

带铰平面梁元几何非线性有限元分析

邓继华¹, 邵旭东²

(1. 长沙理工大学 土木与建筑学院, 湖南 长沙 410076; 2. 湖南大学 土木工程学院, 湖南 长沙 410081)

摘 要:针对梁端带铰的平面梁元几何非线性分析研究较少的情况,通过局部坐标系(随转坐标系)下的即时单元刚度矩阵,再基于结构坐标系与局部坐标系下杆端力及节点位移的总量关系及微分获得的增量关系,获得平面梁单元在大位移、小应变条件下的几何非线性单元切线刚度矩阵。研究表明:将局部坐标系下的刚度矩阵建立在即时构形的参数上,更能反映状态变量的变化,在此基础上根据带铰梁端弯矩为 0 的受力特征,导出了能考虑梁端带铰的单元切线刚度矩阵表达式;通过对带铰的算例进行几何非线性分析,验证了所提出的表达式具有较强的实用价值。

关键词:桥梁工程;平面梁元;铰;几何非线性;微分法;切线刚度矩阵

中图分类号:U441

文献标志码:A

Geometric nonlinear finite element analysis of plane beam element with hinge

DENG Ji-hua¹, SHAO Xu-dong²

(1. School of Civil Engineering and Architecture, Changsha University of Science and Technology, Changsha 410076, Hunan, China; 2. School of Civil Engineering, Hunan University, Changsha 410082, Hunan, China)

Abstract: Aimed at the situation of less research results about geometric nonlinear tangent stiffness matrix of plane beam element with hinge, starting from the element stiffness matrix of local coordinate system(co-rotational coordinate system), the non-linear tangent stiffness matrix of the plane beam element in large but small-strained displacement was derived based on total and increment relation of nodal forces and displacements between local coordinate system and global coordinate system, the increment relation of nodal forces and displacements was achieved by differential method. The results show that this method can reflect the change of variables. According to the mechanical characteristics of hinged beam, an explicit expression of the non-linear tangent stiffness matrix was derived to consider the effect of hinged beam. A computer program was developed to analyze the geometrical nonlinear behavior of several classic examples with hinges. The results verify the practical value of the proposed innovative element. 5 figs, 10 refs.

Key words: bridge engineering; plane beam element; hinge; geometric nonlinear; differentiation method; tangent stiffness matrix

0 引言

在桥梁及其他工程结构中,杆件之间的连接大都是刚性连接,但也有基于构造或受力的需要做成铰接,如跨中带铰的T构梁桥、有铰拱桥等,在结构线性分析中,该问题得到了较好处理^[1];在几何非线性分析中,尽管对平面梁元的研究成果非常多^[2-5],但对于带铰平面梁元的几何非线性分析切线刚度矩阵,目前尚未见到公开发表的相关研究文献。文献[6]采用主从自由度的方式来考虑梁端带铰,进行了结构大转角分析,但推导过程比较复杂,很难为工程技术人员理解和应用;在大型通用程序ANSYS中,采用梁端自由度释放或耦合自由度的方式来考虑梁端带铰的问题^[7]。为此,本文在文献[4]的基础上,基于局部坐标系下应变和位移的线性关系,通过虚功原理导出该坐标系下单元杆端力与节点位移的关系,由结构坐标系与局部坐标系下杆端力及节点位移的总量关系及微分得到增量关系,从而获得平面梁单元在大位移、小应变条件下的几何非线性单元切线刚度矩阵,在此基础上根据带铰梁端弯矩为0的特征,导出了能考虑梁端带铰的单元切线刚度矩阵表达式。

1 平面梁单元切线刚度矩阵

不同时刻平面梁单元如图1所示。图1(a)中给出在结构坐标系OXY中初始时刻的平面梁单元,计算时刻 t 的位置与形状如图1(b)所示;设单元的局部坐标系为Oxy,该坐标系是随单元变形而转动的,它始终以节点 i 为原点,以节点 i 到 j 的连线方向为 x 轴,由 x 轴逆时针旋转 90° 为 y 轴。

