

# 斜交墩截面刚度与弯曲正应力

李传习,陶 伟,董创文

(长沙理工大学 土木与建筑学院,湖南 长沙 410076)

**摘 要:**斜交墩与正交墩受力的不同主要体现在截面刚度与弯曲正应力,通过理论分析得出斜交墩顺桥向截面刚度相对于正交墩增大,并推导了采用主惯性矩、斜交角和主轴坐标系坐标表示的斜交墩弯曲正应力公式,得到了在顺桥向弯矩作用下斜交墩截面中性轴的位置与斜交角的关系。通过对某实桥的斜交墩进行截面惯性矩计算,建立有限元模型计算弯曲正应力,对研究结论进行了验证。研究表明:主轴坐标系任意坐标点的弯曲正应力随着斜交角度变化而变化,且存在极值,该点应力极值对应的斜交角度仅与该点的主轴坐标系纵横坐标比值有关;矩形斜交墩(包括空心墩)顶点处最大弯曲正应力存在最不利的斜交角,并分别得到了矩形实心墩与空心墩角度的解析表达式。

**关键词:**桥梁工程;斜交墩;斜交角度;截面刚度;弯曲正应力

**中图分类号:**U443.22

**文献标志码:**A

## Sectional stiffness and bending normal stress of oblique pier

LI Chuan-xi, TAO Wei, DONG Chuang-wen

(School of Civil Engineering and Architecture, Changsha University of  
Science and Technology, Changsha 410076, Hunan, China)

**Abstract:** The differences between oblique pier's stress and orthogonal pier's stress are mainly embodied in the sectional stiffness and bending normal stress. The enlarge of the oblique pier sectional stiffness along the direction of the bridge relative to the orthogonal pier was found through theoretical analysis. The formula of the oblique pier's bending normal stress which is expressed by the principal moment of inertia, skew angle, point coordinate of principal axis coordinate system was deduced. The relation of the section neutral axis's location and the skew angle under the action of bending moment which is along the direction of the bridge was got. Through the calculation of section moment of inertia of a real bridge's oblique pier, and the establishment of the finite element models for the calculation of bending normal stress, the conclusions were verified. The results show that the bending normal stress of one point in principal axis coordinate system changes with the change of skew angle, and there is an extreme value. The skew angle of this point corresponding to the maximum stress is only relation with the ratio of the  $x$ -coordinate to  $y$ -coordinate of the point in principal axis coordinate system. The apex of maximum bending stress of rectangular oblique pier (including hollow pier) has the most adverse oblique angle, the angle's analytical expression of rectangular solid pier and hollow pier are respectively obtained. 1 tab, 7 figs, 10 refs.

**Key words:** bridge engineering; oblique pier; skew angle; sectional stiffness; bending normal stress

## 0 引言

高等级公路及高速铁路桥梁在与河流呈斜交跨越时,考虑到减小桥墩阻水面积以及满足通航要求等因素,常采用正交连续梁配合斜交墩的桥式,即将桥墩做成与水流方向一致但与梁轴线斜交的斜交墩,如茨淮新河双线特大桥<sup>[1-3]</sup>。斜交墩在承受桥梁上部结构传来的荷载(包括汽车制动产生的摩阻水平力)时,其顺桥向截面刚度以及应力响应均与相应正交墩不同,有必要加以研究。中国研究斜交墩受力的文献较少,文献[1]将茨淮新河双线特大桥的斜交墩弹性刚度与相同尺寸的正交墩截面弹性刚度对比,发现斜交墩顺桥向截面弹性刚度增大,但并未阐述原因。本文通过理论分析得出斜交墩顺桥向弹性刚度增大的原因,并基于梁弯曲正应力公式,推导了在弯矩作用下采用斜交角、主惯性矩和主轴坐标系坐标表示的斜交墩弯曲正应力公式,得到了顺桥向弯矩(根据右手螺旋法则,其矢量方向则为横桥向)作用下斜交墩截面中性轴的位置与斜交角的关系<sup>[4]</sup>。采用上述公式分析主轴坐标系中点的应力时发现:第二象限点应力随着斜交角度的增大,应力先增大后减小;第四象限点应力随着斜交角度的增大,应力先减小后增大;应力存在极大值,对应应力极大值的斜交角度仅与应力点两方向坐标的比值  $x/y$  有关;矩形斜交墩在同一弯矩作用下存在弯曲正应力最不利斜交角度,得到了该角度的解析表达式。

