第 33 卷 第 4 期
2013 年 7 月

长安大学学报(自然科学版)
Journal of Chang'an University(Natural Science Edition)

Vol. 33 No. 4
Jul. 2013

文章编号:1671-8879(2013)04-0105-05

风险共担配送中心选址模型解的定理分析

杨 琦[1],杨云峰[2],王 非[1]

(1. 长安大学 经济管理学院,陕西 西安 710064;2. 陕西交通职业技术学院,陕西 西安 710018)

摘 要:为适应现代市场中供应链条间的激烈竞争,将库存理论引入到配送中心选址模型构建中,结合实际建设配送中心的情况,在 LMPR 模型基础上,从优化角度将配送中心建设成本设为配送中心规模的线性函数,构建非线性 0-1 整数规划模型,构建基于可变建设成本的风险共担配送中心选址模型;并利用反证法,证明模型解的定理。研究结果表明:在 LMRP 模型基础上扩展的基于可变建设成本的风险共担选址模型不仅考虑了配送链条上的库存成本,而且根据需求实际情况,将配送中心规模设定为满足需求的线性函数,对于配送中心选址及包括建设成本在内的各项成本计算更为精确;利用此定理,可直接根据网络距离,判断配送中心的配送最优路径。

关键词:物流工程;配送中心;选址模型; 库存成本; 解的定理

中图分类号:F252 **文献标志码**:A

Analysis of solution theorem for distribution center location model based on risk sharing

YANG Qi[1], YANG Yun-feng[2], WANG Fei[1]

(1. School of Economics and Management, Chang'an University, Xi'an 710064, Shaanxi, China;
2. Shaanxi College of Communication Technology, Xi'an 710018, Shaanxi, China)

Abstract: In order to adapt to the intense competition of the supply chains in the modern market, the inventory theory was introduced into the study of the distribution center location model. According to the actual situation, on the basis of LMPR model, the distribution center construction cost was considered in the linear function of the scale of distribution center for the optimization. A nonlinear 0-1 integer programming model was established, and risk sharing distribution center location model was also established based on variable construction cost. The reduction to absurdity was used to prove the solution theorem of the model. The results show that the risk sharing distribution center location model developed from LMPR model and based on variable construction cost not only considers the inventory cost of distribution chain, but also sets the scale of distribution center to meet the demand of linear function according to the actual demand situation, which makes the distribution center location and costs calculation including construction cost more accurate. This solution theorem can determine the optimal distribution path according to the network distance. 1 fig, 12 refs.

收稿日期:2012-09-20

基金项目:交通运输部西部交通科技建设项目(2011 318 820 1420)

作者简介:杨琦(1963-),男,陕西白水人,教授,工学博士,E-mail:yangqi@chd.edu.cn。

Key words: logistics engineering; distribution center; location center; inventory cost; solution theorem