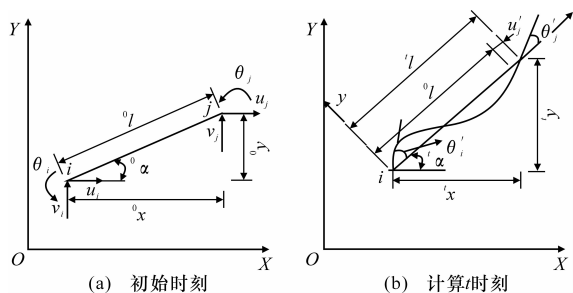


图1 不同时刻平面梁单元

设初始时刻单元节点在结构坐标系里的坐标为 (x_i, y_i) 和 (x_j, y_j) ,在计算时刻 t 结构坐标系中的位移向量 $\mathbf{d} = [u_i \quad v_i \quad \theta_i \quad u_j \quad v_j \quad \theta_j]^T$,在局部坐标系中的位移向量 $\mathbf{d}' = [u_i' \quad v_i' \quad \theta_i' \quad u_j' \quad v_j' \quad \theta_j']^T$ 。其中: u_i, v_i, θ_i 分别为节点 i 在结构坐标系OXY中的

水平位移、竖向位移及转角位移; u_j, v_j, θ_j 分别为节点 j 在结构坐标系OXY中的水平位移、竖向位移及转角位移; $u_i', v_i', \theta_i', u_j', v_j', \theta_j'$ 分别为节点 i 和 j 在局部坐标系(随转坐标系)Oxy中的水平位移、竖向位移及转角位移。

对比图1(a)、图1(b)可知^[8]

$$\left. \begin{aligned} {}^t x &= {}^0 x + u_j - u_i, \quad {}^t y = {}^0 y + v_j - v_i \\ {}^t \alpha &= \arctan\left(\frac{{}^t y}{{}^t x}\right) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中: ${}^0 x, {}^0 y$ 及 ${}^t x, {}^t y$ 分别为初始时刻和计算 t 时刻单元在结构坐标系OXY中水平及竖直方向的投影长度; ${}^t \alpha$ 为计算 t 时刻单元与结构坐标系X轴的夹角。

平面梁单元在局部坐标系中的节点位移为

$$\left. \begin{aligned} u_i' &= v_i' = v_j' = 0, \quad u_j' = {}^t l - {}^0 l \\ \theta_i' &= \theta_i - ({}^t \alpha - {}^0 \alpha), \quad \theta_j' = \theta_j - ({}^t \alpha - {}^0 \alpha) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中: ${}^0 l$ 为初始时刻梁单元长度; ${}^t l$ 为计算 t 时刻梁单元长度,其具体计算公式为

$$\left. \begin{aligned} {}^0 l &= \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2} \\ {}^t l &= \sqrt{(x_j - x_i + u_j - u_i)^2 + (y_j - y_i + v_j - v_i)^2} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

文献[9]指出工程上的几何非线性问题大都属于大位移小应变问题,基于局部坐标系相对于结构坐标系能将刚体平移和转动消除,因此可假定在局部坐标系内计算任意一点的拉压应变 ϵ_a 和弯曲应变 ϵ_b 时仍只需取线性项,即

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_a \\ \epsilon_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{du'}{dx} \\ -z \frac{d^2 v'}{dx^2} \end{bmatrix} \quad (4)$$

式中: z 为应变计算点到中性轴的距离; u', v' 分别为单元 i, j 内任意一点在局部坐标系Oxy下的水平和竖向位移

由文献[8]可知,单元轴向位移 u' 和挠度 v' 可设为

$$\left. \begin{aligned} u' &= a_0 + a_1 x \\ v' &= b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式中: a_0, a_1, b_1, b_2, b_3 均为待定常数,联立式(2)与式(5)可求出。

