

文章编号:1671-8879(2013)06-0074-05

基于双剪统一强度理论的球壳弹塑性性能

赵均海,朱 倩,张常光,李 艳

(长安大学 建筑工程学院,陕西 西安 710061)

摘 要:为研究内压作用下球壳的弹塑性承载特性,以双剪统一强度理论为基础,考虑中间主应力及材料拉压异性的影响,分析了内压作用下球壳的弹性阶段、弹塑性阶段及塑性阶段,建立了适用于不同材料的极限内压统一解,探讨了半径比、拉压比对统一解的影响特性。研究表明:此方法使球壳的理论计算得到统一;弹、塑性极限内压均随半径比增加而增大,随拉压比增加而减小,材料的拉压强度差异对球壳的极限内压影响明显;通过算例验证了解析解的正确性,说明双剪统一强度理论可以得出更符合材料性质的极限载荷。该推导结果具有通用性,为球壳的设计及工程应用提供了一定的参考。

关键词:结构工程;双剪统一强度理论;球壳;拉压比;极限内压

中图分类号:O346

文献标志码:A

Elasto-plastic research of spherical shell based on twin shear unified strength theory

ZHAO Jun-hai, ZHU Qian, ZHANG Chang-guang, LI Yan

(School of Civil Engineering, Chang'an University, Xi'an 710061, Shaanxi, China)

Abstract: Elasto-plastic bearing features of spherical shell under internal pressure were studied based on twin shear unified strength theory. With consideration of the intermediate principal stress and different strengths in tension and compression, the elastic stage, elasto-plastic stage and plastic stage of spherical shell under internal pressure were analyzed. The limit internal pressure unified solution for different materials was derived. The influence of the radius ratio and tension-compression ratio on the solution was investigated respectively. The results show that this method is unified in theoretical analysis of spherical shell. The elasto-plastic limit internal pressure will increase with the increase of radius ratio but decreases with the increase of tension-compression ratio. The effect of the differences in tension and compression on the limit internal pressure is significant. The results by the suggested formulas are in good agreement with the literature data. The limit load which is in line with material properties can be obtained using unified twin shear strength theory. The solution deduced in this paper is universal, which can provide reference for the optimum design and practical construction. 1 tabs, 6 figs, 18 refs.

Key words: structure engineering; twin shear unified strength theory; spherical shell; tension-compression ratio; limit internal pressure

收稿日期:2013-01-09

基金项目:国家自然科学基金项目(41202191);教育部高等学校博士学科点专项科研基金项目(20110205130001);

陕西省自然科学基金项目(2011JM7002)

作者简介:赵均海(1960-),男,陕西蓝田人,教授,博士研究生导师,E-mail:zhaojh@chd.edu.cn。

0 引言

在工程实践中,圆筒和球壳具有非常广泛的应用^[1-6],如压力容器、高压管道等,其具有 S-D 效应的拉压性能不同的强度分析在国内外文献中已得到关注^[7-9]。球壳是工业中常见的压力容器,其弹塑性分析是球壳设计方法的基础。球壳常用的金属材料有高强钢、铸铁、铝合金等,以往的工程计算中一般认为它们是拉压同性的,仅根据拉压强度相同的屈服准则(Mises、Tresca)进行极限荷载分析^[10-13],忽略中间主应力的影响,计算结果误差较大,这样的结论不能真实反应材料的强度状态。为此,本文采用双剪统一强度理论,对拉压性能不同材料的球壳弹塑性极限荷载进行分析,考虑了拉压强度不同以及中间主应力 σ_2 的影响,可以更好地适用于球壳的弹塑性极限分析。通过与文献试验结果的对比^[14-16],验证了理论公式的正确性,为不同材料压力容器的工程设计提供了参考依据。

1 双剪统一强度理论

1991 年俞茂宏在双剪强度理论的基础上,考虑作用于双剪单元体上的 2 个较大剪切应力及其面上的正应力,建立了一种全新的考虑中间主应力 σ_2 影响的适用于各种不同材料的双剪统一强度理论,其数学表达式为^[17]

$$\begin{cases} F = \sigma_1 - \frac{\alpha}{1+b}(b\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_t & \sigma_2 \leq \frac{\sigma_1 + \alpha\sigma_3}{1+\alpha} \\ F' = \frac{1}{1+b}(\sigma_1 + b\sigma_2) - \alpha\sigma_3 = \sigma_c & \sigma_2 \geq \frac{\sigma_1 + \alpha\sigma_3}{1+\alpha} \end{cases} \quad (1)$$