0 引 言

21 世纪以来,中国现代物流业进入持续快速发展的新阶段。发改委数据显示,2012 年,全国社会物流总额 177.3 万亿元,按可比价格计算,同比增长 9.8%。,全国社会物流总费用 9.4 万亿元,全国物流业实现增加值 3.6 万亿元,按可比价格计算,同比增长 9.1%,物流业固定资产投资完成 4 万亿元,同比增长 23.9%。配送中心是现代物流的重要组成部分,其对中国物流业发展的贡献巨大。配送中心是接受并处理末端用户的订货信息,对上游运来的多品种货物进行分拣,根据用户订货要求进行拣选、加工、组配等作业并进行送货的设施和机构,在整个物流系统中起着承上启下的作用。科学选择配送中心区位可以有效地节约各项成本,促进生产和消费的协调与配合,保证物流系统的高效和平衡发展。配送中心选址模型不可避免与库存论、供应链协调理论相结合才能适应时代对其发展的需要。相关学者将设施选址、配送模型通常抽象为整数规划、混和整数规划模型进行定量研究[1-7]。供应链环境下物流设施选址研究的重要意义之一在于将库存论引入选址问题,在集中决策前提下集成优化选址模型与库存模型,使得整条供应链在激烈市场竞争中处于优势地位。有学者将安全库存成本内嵌在固定装卸成本中,构建了包括运输成本、建设成本在内的单级库存-选址模型。在此基础上,对该模型进行扩展,从单级演化到两级,确定各中心的库存水平及区位,以权衡顾客服务水平与单位产品成本为基础[8]。Shen 等首先建立了风险共担选址-库存模型(location model of risk pooling,LMRP),Shen 等利用风险共担策略将安全库存设在配送中心,进而采用 EOQ 经济订货批量模型计算配送中心的最优订货量,在此基础上构建了 LMRP 选址-库存模型。LMRP 为二级物流模型,假设每个零售商需求都为正态独立分布,所有零售商需求必须满足且必须由一个配送中心供货,配送中心无配送能力限制,模型不仅计算成本的最优值,即最小成本,而且求解配送中心的最优建设区位与配送中心的配送方案[9]。Daskin 等用拉格朗日松弛法求解该模型并获得良好计算效果[10]。在实际中,物流企业常常根据所要服务的零售商的区位、数量及需求量确定配送中心的建设规模,从而决定建设、租用每个配送中心的成本。而 LMRP 模型将所有配送中心的建设成本设为常量,不仅与实际情况不符,而且会导致资金资源的巨大浪费。为此,在 LMPR 模型基础上,本文从优化角度将配送中心建设成本设为配送中心规模的线性函数,构建非线性 0-1 整数规划模型,即基于可变建设成本的风险共担配送中心选址模型。

1 风险共担配送中心选址模型

基于可变建设成本的风险共担配送中心选址模型的基本思路:在物流网络中,已知各需求点的需求与网络距离矩阵,给定建设成本系数、运输成本系数、库存成本参数,求解包括配送中心建设成本、运作成本、运输成本、安全库存成本在内的总成本、建设配送中心的最佳区位以及配送中心给零售商配送的最优路径。

基于可变建设成本的风险共担配送中心选址模型见文献[11],简化目标函数,得

$$\min\Big(\sum_i f_i X_i+\sum_i\Big(m\Big(Z_\alpha\sqrt{Lr}+\sqrt{\frac{2(F_i+\beta g_i)B}{\theta h_{\mathrm{d}}}}\Big)\cdot\sqrt{\sum_j \mu_j Y_{ij}}\Big)X_i+\sum_j d'_{ij}Y_{ij}+K'_i\sqrt{\sum_j \mu_j Y_{ij}}\Big)=\min\Big(\sum_i\Big(f_i X_i+R\sqrt{\sum_j \mu_j Y_{ij}}X_i+\sum_j d'_{ij}Y_{ij}+K'_i\sqrt{\sum_j \mu_j Y_{ij}}\Big)\Big) \tag{1}$$

$$R=m\Big(Z_\alpha\sqrt{Lr}+\sqrt{\frac{2(F_i+\beta g_i)B}{\theta h_{\mathrm{d}}}}\Big) \tag{2}$$

$$d'_{ij}=\beta B\mu_j(d_{ij}+\alpha_i) \tag{3}$$

$$K'_i=\sqrt{2\theta h_{\mathrm{d}}B(F_i+\beta g_i)}+\theta h_{\mathrm{d}}Z_\alpha\sqrt{Lr} \tag{4}$$