再将式(5)代入式(4)可得

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{B} \mathbf{d}' \quad (6)$$

式中:应变矩阵 \mathbf{B} 为

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & 0 & 0 & \frac{1}{l} \\ 0 & \frac{6}{l^2}(1 - \frac{2x}{l}) & \frac{2}{l}(2 - \frac{3x}{l}) & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{6}{l^2}(1-\frac{2x}{l})z & \frac{2}{l}(1-\frac{3x}{l})z \end{bmatrix}$$

设局部坐标系的杆端力向量为 $\mathbf{f}' = [f_i^x \ f_i^y \ m_i \ f_j^x \ f_j^y \ m_j]^T$, 其中括号内变量分别为 i 端和 j 端在局部坐标系下沿 x 、 y 轴的力及绕 z 轴的弯矩, 由虚功原理可导出在局部坐标系内杆端力向量 \mathbf{f}' 与位移向量 \mathbf{d}' 的关系为

$$\mathbf{f}' = \mathbf{k}' \mathbf{d}' \quad (7)$$

式中: \mathbf{k}' 为单元 i 、 j 计算 t 时刻在局部坐标系内的单元刚度矩阵, 即

$\mathbf{k}' =$

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}$$

式中: EA 、 EI 分别为单元的抗压刚度和抗弯刚度。

由于 u_i' 、 v_i' 、 v_j' 恒为 0, 对式(2) 的后 3 项 u_i' 、 θ_i' 、 θ_j' 微分, 得到局部坐标系下的位移微分 $\delta \mathbf{d}' = [\delta u_i' \ \delta v_i' \ \delta \theta_i' \ \delta u_j' \ \delta v_j' \ \delta \theta_j']^T$, 用结构坐标系下的位移微分 $\delta \mathbf{d} = [\delta u_i \ \delta v_i \ \delta \theta_i \ \delta u_j \ \delta v_j \ \delta \theta_j]^T$ 表达的形式为

$$\delta \mathbf{d}' = \mathbf{T} \delta \mathbf{d} \quad (8)$$

其中

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{s}{l} & \frac{c}{l} & 1 & \frac{s}{l} & -\frac{c}{l} & 0 \\ -c & -s & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{s}{l} & \frac{c}{l} & 0 & \frac{s}{l} & -\frac{c}{l} & 1 \end{bmatrix}$$

式中: $s = \sin(\alpha)$; $c = \cos(\alpha)$; \mathbf{T} 为位移转换矩阵。

设平面梁单元在结构坐标系的节点力向量为 $\mathbf{F} = [F_i^x \ F_i^y \ M_i \ F_j^x \ F_j^y \ M_j]^T$, 其中括号内变量分别为结构坐标系下的力和弯矩, 由静力学关系可导出

$$\mathbf{F} = \mathbf{t}^T \mathbf{f}' \quad (9)$$

其中

$\mathbf{t} =$

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

将式(9) 两边微分可得

$$\delta \mathbf{F} = \delta \mathbf{t}^T \mathbf{f}' + \mathbf{t}^T \delta \mathbf{f}' \quad (10)$$

对于 $\delta \mathbf{t}^T \mathbf{f}'$, 将其展开为

$$\delta \mathbf{t}^T \mathbf{f}' = \begin{cases} \delta c f_i^x - \delta s f_i^y \\ \delta s f_i^x + \delta c f_i^y \\ 0 \\ \delta c f_j^x - \delta s f_j^y \\ \delta s f_j^x + \delta c f_j^y \\ 0 \end{cases} \quad (11)$$

式中: $\delta c = -\frac{s}{l} A \delta d$; $\delta s = -\frac{c}{l} A \delta d$; $\mathbf{A} = [s \ -c \ 0 \ -s \ c \ 0]$ 。