式中: $\alpha = \frac{\sigma_t}{\sigma_c}$, α 为材料的拉压比,对于韧性金属材料一般为 0.77~1.00,岩土类材料一般小于 0.5; σ_1 、 σ_2 、 σ_3 分别为 3 个主应力; σ_t 、 σ_c 、 τ_s 分别为材料的拉伸、压缩、剪切屈服极限; $b = \frac{(1+\alpha)\tau_s - \sigma_t}{\sigma_t - \tau_s}$, b 为反映中间主切应力以及相应面上的正应力对材料破坏影响程度的参数, $0 \leq b \leq 1$ 。

2 球壳的弹塑性极限分析

设有一理想弹塑性材料制成的球壳,内半径为 r_i ,外半径为 r_o ,受均匀内压 p 作用(图 1),拉伸屈服强度为 σ_t ,压缩屈服强度为 σ_c ,材料的拉压强度比为 α 。球壳的应力状态为径向受压,切向受拉。

设 σ_r 表示径向应力, σ_θ 表示环向应力。随着 p 的增加,球壳经历了弹性与弹塑性状态,最终进入塑性极限状态(图 2)。

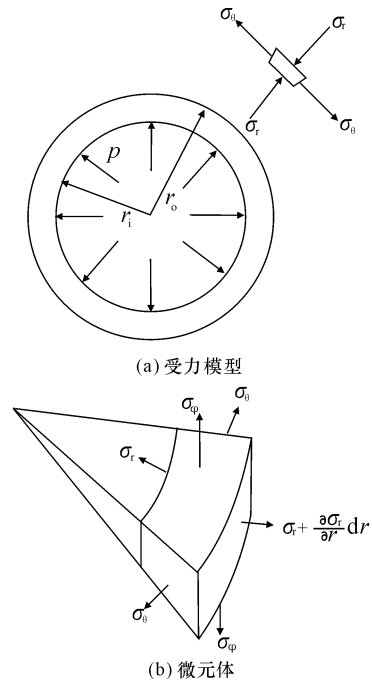


图 1 受内压球壳

Fig. 1 Spherical shell under internal pressure

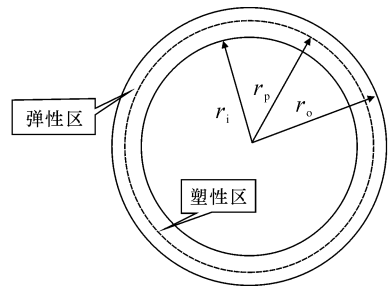


图 2 球壳弹塑性分界

Fig. 2 Elasto-plastic interface

在球坐标系中,考虑到球对称性, $\sigma_\theta = \sigma_\varphi$, 位移分量中仅有径向位移,并且所有分量仅是外半径 r 的函数。其平衡方程(不计体力)为^[18]

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{2(\sigma_r - \sigma_\theta)}{r} = 0 \quad (2)$$

2.1 弹性阶段

由弹性力学可知,承受内压 p 作用的球壳的弹性应力分量为

$$\sigma_r = \frac{r_i^3 p}{r_o^3 - r_i^3} \left(1 - \frac{r_o^3}{r^3}\right), \quad \sigma_\theta = \frac{r_i^3 p}{r_o^3 - r_i^3} \left(1 + \frac{r_o^3}{2r^3}\right) \quad (3)$$

由上式可知, $\sigma_\theta > \sigma_r$; 又 $\sigma_\theta = \sigma_\varphi$, 所以

$$\sigma_\varphi = \frac{r_i^3 p}{r_o^3 - r_i^3} \left(1 + \frac{r_o^3}{2r^3}\right) \quad (4)$$

对于球壳,若规定 $\sigma_1 = \sigma_2 \geq \sigma_3$, 所以

$$\sigma_1 = \sigma_\theta, \quad \sigma_2 = \sigma_\varphi, \quad \sigma_3 = \sigma_r \quad (5)$$

而且 $\sigma_\theta = \sigma_\varphi$, 即 $\sigma_1 = \sigma_2$, 所以 $\sigma_2 \geq \frac{\sigma_1 + \alpha\sigma_3}{1+\alpha}$ 。将