式中:I 为配送中心 i 集合;J 为零售商 j 集合,$\forall j\in J$;d_{ij} 为配送中心 i 到零售商 j 的距离;f_i 为每年配送中心 i 的固定建设费用;β 为运输费用系数;m 为配送中心建设成本系数;T_k 为配送中心 k 满足的所有需求量;μ_j 为零售商 j 每天需求的均值;g_i 为从供货商到配送中心每次运输的固定成本;α_i 为从供货商到配送中心可变运输成本系数;B 为每年配送中心运营的天数;L 为订货提前期;θ 为库存成本系数;h_{d} 为单位库存成本;Z_α 为销售商订货满意度;F_i 为配送中心每次订货的固定成本;z_∂ 为标准差(客户满意度)$p(z\leqslant z_\partial)=\partial$;$\sigma^2$ 为零售商需求方差;r 为 σ_j^2/μ_j(沿用 LMRP 模型假设,零售商需求为正态分布)

X_i 为决策变量，如为 1，在 i 点修建配送中心，否则为 0；Y_{ij} 也为决策变量，如为 1，配送中心 i 为销售点 j 送货，否则为 0。

2　解的定理分析

基于可变建设成本的风险共担配送中心选址问题模型的解具有以下定理(下文中变量定义与前文同，下标即为图 1 所示节点)。

若 $d_{kc}-d_{ic}\geqslant d_{ke}-d_{ie}$，　$\forall i,k\in I,i\neq k,\forall e,c\in J,e\neq c$，且 $Y_{kc}=1$，则 $Y_{ke}=1$。网络示意图如图 1 所示。

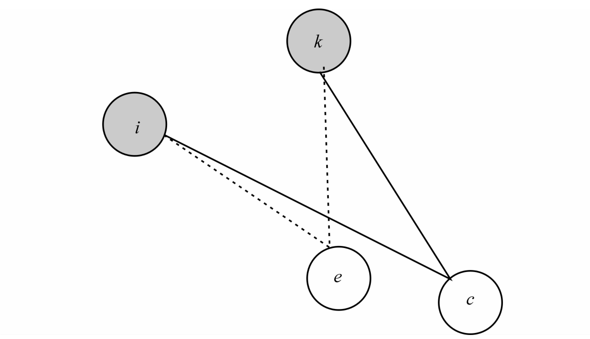

图 1　定理网络示意

Fig. 1　Theorem of network

证明：使用反证法证明。

假设 $Y_{ke}\neq 1$，则 $Y_{ie}=1$，　$\forall i,k\in I,i\neq k,\forall e,c\in J,e\neq c$

根据基于可变建设成本的风险共担配送中心选址问题模型的解的性质，有[12]

$$\mu_e d_{ke}+R_k'[(T_k+\mu_e)^{0.5}-T_k^{0.5}]\geqslant \mu_e d_{ie}+R_i'[T_i^{0.5}-(T_i-\mu_e)^{0.5}] \tag{5}$$

式(5)中右边项

$$\mu_e d_{ie}+R_i'[T_i^{0.5}-(T_i-\mu_e)^{0.5}]=\mu_e d_{ie}+R_i'[T_i^{0.5}-(T_i-\mu_e)^{0.5}]-\frac{\mu_e}{\mu_c}\{\mu_c d_{ic}+R_i'[(T_i-\mu_c)^{0.5}-T_i^{0.5}]\}+\frac{\mu_e}{\mu_c}\{\mu_c d_{ic}+R_i'[(T_i-\mu_c)^{0.5}-T_i^{0.5}]\}=\mu_e(d_{ie}-d_{ic})+R_i'\{[T_i^{0.5}-(T_i-\mu_e)^{0.5}]-\frac{\mu_e}{\mu_c}[(T_i+\mu_c)^{0.5}-T_i^{0.5}]\}+\frac{\mu_e}{\mu_c}\cdot\{\mu_c d_{ic}+R_i'[(T_i-\mu_c)^{0.5}-T_i^{0.5}]\} \tag{6}$$