上述式中各变量的含义见前面相关部分, 为统一表达式, 改写式(11) 为

$$\delta \mathbf{t}^T \mathbf{f}' = \mathbf{K}_n \delta \mathbf{d} \quad (12)$$

其中

$$\mathbf{K}_n = \begin{bmatrix} -\left(\frac{s}{l} f_i^x + \frac{c}{l} f_i^y\right) \mathbf{A} \\ \left(\frac{c}{l} f_i^x - \frac{s}{l} f_i^y\right) \mathbf{A} \\ 0 \\ -\left(\frac{s}{l} f_j^x + \frac{c}{l} f_j^y\right) \mathbf{A} \\ \left(\frac{c}{l} f_j^x - \frac{s}{l} f_j^y\right) \mathbf{A} \\ 0 \end{bmatrix}$$

式中: f_i^x 、 f_i^y 、 f_j^x 、 f_j^y 的计算利用式(7) 来进行。

为得到 $\mathbf{t}^T \delta \mathbf{f}'$ 用 $\delta \mathbf{d}$ 表达的形式, 先对式(7) 微分有

$$\delta \mathbf{f}' = \delta \mathbf{k}' \mathbf{d}' + \mathbf{k}' \delta \mathbf{d}' \quad (13)$$

由式(2) 与式(8) 可知

$$\delta l = \delta u_j' = \mathbf{M} \delta \mathbf{d} \quad (14)$$

式中: $\mathbf{M} = [-c \ -s \ 0 \ c \ s \ 0]$ 。

对式(7) 中的 \mathbf{k}' 微分, 并联立式(14), 可将 $\delta \mathbf{k}' \mathbf{d}'$ 写成

$$\delta \mathbf{k}' \mathbf{d}' = \mathbf{k}_l' \delta \mathbf{d} \quad (15)$$

且有

$$\mathbf{k}_l^1 = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l^2} u_j' \mathbf{M} \\ -\frac{6EI}{l^3} (\theta_i' + \theta_j') \mathbf{M} \\ -\frac{2EI}{l^2} (2\theta_i' + \theta_j') \mathbf{M} \\ -\frac{EA}{l^2} u_j' \mathbf{M} \\ \frac{6EI}{l^3} (\theta_i' + \theta_j') \mathbf{M} \\ -\frac{2EI}{l^2} (\theta_i' + 2\theta_j') \mathbf{M} \end{bmatrix}$$

联立式(8),可将式(13)的 $\mathbf{k}' \delta \mathbf{d}'$ 写成

$$\mathbf{k}' \delta \mathbf{d}' = \mathbf{k}_l^2 \delta \mathbf{d} \quad (16)$$

且有

$$\mathbf{k}_l^2 = \mathbf{k}' \mathbf{T}$$

联立式(12)、式(15)、式(16),可将式(10)改写成

$$\delta \mathbf{F} = [\mathbf{K}_n + \mathbf{t}^T (\mathbf{k}_l^1 + \mathbf{k}_l^2)] \delta \mathbf{d} \quad (17)$$

至此,可得到平面梁单元大位移小应变切线刚度矩阵 \mathbf{K}_i 为

$$\mathbf{K}_i = \mathbf{K}_n + \mathbf{t}^T (\mathbf{k}_l^1 + \mathbf{k}_l^2) \quad (18)$$

由以上推导过程可知,相对于文献[4],本文将局部坐标系下的刚度矩阵建立在即时构形的参数上,因而更能反映状态变量的变化。

2 梁端带铰时的单元切线刚度矩阵

2.1 一端带铰

假如铰在梁元的 i 端,此时有 $m_i = 0$,由式(7)的第 3 行并联立式(2)中的 $u_i' = v_i' = v_j' = 0$ 可得

$$\theta_i' = -\frac{1}{2} \theta_j' \quad (19)$$

再将式(19)代入式(7)以消去 θ_i' ,可得到 i 端有铰的梁元刚度矩阵 \mathbf{k}' 为

$$\mathbf{k}' = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & 0 & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{3EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & 0 & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & 0 & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{3EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & 0 & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{3EI}{l} \end{bmatrix} \quad (20)$$