式(3)、式(4)代入式(5),再代入式(1)的第2式得

$$\frac{1}{1+b} \left[\frac{r_i^3 p}{r_o^3 - r_i^3} \left(1 + \frac{r_o^3}{2r_i^3} \right) + b \frac{r_i^3 p}{r_o^3 - r_i^3} \left(1 + \frac{r_o^3}{2r_i^3} \right) \right] - \alpha \frac{r_i^3 p}{r_o^3 - r_i^3} \left(1 - \frac{r_o^3}{r_i^3} \right) = \sigma_t \quad (6)$$

化简得

$$\frac{r_i^3}{r_o^3 - r_i^3} \left[\left(1 + \frac{r_o^3}{2r_i^3} \right) - \alpha \left(1 - \frac{r_o^3}{r_i^3} \right) \right] p = \sigma_t \quad (7)$$

整理可得

$$p = \frac{r_o^3 - r_i^3}{r_i^3 [(1-\alpha) + r_o^3(0.5+\alpha)/r_i^3]} \sigma_t \quad (8)$$

由于 $r_i \leq r \leq r_o$, 可见 r 愈小, 式(8)左边的值愈大, 即在球壳内壁处, 应力较大。在 $r=r_i$ 处首先开始屈服, 此时球壳其余部分尚处在弹性状态。将 $r=r_i$, $p=p_e$, 代入式(8)得

$$p_e = \frac{r_o^3 - r_i^3}{r_i^3 (1-\alpha) + r_o^3(0.5+\alpha)} \sigma_t \quad (9)$$

式(9)即为承受内压作用球壳开始进入塑性时的弹性极限荷载公式。

2.2 弹塑性阶段

当内压 $p > p_e$ 时, 在球壳内表面附近出现塑性区, 随着内压力 p 的增大, 塑性区逐渐从 $r=r_i$ 处向外扩展。设弹塑性区分界线半径为 r_p , 则 $r_i \leq r \leq r_p$ 为塑性区, $r_p \leq r \leq r_o$ 为弹性区(图2)。在塑性区($r_i \leq r \leq r_p$)的平衡方程仍为式(2)。将式(5)代入式(1)的第2式得

$$\sigma_\theta = \sigma_t + \alpha \sigma_r \quad (10)$$

因此

$$\sigma_r - \sigma_\theta = \sigma_r (1-\alpha) - \sigma_t \quad (11)$$

由上式和平衡方程式(2)及边界条件 $\sigma_r|_{r=r_i} = -p$ 可得

$$\begin{cases} \sigma_{r1} = \frac{\sigma_t}{1-\alpha} \left[1 - \left(\frac{r}{r_i} \right)^{2(\alpha-1)} \right] - p \left(\frac{r}{r_i} \right)^{2(\alpha-1)} & r_i \leq r \leq r_p \\ \sigma_{\theta 1} = \frac{1}{1-\alpha} - \frac{\alpha \sigma_t}{1-\alpha} \left(\frac{r}{r_i} \right)^{2(\alpha-1)} - \alpha p \left(\frac{r}{r_i} \right)^{2(\alpha-1)} & r_i \leq r \leq r_p \end{cases} \quad (12)$$

2.3 塑性阶段(极限状态)

设在弹性和塑性区域交界 $r=r_p$ 处, 应力刚好达到屈服。将 $r=r_p$, $p=p_e$ 代入式(3), 可得

$$\begin{cases} \sigma_{r2} = \frac{r_i^3 p_e}{r_o^3 - r_i^3} \left(1 - \frac{r_o^3}{r_p^3} \right) & r_p \leq r \leq r_o \\ \sigma_{\theta 2} = \frac{r_i^3 p_e}{r_o^3 - r_i^3} \left(1 + \frac{r_o^3}{2r_p^3} \right) & r_p \leq r \leq r_o \end{cases} \quad (13)$$

在 $r=r_p$ 处, 材料刚好屈服, 所以 $r=r_p$ 处的 p 又是弹性区的极限压力, 因此

$$p_e = \frac{r_o^3 - r_i^3}{r_i^3 [(1-\alpha) + r_o^3(0.5+\alpha)/r_p^3]} \sigma_t \quad (14)$$

式(14)和式(13)联解, 可得界限区应力分量 σ_{rp} 为

$$\sigma_{rp} = \frac{\sigma_t}{1-\alpha + r_o^3(0.5+\alpha)/r_p^3} \left(1 - \frac{r_o^3}{r_p^3} \right) \quad (15)$$

结合式(12), 可得 p 与 r_p 之间的关系为

$$p = \sigma_t \left\{ \frac{(r_p/r_i)^{2(1-\alpha)} - 1}{1-\alpha} - \frac{1 - r_o^3/r_p^3}{[1-\alpha + r_o^3(0.5+\alpha)/r_p^3][(r_p/r_i)^{2(\alpha-1)} - 1]} \right\} \quad (16)$$