@Ⅰ+Ⅱ+Ⅲ

其中 Ⅰ $=\mu_e(d_{ie}-d_{ic})$，Ⅱ $=R_i'\{[T_i^{0.5}-(T_i-\mu_e)^{0.5}]-\frac{\mu_e}{\mu_c}[(T_i+\mu_c)^{0.5}-T_i^{0.5}]\}$，Ⅲ $=\frac{\mu_e}{\mu_c}\{\mu_c d_{ic}+R_i'\cdot[(T_i-\mu_c)^{0.5}-T_i^{0.5}]\}$

(1)根据已知条件有：$d_{kc}-d_{ic}\geqslant d_{ke}-d_{ie}$

而 $d_{ic}=\beta B(d_{kc}+\alpha_i)$，$d_{ie}=\beta B(d_{ie}+\alpha_i)$，$d_{ke}=\beta B(d_{ke}+\alpha_i)$，$d_{kc}=\beta B(d_{kc}+\alpha_i)$

其中，β、B、α_i、d_{ic}、d_{ie}、d_{ke}、d_{kc} 均大于等于 0。

于是 $d_{kc}-d_{ic}=\beta B(d_{kc}+\alpha_i)-\beta B(d_{ic}+\alpha_i)=\beta B(d_{kc}-d_{ic})\geqslant\beta B(d_{ke}-d_{ie})=\beta B(d_{ke}+\alpha_i)-\beta B(d_{ie}+\alpha_i)=d_{ke}-d_{ie}$

即 $d_{kc}-d_{ic}\geqslant d_{ke}-d_{ie}$，或式(6) Ⅰ 中 $d_{ie}-d_{ic}\geqslant d_{ke}-d_{kc}$。

(2)由已知，$Y_{kc}=1$，$k\in I$，$c\in J$，根据解的性质，有

$$\mu_c d_{ic}+R_i'[(T_i-\mu_c)^{0.5}-T_i^{0.5}]\geqslant\mu_c d_{kc}+R_k'[T_k^{0.5}-(T_k-\mu_c)^{0.5}]\qquad\forall i\neq k。$$

(3)式(6)第 2 项中 Ⅱ 中 $[T_i^{0.5}-(T_i-\mu_e)^{0.5}]-\frac{\mu_e}{\mu_c}[(T_i+\mu_c)^{0.5}-T_i^{0.5}]$ 乘 μ_c 得

$$\mu_c\{[T_i^{0.5}-(T_i-\mu_e)^{0.5}]-\frac{\mu_e}{\mu_c}[(T_i+\mu_c)^{0.5}-T_i^{0.5}]\}=\mu_c[T_i^{0.5}-(T_i-\mu_e)^{0.5}]-\frac{\mu_e}{\mu_c}[(T_i+\mu_c)^{0.5}-T_i^{0.5}]$$

进一步整理，得

$$(\mu_c+\mu_e)T_i^{0.5}-\mu_c(T_i-\mu_e)^{0.5}-\mu_e(T_i+\mu_c)^{0.5}=(\mu_c+\mu_e)\{T_i^{0.5}-\frac{\mu_c}{\mu_c+\mu_e}(T_i-\mu_e)^{0.5}-[1-\frac{\mu_c}{\mu_c+\mu_e}(T_i+\mu_c)^{0.5}]\} \tag{7}$$

令 $\alpha=\frac{\mu_c}{\mu_c+\mu_e}$，$0<\alpha<1$，则有 $1-\alpha=\frac{\mu_e}{\mu_c+\mu_e}$；

令 $x_1=T_i-\mu_e$，$x_2=T_i+\mu_c$；

若 $f(x)=x^{0.5}$，$x\geqslant 0$，则 $f''(x)<0$，故 $f(x)$ 为凹函数。

根据凹函数定义和性质，有

$f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)\geqslant\alpha f(x_1)+(1-\alpha)\cdot f(x_2)$，即

$$f[\frac{\mu_c}{\mu_c+\mu_e}(T_i-\mu_e)+\frac{\mu_e}{\mu_c+\mu_e}(T_i+\mu_c)]\geqslant\frac{\mu_c}{\mu_c+\mu_e}f(T_i-\mu_e)+\frac{\mu_e}{\mu_c+\mu_e}f(T_i+\mu_c)$$