作与前面相同的推导,可得到 i 端带铰时的平面梁单元大位移小应变切线刚度矩阵 \mathbf{K}_i 的表达式,其中 \mathbf{k}_l^1 的具体表达式为

$$\mathbf{k}_l^1 = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l^2} u_j' \mathbf{M} \\ -\frac{3EI}{l^3} \theta_j' \mathbf{M} \\ 0 \\ -\frac{EA}{l^2} u_j' \mathbf{M} \\ \frac{3EI}{l^3} \theta_j' \mathbf{M} \\ -\frac{3EI}{l^2} \theta_j' \mathbf{M} \end{bmatrix} \quad (21)$$

当铰在梁元的 j 端时,同样可求出各矩阵的具体表达式。

2.2 两端均有铰

在梁元两端均有铰的情况下,梁元实际上成了杆元,有

$$\theta_i' = \theta_j' = 0 \quad (22)$$

两端有铰的梁元刚度矩阵 \mathbf{k}' 为

$$\mathbf{k}' = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & 0 & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & 0 \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & 0 & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & 0 & 0 & \frac{12EI}{l^3} & 0 \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & 0 & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

将式(22)代入式(15)可得两端有铰的 \mathbf{k}_l^1 表达式,进行与前面相同推导最终可得 \mathbf{K}_i 的表达式。

3 算例分析

(1) 图 2(a) 为铰接方棱形框架在对角点受一对拉力 $2P$ 作用,框架每条边长为 L 、抗弯刚度为 EI 、框架受力角点垂直位移为 w 、不受力角点水平位移为 u 、框架边与水平方向的夹角为 θ_0 。根据荷载及结构对称的特点,取 $1/2$ 结构进行计算,见图 2(b)。每条边均划分成 10 个单元,其中对靠近铰的左右 2 个相邻单元类型分别选用本文推导的带铰单元,所得计算结果见图 3,其中解析解见文献[10]。

(2) 图 4 为桁架结构,对其进行考虑几何非线性

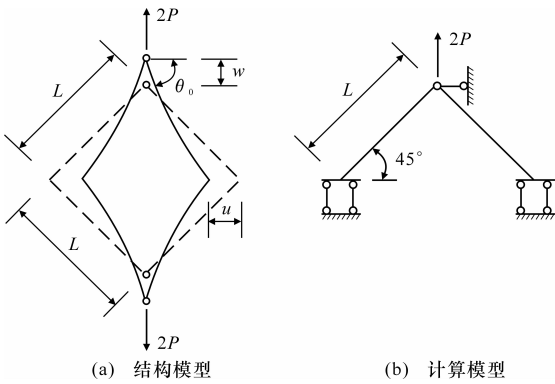


图2 对角点受拉力作用时的铰接方菱形框架

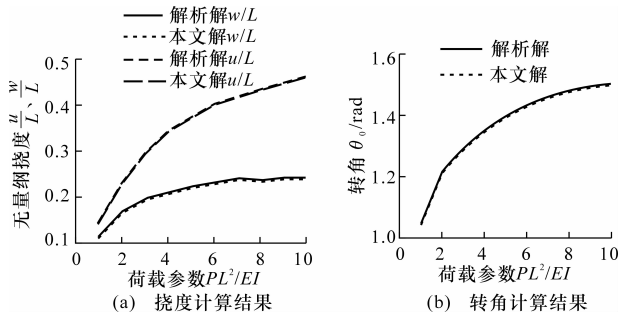


图3 铰接方菱形框架的荷载参数与位移曲线

的结构分析。其中:在荷载作用下,杆件材料一直处在线弹性阶段工作,弹性模量 $E = 2 \times 10^4 \text{ kN/cm}^2$, 杆件的横截面面积为 $A = 4 \text{ cm}^2$, C点竖向挠度计算结果如图5所示。

