1
连杆 1 质量 m_1/kg	1
连杆 2 质量 m_2/kg	1
电机质量 m_3/kg	1
夹取物件质量 m_4/kg	1

5.2 仿真结果及分析

图 2 所示为加在关节 1 上的电机转矩, 图 3 所示为加在关节 2 上的电机转矩。下页图 4 和图 5 为在控制作用下 θ_1 和 θ_2 的变化曲线, 而下页图 6 为 $(\theta_1 + \theta_2)$ 的变化。

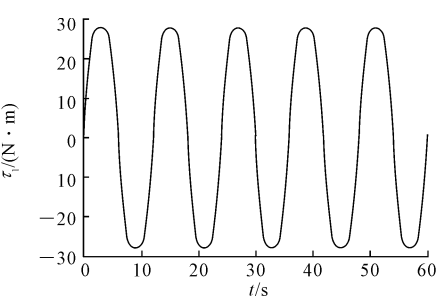


图 2 电机 1 控制转矩

Fig. 2 Control torque of motor in joint 1

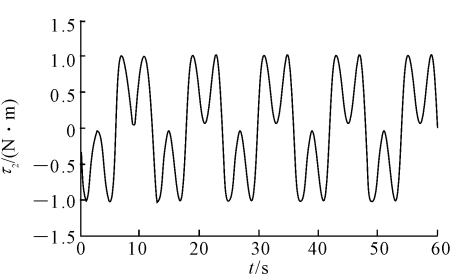


图 3 电机 2 控制转矩

Fig. 3 Control torque of motor in joint 2

从图 4~图 6 可以看出, 系统在伺服约束力矩控制作用下达到了所要求的轨迹跟踪约束。

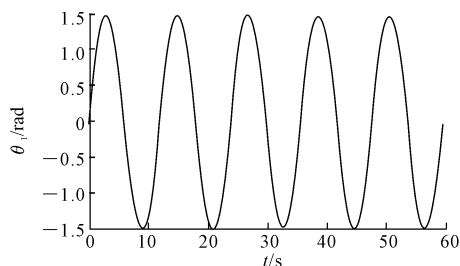


图 4 连杆 1 角位移变化曲线

Fig. 4 Angular displacement of link 1

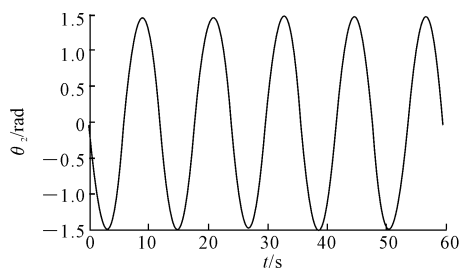


图 5 连杆 2 角位移变化曲线

Fig. 5 Angular displacement of link 2

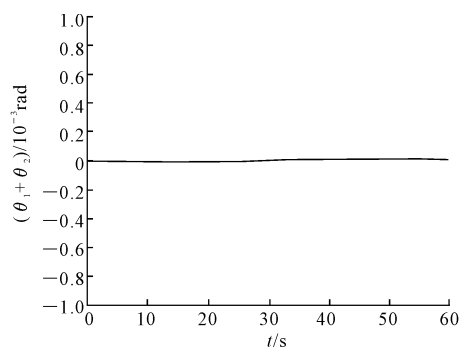


图 6 连杆 1 与连杆 2 角位移之和变化曲线

Fig. 6 Sum of angular displacements of link 1 and link 2

6 结 语

(1)通过理论分析与仿真结果可以看出,基于 Udwadia 和 Kalaba 方程的伺服约束控制可以完成机械臂的轨迹跟踪控制任务。在实际应用中可以使用伺服控制器来完成计算任务。

(2)在伺服约束控制中,由于计算量较大,所以对伺服控制器的性能要求比较高。

(3)在使用伺服约束控制方式时,对初始条件的设置至关重要,要求初始条件与实际运动状态具有相容性,否则计算结果会发散。

(4)由于该方法中的伺服控制是计算出来的,势必存在数字误差,该误差在实际应用中会对控制效果产生影响。

(5)对于初始条件不相容问题及数值误差积累问题的解决及与常规控制方法的比较分析是下一步解决的主要问题。

参考文献:

References:

- [1] Udwadia F E, Kalaba R E. On motion[J]. Journal of the Franklin Institute, 1993, 330(3): 571-577.
- [2] Udwadia F E, Kalaba R E. A new perspective on constrained motion[J]. Mathematical and Physical Sciences, 1992, 439(9): 407-410.
- [3] Udwadia F E, Kalaba R E. Nonideal constraints and Lagrangian dynamics[J]. Journal of Aerospace Engineering, 2000, 13(1): 17-22.
- [4] Udwadia F E, Kalaba R E. On the foundations of analytical dynamics[J]. International Journal of Non-linear Mechanics, 2002, 37(16): 1079-1090.
- [5] Udwadia F E, Kalaba R E. Analytical dynamics: a new approach[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.
- [6] Chen Y H. Equations of motion of mechanical systems: given force depends on constraint force[J]. Mechatronics, 1999, 9(4): 411-428.
- [7] Chen Y H. Second order constraints for equations of motion of constrained systems[J]. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, 1998, 8(3): 240-248.
- [8] Chen Y H. Mechanical systems under servo constraints: the Lagrange's approach[J]. Mechatronics, 2005, 15(3): 317-337.
- [9] Chen Y H. Equations of motion of mechanical systems under servo constraints: the Maggi approach[J]. Mechatronics, 2008, 18(4): 208-217.
- [10] Bajodah A H, Hodges D H, Chen Y H. Inverse dynamics of servo-constraints based on the generalized inverse[J]. Nonlinear Dynamics, 2005, 39(112): 179-196.
- [11] Chen Y H. Approximate constraint-following of mechanical systems under uncertainty[J]. Nonlinear Dynamics and Systems Theory, 2008, 8(4): 329-337.
- [12] Chen Y H. Constraint-following servo control design for mechanical systems[J]. Journal of Vibration and Control, 2009, 15(3): 369-389.
- [13] Chen Y H, Zhang X R. Adaptive robust approximate constraint-following control for mechanical systems[J]. Journal of the Franklin Institute, 2010, 347(1): 69-86.
- [14] Schutte A D. Permissible control of general constrained mechanical systems[J]. Journal of the Franklin Institute, 2010, 347(1): 208-227.
- [15] Udwadia F E. A new perspective on the tracking control of nonlinear structural and mechanical systems[J]. Proceedings of the Royal Society of London, Series A, 2003, 459(2035): 1783-1800.