或

$$\sqrt{\frac{\mu_c}{\mu_c+\mu_e}(T_i-\mu_e)+\frac{\mu_e}{\mu_c+\mu_e}(T_i+\mu_c)}\geqslant\frac{\mu_c}{\mu_c+\mu_e}(T_i-\mu_e)+\frac{\mu_e}{\mu_c+\mu_e}\sqrt{T_i+\mu_c}$$

即 $T_i^{0.5}\geqslant\frac{\mu_c}{\mu_c+\mu_e}\sqrt{T_i-\mu_e}+\frac{\mu_e}{\mu_c+\mu_e}\sqrt{T_i+\mu_c}$，

或

$$T_i^{0.5}-\frac{\mu_c}{\mu_c+\mu_e}(T_i-\mu_e)-\frac{\mu_e}{\mu_c+\mu_e}(T_i+\mu_c)^{0.5}\geqslant 0 \quad (8)$$

又 $\mu_c+\mu_e>0$,故式(7)大于等于 0。

式(7)除以 μ_c 等于式(6)Ⅱ中的

$[T_i^{0.5}-(T_i-\mu_e)]-\frac{\mu_c}{\mu_c+\mu_e}[(T_i+\mu_c)^{0.5}-T_i^{0.5}]$,$\mu_c>0$,则

式(6)中Ⅱ$\geqslant 0$

综合式(1)~式(3)这 3 个部分证明结论可得

$$\mu_e(d_{ie}-d_{ic})+R_i'\{[T_i^{0.5}-(T_i-\mu_e)^{0.5}]-\frac{\mu_e}{\mu_c}[(T_i+\mu_c)^{0.5}-T_i^{0.5}]\}+\frac{\mu_e}{\mu_c}\{\mu_c d_{ic}+R_i'[(T_i-\mu_c)^{0.5}-T_i^{0.5}]\}\geqslant\mu_e(d_{ke}-d_{kc})+\frac{\mu_e}{\mu_c}\{\mu_c d_{kc}+R_k'[T_k^{0.5}-(T_k-\mu_c)^{0.5}]\} \quad (9)$$

另一方面,式(5)左边项

$$\mu_e d_{ke}+R_k'[(T_k+\mu_e)^{0.5}-T_k^{0.5}]=\mu_e d_{ke}+R_k'[(T_k+\mu_e)^{0.5}-T_k^{0.5}]-\frac{\mu_e}{\mu_c}\{\mu_c d_{kc}+R_k'[T_k^{0.5}-(T_k-\mu_c)^{0.5}]\}+\frac{\mu_e}{\mu_c}\{\mu_c d_{kc}+R_k'[T_k^{0.5}-(T_k-\mu_c)^{0.5}]\}=\mu_e(d_{ke}-d_{kc})+R_k'\{[(T_k+\mu_e)^{0.5}-T_k^{0.5}]-\frac{\mu_e}{\mu_c}[T_k^{0.5}-(T_k-\mu_c)^{0.5}]\}+\frac{\mu_e}{\mu_c}\{\mu_c d_{kc}+R_k'[T_k^{0.5}-(T_k-\mu_c)^{0.5}]\} \quad (10)$$

式(10)第 2 项中$[(T_k+\mu_e)^{0.5}-T_k^{0.5}]-\frac{\mu_e}{\mu_c}[T_k^{0.5}-(T_k-\mu_c)^{0.5}]$乘以 μ_c 得

$$\mu_c(T_k+\mu_e)^{0.5}+\mu_e(T_k-\mu_c)^{0.5}-(\mu_e+\mu_c)\cdot T_k^{0.5}=(\mu_e+\mu_c)\{\frac{\mu_c}{\mu_e+\mu_c}(T_k+\mu_e)^{0.5}+[1-\frac{\mu_c}{\mu_e+\mu_c}](T_k-\mu_c)^{0.5}-T_k^{0.5}\} \quad (11)$$