## 1 截面刚度

如图 1 所示,任取一截面形式,截面图形对主轴即  $X$  轴(桥墩横截面弱轴)、 $Y$  轴(桥墩横截面强轴)的惯性矩和惯性积分别为  $I_x$ 、 $I_y$ 、 $I_{xy}$ 。当桥墩采取斜交墩时(通常将桥墩截面弱轴方向置于水流方向),图 1 中截面固定不动,将  $XOY$  坐标系绕坐标原点  $O$  旋转  $\alpha$  角( $\alpha$  为桥墩截面的弱轴方向与桥梁横桥向的夹角,以逆时针旋转为正),得到一新的坐标系  $X_1OY_1$ <sup>[4-5]</sup>。由坐标变换可得

$$x_1 = x\cos(\alpha) + y\sin(\alpha)$$

$$y_1 = y\cos(\alpha) - x\sin(\alpha)$$

则有

$$I_{x_1} = \int_A [y\cos(\alpha) - x\sin(\alpha)]^2 dA =$$

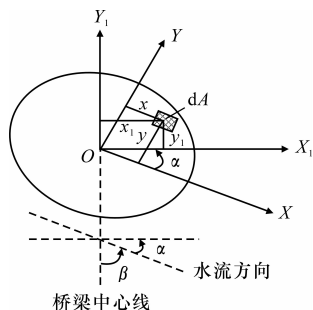


图 1 任意斜交墩截面

$$\begin{aligned} & \cos^2(\alpha) \int_A y^2 dA + \sin^2(\alpha) \int_A x^2 dA - \\ & 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) \int_A xy dA = \\ & I_x \cos^2(\alpha) + I_y \sin^2(\alpha) - I_{xy} \sin(2\alpha) = \\ & \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos(2\alpha) - I_{xy} \sin(2\alpha) \end{aligned} \quad (1)$$

$$I_{y_1} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cos(2\alpha) + I_{xy} \sin(2\alpha) \quad (2)$$

式中: $x$ 、 $y$  分别为主轴坐标系中的横、纵坐标; $x_1$ 、 $y_1$  分别为横桥方向与顺桥方向的坐标; $I_x$ 、 $I_y$  分别为正交墩顺桥向、横桥向惯性矩; $I_{x_1}$ 、 $I_{y_1}$  分别为斜交墩顺桥向、横桥向惯性矩; $I_{xy}$  为惯性积。

令惯性积为 0,并定义斜交角  $\beta = 90^\circ - \alpha$ ,式(1)、式(2)可简化为

$$\left. \begin{aligned} I_{x_1} &= \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cos(2\beta) \\ I_{y_1} &= \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos(2\beta) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

桥墩截面多设计为规则的双轴对称图形,其对称轴为主惯性轴,且桥墩顺桥向多布置为弱轴方向,可知  $I_{y_1} > I_{x_1}$ ,由式(3)得出截面惯性矩随斜交角变化曲线,如图 2 所示。