随着 p 的增加, 塑性区继续扩大, 将 $r_p=r_o$ 代入式(16), 得塑性极限内压为

$$p_p = \frac{(r_p/r_i)^{2(1-\alpha)} - 1}{1-\alpha} \sigma_t \quad (17)$$

式(17)即为理想弹塑性材料的球壳承受均匀内压作用的塑性极限荷载公式。而拉压同性时, $\alpha=1$, 选用文献[9]给出的极限荷载公式作为本文公式的补充, 即

$$p_p = \begin{cases} p = \frac{(r_o/r_i)^{2(1-\alpha)} - 1}{1-\alpha} \sigma_t & 0 < \alpha < 1 \\ 2\sigma_t \ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right) & \alpha = 1 \end{cases} \quad (18)$$

式(18)为双剪统一强度理论求解球壳的极限荷载公式。

3 解析算例

为验证本文计算方法的可靠性, 将本文计算结果与3个文献试验数据进行比较, 如下页表1所示。分别计算不同拉压比 α 为0.2、0.6、0.8、1.0时的极限荷载, 结果对比见下页表1。

从表1可以看出, 文献[14]球壳所使用的材料, 其拉压比更接近于1.0, 计算出的理论计算值与试验值的比为1.0980; 文献[15]容器的拉压比接近于0.8, 极限荷载比值为1.0325; 文献[16]的铝合金球壳材料拉压比接近于0.2, 比值为0.9852。通过与各试验数据的比较分析, 用本文的方法可以精确计算不同拉压比材料球壳压力容器的极限荷载。

采用式(9)和式(17), 分析弹性极限内压和塑性极限内压随着半径比及拉压比的变化关系, 如下页图3和图4。由图3可知, p_e/σ_t 随着半径比 r_o/r_i 的增加而增大, 但 r_o/r_i 高于3.0时 p_e/σ_t 渐趋平稳, 也就是说球壳壁厚达到一定厚度时, 增加壁厚不能提高极限荷载。由图4可知, p_p/σ_t 也随着半径比 r_o/r_i 的增加而增大, 但 r_o/r_i 低于1.5时 p_p/σ_t 增长不明显。 p_e/σ_t 、 p_p/σ_t 随着拉压比 α 的增大而减小; 半径比对 p_p/σ_t 的影响随着 α 的减小而渐趋显著。

表 1 算例比较分析

Tab. 1 Calculation examples for comparison analysis

文献	拉压比 α	内半径/mm	壁厚/mm	半径比 r_o/r_i	屈服强度 σ_t /MPa	理论值 p_p /MPa	试验值 p_{exp} /MPa	p_p/p_{exp}
文献[14]	0.2	300	2.0	1.013	422.5	11.310 0	10.200	1.108 8
	0.6	300	2.0	1.013	422.5	11.250 0	10.200	1.102 9
	0.8	300	2.0	1.013	422.5	11.200 0	10.200	1.098 0
	1.0	300	2.0	1.013	422.5	10.910 0	10.200	1.069 6
文献[15]	0.2	250	250.0	2.000	250.0	634.600 0	360.400	1.750 8
	0.6	250	250.0	2.000	250.0	462.500 0	360.400	1.283 3
	0.8	250	250.0	2.000	250.0	371.700 0	360.400	1.032 5
	1.0	250	250.0	2.000	250.0	346.600 0	360.400	0.961 6
文献[16]	0.2	1 000	1.5	1.002	48.0	0.192 1	0.195	0.985 2
	0.6	1 000	1.5	1.002	48.0	0.191 9	0.195	0.984 1
	0.8	1 000	1.5	1.002	48.0	0.191 8	0.195	0.983 6
	1.0	1 000	1.5	1.002	48.0	0.191 8	0.195	0.983 6