类似上述(3)的证明过程可得

$$\frac{\mu_c}{\mu_e+\mu_c}(T_k+\mu_e)^{0.5}+[1-\frac{\mu_c}{\mu_e+\mu_c}](T_k-\mu_c)^{0.5}-T_k^{0.5}\leqslant 0$$

所以,式(11)小于等于 0。

则式(10)中第 2 项小于等于 0,式(9)大于等于式(10)。

式(5)右边项大于等于式(9),即

$$\mu_e d_{ie}+R_i'[T_i^{0.5}-(T_i-\mu_e)^{0.5}]\geqslant\mu_e(d_{ke}-d_{kc})+\frac{\mu_e}{\mu_c}\{\mu_c d_{kc}+R_k'[T_k^{0.5}-(T_k-\mu_c)^{0.5}]\}$$

式(9)大于等于式(5)左边项,即

$$\mu_e(d_{ke}-d_{kc})+\frac{\mu_e}{\mu_c}\{\mu_c d_{kc}+R_k'[T_k^{0.5}-(T_k-\mu_c)^{0.5}]\}\geqslant\mu_e d_{ke}+R_k'[(T_k+\mu_e)^{0.5}-T_k^{0.5}]$$

得式(5)右边项大于等于式(5)的左边项,即

$$\mu_e d_{ie}+R_k'[T_i^{0.5}-(T_i-\mu_e)^{0.5}]\geqslant\mu_e d_{ke}+R_k'[(T_k+\mu_e)^{0.5}-T_k^{0.5}] \quad (12)$$

式(12)与式(5)矛盾,故反证法假设不成立。

所以,$Y_{ke}=1$。

证毕。

如果配送中心 k 为零售商 c 供货为模型最优解,当 $d_{kc}-d_{ic}\geqslant d_{ke}-d_{ie}$ 时,配送中心 k 为零售商 e 供货也是模型最优解。

3 结 语

(1)在 LMRP 模型基础上扩展的基于可变建设成本的风险共担选址模型不仅考虑了配送链条上的库存成本,而且根据需求实际情况,将配送中心规模设定为满足需求的线性函数,对于配送中心选址及包括建设成本在内的各项成本计算更为精确;根据解的性质,利用反证法,得到基于可变建设成本的风险共担配送中心选址模型解的定理;利用此定理,可直接根据网络距离,判断配送中心的配送最优路径。

(2)本文所研究问题均假设无配送能力约束,而实际当中,大多数物流网络设施有配送能力限制,因此,一个零售商将可能由多个配送中心为其供货。针对此问题特点,将构建混合整数规划模型研究。

(3)为简化问题,本文及相关参考文献研究的 LMRP 问题均只考虑配送中心为零售商的配送方案,即哪个配送中心为哪个零售商供货问题,模型解中包括大量重复运输。现实中,一条线路上的零售商通常由一辆车配送,而不会往复运输。将车辆一路径问题研究引入本文研究模型将是值得研究的现实问题。

参考文献:

References:

[1] Manasse M S,McGeoch L A,Sleator D D. Competitive algorithms for server problems[J]. Journal of Algorithms,1990,11(2):208-230.

[2] David S B, Borodin A. A new measure for the study of the on-line algorithm[J]. Algorithmica, 1994, 11(1): 73-91.

[3] Min H, Jayaraman V, Srivastava R. Combined location-routing problems: a synthesis and future research directions[J]. European Journal of Operational Research, 1998, 108(1): 1-15.

[4] Stock G N, Greis N P, Kasarda J D. Enterprise logistics and supply chain structure: the role of fit[J]. Journal of Operations Management, 2000, 18(5): 531-547.