由图 2 可知,当  $\beta = 90^\circ$  时(桥墩与梁轴线正

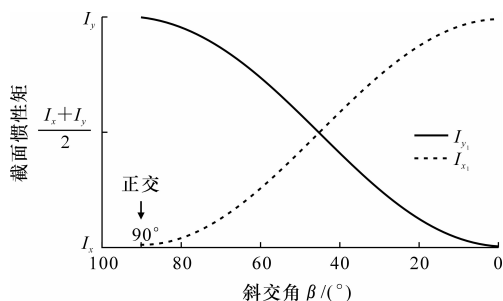


图 2 截面惯性矩随斜交角变化曲线

交),其顺桥向惯性矩最小,随着 $\beta$ 值减小(桥墩与梁轴线斜交),顺桥向惯性矩逐渐增大;在 $\beta = 45^\circ$ 时,顺桥向与横桥向惯性矩相等,直至 $\beta = 0$ 时,桥墩强弱轴方向置换。斜交墩截面刚度为截面惯性矩与弹性模量的乘积,因此,斜交墩顺桥向截面刚度较正交墩增大。

## 2 弯曲正应力

桥墩多为偏压构件,斜交墩较正交墩面积不变,轴向压力引起的正应力不变,所以,斜交墩应力与正交墩应力的不同主要体现在弯曲正应力<sup>[6]</sup>。

### 2.1 一般截面弯曲正应力

#### 2.1.1 弯曲正应力公式

如图3所示,将斜交墩的弯矩在主轴坐标系上分解,可得用斜交角度、主惯性矩和主轴坐标系中的点坐标表示的斜交墩弯曲正应力 $\sigma$ 为

$$\sigma = \frac{yM_x}{I_x} - \frac{xM_y}{I_y} = \frac{yM\sin(\beta)}{I_x} - \frac{xM\cos(\beta)}{I_y} = M \left[ \frac{y\sin(\beta)}{I_x} - \frac{x\cos(\beta)}{I_y} \right] \quad (4)$$

式中: $M$ 为斜交墩顺桥向所承受的弯矩; $M_x$ 为弯矩在 $x$ 轴的分量; $M_y$ 为弯矩在 $y$ 轴的分量。

式(4)适用于采用双轴对称截面的斜交墩。

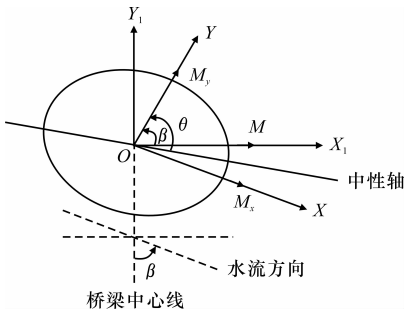


图3 截面弯矩

#### 2.1.2 截面中性轴的位置

因为中性轴上各点处的正应力均为0,令 $x_0$ 、 $y_0$ 代表中性轴上任一点的坐标,则由式(4)可得中性轴的方程为

$$M \left[ \frac{y_0 \sin(\beta)}{I_x} - \frac{x_0 \cos(\beta)}{I_y} \right] = 0 \quad (5)$$

由此可见,中性轴是一条通过截面形心的直线,如图3所示,其与 $Y$ 轴的夹角 $\theta$ 满足下式

$$\tan(\theta) = \left| \frac{x_0}{y_0} \right| = \frac{I_y \sin(\beta)}{I_x \cos(\beta)} = \frac{I_y}{I_x} \tan(\beta) \quad (6)$$

一般情况下,由于截面的 $I_y \neq I_x$ ,因而中性轴与顺桥向弯矩所在的平面并不相互垂直。而桥墩弯曲变形时的位移总是垂直于中性轴,所以,斜交墩变

形以后的轴线将不在顺桥向弯矩所在的平面内。对于这种弯曲,本文称为斜弯曲。

#### 2.1.3 弯曲正应力方向

由式(4)可看出,弯曲正应力方向与 $\frac{y\sin(\beta)}{I_x} - \frac{x\cos(\beta)}{I_y}$ 的正负有关,当斜交角 $\beta$ 在区间 $[0, 90^\circ]$ ,且