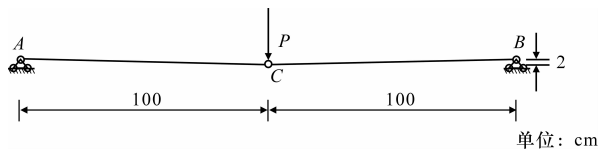


图4 桁架结构

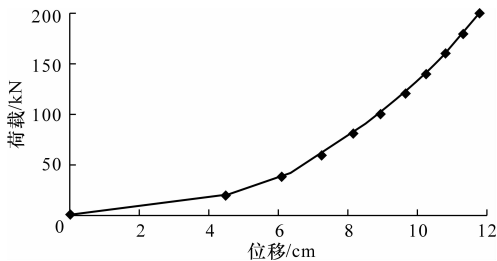


图5 C点的荷载与竖向位移曲线

从文献[8]可知,在荷载 $P = 20 \text{ kN}$ 时,C点竖向位移的解析解为 4.5183 cm , 本文计算值为 4.5222 cm 。因此,2个实例的计算结果完全表明了本文列式的正确性。

4 结 语

(1)基于结构坐标系和局部坐标系下的节点力

与位移的总量及增量关系,结合随转坐标系下的即时单元刚度矩阵获得的结构坐标系下平面梁单元在不带铰和带铰情况下的切线刚度矩阵,具有很高的精度和效率。

(2)该方法易于理解,便于编程及实际工程中的应用。

(3)该方法很容易推广到空间梁在不带铰和带铰情况下考虑几何非线性的切线刚度矩阵的研究。

参考文献:

References:

- [1] 肖汝诚. 桥梁结构分析及程序系统[M]. 北京:人民交通出版社,2002.
- [2] 吕和祥,朱莉芬,马莉颖. 大转动梁的几何非线性分析讨论[J]. 计算结构力学及其应用,1995,12(4): 485-490.
LU He-xiang, ZHU Ju-fen, MA Li-ying. Discussion of analyzing of geometric non-linear beams with large rotations[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 1995, 12(4): 485-490.
- [3] Fleming J F. Nonlinear static analysis of cable-stayed bridge structures[J]. Computers and Structures, 1979, 10(4): 621-635.
- [4] 王斌华,邵雨虹,吕彭民. 基于 ANSYS 的 450 t 提梁机结构有限元分析[J]. 筑路机械与施工机械化, 2011, 28(6): 74-77.
WANG Bin-hua, SHAO Yu-hong, LU Peng-min. Finite element analysis of 450 t girder hoisting machine's structure based on ANSYS[J]. Road Machinery & Construction Mechanization, 2011, 28(6): 74-77.
- [5] 黄文,李明瑞,黄文彬. 杆系结构的几何非线性分析-I: 平面问题[J]. 计算结构力学及其应用, 1995, 12(1): 7-16.
HUANG Wen, LI Ming-rui, HUANG Wen-bin. Geometric non-linear analysis of frame structures- I: dimensional problem[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 1995, 12(1): 7-16.
- [6] Jelenic G, Crisfield M A. Non-linear 'master-slave' relationships for joints in 3-D beams with large rotations[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1996, 135(3/4): 211-228.
- [7] 王新敏. ANSYS 工程结构数值分析[M]. 北京:人民交通出版社,2007.
- [8] 朱慈勉,汪榴,江利仁,等. 计算结构力学[M]. 上海:上海科学技术出版社,1992.
- [9] 朱伯芳. 有限单元法原理与应用[M]. 北京:中国水利水电出版社,1998.
- [10] 陈至达. 杆、板、壳大变形理论[M]. 北京:科学出版社,1994.