[5] Jang Y J, Jang S Y, Chang B M, et al. A combined model of network design and production distribution planning for a supply network[J]. Computers and Industrial Engineering, 2002, 43(1/2): 263-281.

[6] Nagurney A, Dong J, Zhang D. A supply chain network equilibrium model[J]. Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review, 2002, 38(5): 281-303.

[7] Dijkstra E W. A note on two problems in connection with graphs[J]. Numerische Mathematik, 1959, 1(1): 269-271.

[8] Nozick L K, Turnquist M A. A two-echelon inventory allocation and distribution center loacaion analysis[J]. Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review, 2001, 37(6): 425-441

[9] Shen Z J M, Coullard C, Daskin M S. A joint location-inventory model[J]. Transportation Science, 2003, 37(1): 40-55.

[10] Daskin M S, Collette R, Shen Z J M. An inventory-location model: formulation, solution algorithm and computational results[J]. Annals of Operations Research, 2002, 110(1/4): 83-106.

[11] 王　非，贾　涛，胡信步. 基于可变建设成本的风险共担选址-库存模型及粒子群算法应用[J]. 运筹与管理，2010，19(4)：31-37.
WANG Fei, JIA Tao, HU Xin-bu. Location model of risk pooling based on variable construction cost and particle swarm optimization algorithms[J]. Operation and Management, 2010, 19(4): 31-37. (in Chinese)

[12] 王　非，孙浩杰，罗卫华，等. 指定备选点的配送中心选址-库存模型[J]. 长安大学学报：自然科学版，2012，32(3)：91-96.
WANG Fei, SUN Hao-jie, LUO Wei-hua, et al. Location-inventory model of distribution center with appointed alternative location and case study[J]. Journal of Chang'an University: Natural Science Edition, 2012, 32(3): 91-96. (in Chinese)

（上接第 104 页）

[9] 王晓明，顾培亮，邱世明. 基于非线性理论的 CO_2 预测方法[J]. 管理科学学报，2002，5(4)：22-27.
WANG Xiao-ming, GU Pei-liang, QIU Shi-ming. Energy forecasting method based on nonlinear system theory[J]. Journal of Management Sciences in China, 2002, 5(4): 22-27. (in Chinese)

[10] 陈彦光. 人口与资源预测中 Logistic 模型承载量参数的自回归估计[J]. 自然资源学报，2009，24(6)：1105-1114.
CHEN Yan-guang. Carrying capacity estimation of Logistic model in population and resources prediction by nonlinear autoregression[J]. Journal of Natural Resources, 2009, 24(6): 1105-1114. (in Chinese)

[11] 余　闯，刘松玉. 路堤沉降预测的 Gompertz 模型应用研究[J]. 岩土力学，2005，26(1)：82-86.
YU Chuang, LIU Song-yu. A study on prediction of embankment settlement with the Gompertz model[J]. Rock and Soil Mechanics, 2005, 26(1): 82-86. (in Chinese)

[12] 邢黎峰，孙明高，王元军. 生物生长的 Richards 模型[J]. 生物数学学报，1998，13(3)：348-353.
XING Li-feng, SUN Ming-gao, WANG Yuan-jun. Richards growth model of living-organism[J]. Journal of Biomathematics, 1998, 13(3): 348-353. (in Chinese)

[13] 程毛林. Richards 模型参数估计及其模型应用[J]. 数学的实践与认识，2010，40(12)：139-143.
CHENG Mao-lin. Patameter estimation of Richards model and Its application[J]. Methematics in Practice and Theory, 2010, 40(12): 139-143. (in Chinese)

[14] 于江霞，于景群，王选仓. 基于神经网络的公路网规模预测[J]. 长安大学学报：自然科学版，2006，26(1)：75-78.
YU Jiang-xia, YU Jing-qun, WANG Xuan-cang. Highway network scale prediction based on BP neural network[J]. Journal of Chang'an University: Natural Science Edition, 2006, 26(1): 75-78. (in Chinese)