$$x > 0, y > 0, \beta > \arctan\left(\frac{xI_x}{yI_y}\right)$$

$$\text{有 } \frac{y\sin(\beta)}{I_x} - \frac{x\cos(\beta)}{I_y} > 0$$

$$x > 0, y > 0, \beta < \arctan\left(\frac{xI_x}{yI_y}\right)$$

$$\text{有 } \frac{y\sin(\beta)}{I_x} - \frac{x\cos(\beta)}{I_y} < 0$$

$$x < 0, y < 0, \beta > \arctan\left(\frac{xI_x}{yI_y}\right)$$

$$\text{有 } \frac{y\sin(\beta)}{I_x} - \frac{x\cos(\beta)}{I_y} < 0$$

$$x < 0, y < 0, \beta < \arctan\left(\frac{xI_x}{yI_y}\right)$$

$$\text{有 } \frac{y\sin(\beta)}{I_x} - \frac{x\cos(\beta)}{I_y} > 0$$

$$x < 0, y > 0, \text{对任意 } \beta \text{ 有 } \frac{y\sin(\beta)}{I_x} - \frac{x\cos(\beta)}{I_y} > 0$$

$$x > 0, y < 0, \text{对任意 } \beta \text{ 有 } \frac{y\sin(\beta)}{I_x} - \frac{x\cos(\beta)}{I_y} < 0$$

因此可以得出,在顺桥向弯矩作用下,点位处于第二、四象限(在以桥墩横截面的弱轴为横坐标轴的坐标系中,下同,略)时,随着斜交角度在 $[0, 90^\circ]$ 区间变化,其应力方向不变;点位处于第一、三象限时,随着斜交角度在 $[0, 90^\circ]$ 区间变化,其应力方向改变,临界点为 $\arctan\left(\frac{xI_x}{yI_y}\right)$ 。

#### 2.1.4 弯曲正应力极值

对式(4)中的 $\beta$ 求导,可得下式

$$\sigma' = M \left[ \frac{y\cos(\beta)}{I_x} + \frac{x\sin(\beta)}{I_y} \right] \quad (7)$$

分析处于第二、四象限中任一点的应力,对于第二象限的任一点位,有 $x < 0, y > 0$ ;对于第四象限的任一点位,有 $x > 0, y < 0$ 。取函数 $f(\beta) = \sigma$ ,有

$$f'(\beta_0) = 0 \text{ 时, } \frac{y\cos(\beta)}{I_x} + \frac{x\sin(\beta)}{I_y} = 0$$

$$\text{有 } \tan(\beta_0) = \frac{-yI_y}{xI_x}, \beta_0 = \arctan\left(\frac{-yI_y}{xI_x}\right) \quad (8)$$

则 $\beta$ 在区间 $[0, 90^\circ]$ 时,函数 $f(\beta)$ 存在驻点 $\beta_0$ (可能的极值点);对 $f(\beta)$ 再次求导,有

$$f''(\beta) = M\left[\frac{-y\sin(\beta)}{I_x} + \frac{x\cos(\beta)}{I_y}\right]$$
$$f''(\beta_0) = M\left[\frac{-y\sin(\beta_0)}{I_x} + \frac{x\cos(\beta_0)}{I_y}\right] = \frac{M}{\cos(\beta_0)}\left(\frac{y^2 I_y}{x I_x^2} + \frac{x}{I_y}\right)$$

可以得到  $\begin{cases} f''(\beta_0) < 0 & \text{第二象限} \\ f''(\beta_0) > 0 & \text{第四象限} \end{cases}$

由函数极值原理可知,当 $\beta$ 在区间 $[0,90^\circ]$ 变化时,位于第二象限(应力方向不变)的点的应力先增大后减小;位于第四象限(应力方向不变)的点的应力先减小后增大;两者应力均存在极值,极值对应的 $\beta$ 角大小为 $\arctan(-yI_y/(xI_x))$ ,对任意截面,其值仅与 $y/x$ 有关<sup>[7-10]</sup>。

2.2 矩形截面弯曲正应力

实心矩形墩的截面惯性矩  $I_x = ab^3/12, I_y = a^3b/12$ ( $a$ 与 $b$ 为矩形边长,且 $a > b$ )将其代入式(4)得到

$$\sigma = 12M\left[\frac{y\sin(\beta)}{ab^3} - \frac{x\cos(\beta)}{ba^3}\right] \tag{9}$$