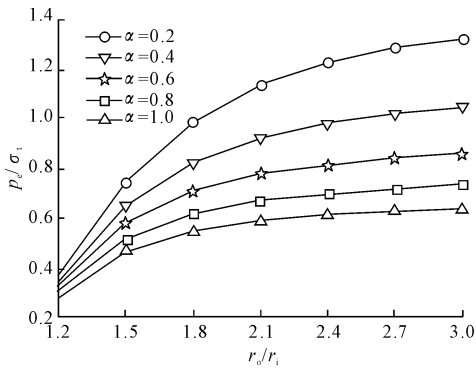


图 3 p_e/σ_t 随 r_o/r_i 及 α 的变化曲线

Fig. 3 p_e/σ_t versus ratio r_o/r_i and α

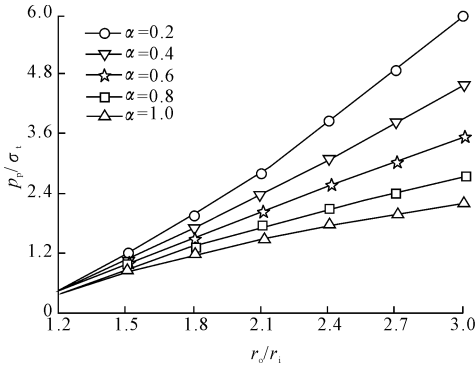


图 4 p_p/σ_t 随 r_o/r_i 及 α 的变化曲线

Fig. 4 p_p/σ_t versus ratio r_o/r_i and α

图 5 为弹性极限内压和塑性极限内压与材料参数拉压比的关系曲线。由图 5 可知,在半径比不变的情况下, p_e/σ_t 、 p_p/σ_t 随着拉压比 α 的增大而减小,说明复杂应力下抗拉强度和抗压强度对破坏均要产生影响,对于某一种材料,选取合适的 α 可以得到更精确的计算结果。

采用式(15),分析界限区应力的变化规律,如图 6 所示。由图 6 可知, σ_{rp}/σ_t 随着拉压比 α 的增大而

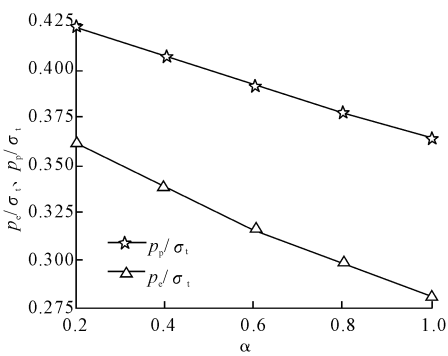


图 5 p_e/σ_t 、 p_p/σ_t 与 α 的变化曲线

Fig. 5 p_e/σ_t 、 p_p/σ_t versus ratio α

减小,随着半径比 r_o/r_p 的增加而增大,应力状态随半径比 r_o/r_p 的减小,弹性区逐渐减小,塑性区逐渐增大。

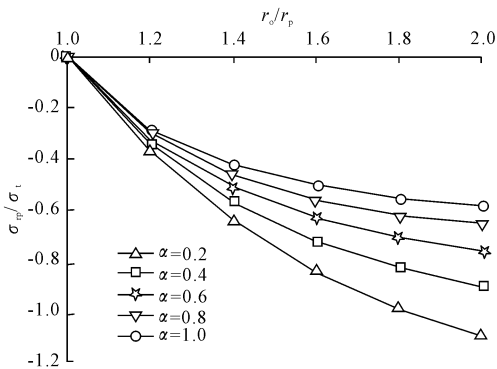


图 6 σ_{rp}/σ_t 随 r_o/r_p 及 α 的变化曲线

Fig. 6 σ_{rp}/σ_t versus ratio r_o/r_p and α

4 结 语

(1)基于双剪统一强度理论,考虑中间主应力以及拉压强度异性的影响,对承受内压的球壳进行了弹塑性极限荷载分析,得到了解析式。该结果具有

一般性,可以求解不同拉压异性球壳压力容器的极限荷载,说明采用双剪统一强度理论可以充分发挥材料的潜力。

(2)不同材料的拉压强度差异对结构的极限荷载具有明显影响,球壳的弹性极限内压和塑性极限内压均随半径比 r_o/r_i 的增加而增大,随着拉压比 α 的增大而减小。但 r_o/r_i 低于 1.5 时塑性极限内压增长不明显,且球壳达到一定厚度时增加壁厚不能提高极限荷载。

(3)在 $\alpha < 1$ 的情况下,可以提高球壳的弹塑性极限内压,为高压容器的设计提供参考依据。球壳的塑性区发展规律、应力随着 r_o/r_p 及 α 的变化而变化,随 r_o/r_p 的减小逐渐由弹性区转化为塑性区。

参考文献:

References:

- [1] Gao Z Y, Yu T X, Zhao H. Mechanical behavior of metallic hollow sphere materials: experimental study [J]. Journal of Aerospace Engineering(ASCE), 2008, 21(4): 206-216.
- [2] Kalnins A, Updike D P. Limit pressures of cylindrical and spherical shells [J]. Journal of Pressure Vessel Technology(ASME), 2001, 123(3): 288-292.
- [3] Duffey T A. Plastic instability in spherical vessels for static and dynamic loading [J]. Journal of Pressure Vessel Technology(ASME), 2011, 133(5): 1-6.
- [4] Li M L, Fu M F. Limit analysis of viscoplastic thick-walled cylinder and spherical shell under internal pressure using a strain gradient plasticity theory [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2008, 29(12): 1553-1559.
- [5] Guo X M, Liu X G, Xu B S, et al T. Synthesis and characterization of carbon sphere-silica core-shell structure and hollow silica spheres [J]. Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects, 2009, 345(1/3): 141-146.
- [6] Vaziria A, Estekanchi H E. Buckling of cracked cylindrical thin shells under combined internal pressure and axial compression [J]. Thin-Walled Structures, 2006, 44(2): 141-151.
- [7] 孔 娟, 袁聚云, 潘晓明. 不同拉压模量厚壁球壳弹塑性分析 [J]. 力学与实践, 2010, 32(1): 42-45.
KONG Juan, YUAN Ju-yun, PAN Xiao-ming. Elasto-plastic analysis of thick spheric shell with different elastic moduli for tensile and compressive deformations [J]. Mechanics in Engineering, 2010, 32(1): 42-45. (in Chinese)
- [8] 罗战友, 夏建中, 龚晓南. 不同拉压模量及软化特性材料的柱形孔扩张问题的统一解 [J]. 工程力学, 2008, 25(9): 79-84.
- LUO Zhan-you, XIA Jian-zhong, GONG Xiao-nan. Unified solution for expansion of cylindrical cavity in strain-softening materials with different elastic moduli in tension and compression [J]. Engineering Mechanics, 2008, 25(9): 79-84. (in Chinese)
- [9] Casey J, Sullivan Y D. Pressure dependency strength-differential effect and plastic volume expansion in metals [J]. International Journal of Plasticity, 1986, 1(1): 39-61.
- [10] 殷有泉, 陈朝伟. 软化材料厚壁筒的解析解及其稳定性分析 [J]. 力学学报, 2010, 42(1): 56-64.
YIN You-quan, CHEN Chao-wei. The analytical solutions of thick-walled cylinder of softening material and its stability [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2010, 42(1): 56-64. (in Chinese)
- [11] Wang Z B, Deng K S, Qian L X. Limit analysis of spherical shell under ring load and experimental verification [J]. Journal of Dalian University of Technology, 1993, 33(S2): 142-147.
- [12] Eraslan A N. Elastoplastic deformations of rotating parabolic solid disks using Teresa's yield criterion [J]. European Journal of Mechanics, 2003, 22(6): 861-874.
- [13] Karagiozovaa D, Alves M. Transition from progressive buckling to global bending of circular shells under axial impact [J]. International Journal of Solids and Structures, 2004, 41(5-6): 1581-1604.
- [14] 苑世剑, 王仲仁, 于洪林. 不锈钢球壳液压胀形过程的试验研究 [J]. 宇航材料工艺, 1996, 26(1): 27-31.
YUAN Shi-jian, WANG Zhong-ren, YU Hong-lin. Experimental research on the hydro-bulging process of spherical stainless steel shell [J]. Aerospace Materials & Technology, 1996, 26(1): 27-31. (in Chinese).
- [15] 游理华. 厚壁球壳压力容器的弹塑性分析 [J]. 力学与实践, 1985, 7(6): 39-42.
YOU Li-hua. Elasto-plastic analysis of thick spherical shell pressure vessel [J]. Mechanics in Engineering, 1985, 7(6): 39-42. (in Chinese)
- [16] 韩 聪, 苑世剑, 苗启斌. 铝合金球壳液压胀形试验研究 [J]. 压力容器, 2005, 22(8): 10-13.
HAN Cong, YUAN Shi-jian, MIAO Qi-bin. Hydro forming of an aluminum alloy spherical shell [J]. Pressure Vessel Technology, 2005, 22(8): 10-13. (in Chinese).
- [17] Yu M H. Unified strength theory and its applications [M]. Berlin: Springer Press, 2004
- [18] 徐秉业, 刘信声. 应用弹塑性力学 [M]. 北京: 清华大学出版社, 1995.
XU Bing-ye, LIU Xin-sheng. Application of elastoplastic mechanics [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1995. (in Chinese).