对于矩形截面,无论斜交角为多少,其第二象限的顶点一定为截面应力最不利位置,将其坐标 $x = -a/2, y = b/2$ 代入式(9),可得最不利应力 $\sigma_{\max}$ 为

$$\sigma_{\max} = 6M\left[\frac{\sin(\beta)}{ab^2} + \frac{\cos(\beta)}{ba^2}\right] \tag{10}$$

将坐标以及惯性矩代入式(8),可得最不利应力对应的斜交角度为 $\arctan(a/b)$ ,仅与矩形两边长的比值有关。

对于空心矩形墩,则有

$$\beta_0 = \arctan\left[\frac{-y(ba^3/12 - b'a'^3/12)}{x(b^3a/12 - b'^3a'/12)}\right]$$

将 $x = -a/2, y = b/2$ 代入,可得

$$\beta_0 = \arctan\left[\frac{-b(ba^3/12 - b'a'^3/12)}{a(b^3a/12 - b'^3a'/12)}\right] \tag{11}$$

式(11)为空心矩形墩弯曲正应力最不利斜交角表达式,式中 $a', b'$ 为空心墩内边长。

3 实桥算例验证

西水大桥位于张家界—花垣高速公路项目第25合同段,原设计为 $6 \times 40 \text{ m} + 80 \text{ m} + 145 \text{ m} + 80 \text{ m}$ 的预应力T梁和高墩大跨径预应力混凝土连续刚构桥梁。由于不能满足水利部门的泄洪要求,后修改为 $4 \times 40 \text{ m} + 80 \text{ m} + 145 \text{ m} + 80 \text{ m}$ 预应力混凝土连续T梁和大跨径预应力混凝土连续梁桥,并将主墩做成与水流方向一致(与路线方向成约 $65^\circ$ )的斜高

墩,以满足泄洪要求。桥墩总高为64 m,包括3 m高的八边形墩帽(墩帽上布置临时锚固块与支座垫石)以及20 m高的变截面段,其余为标准截面段。以桥墩的主要部位即标准截面段进行分析,如图4所示。

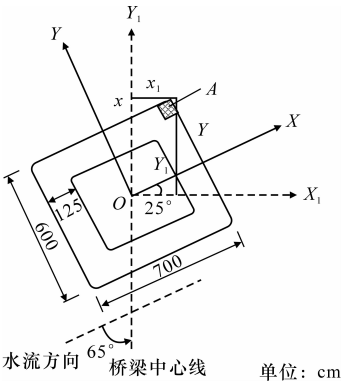


图4 西水大桥斜交墩标准截面

3.1 西水大桥斜交墩截面刚度

标准截面惯性矩的计算为

$$I_x = \frac{1}{12} \times 7\,000 \times 6\,000^3 - \frac{1}{12} \times 4\,500 \times 3\,500^3 = 1.099\,2 \times 10^{14} \text{ mm}^4$$

$$I_y = \frac{1}{12} \times 6\,000 \times 7\,000^3 - \frac{1}{12} \times 3\,500 \times 4\,500^3 = 1.449\,2 \times 10^{14} \text{ mm}^4$$

$$I_{x_1} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cos(2\beta)$$

$$I_{y_1} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos(2\beta)$$

由 $\beta = -65^\circ$ (顺时针旋转为负)可得

$$I_{x_1} = 1.161\,7 \times 10^{14} \text{ mm}^4$$

$$I_{y_1} = 1.386\,7 \times 10^{14} \text{ mm}^4$$

$I_{x_1} > I_x$ ,顺桥向惯性矩增大,与理论分析相符。

3.2 西水大桥斜交墩弯曲正应力

正交桥墩一般均满足规范的构造要求,通常只按杆单元计算,完成一般的稳定性强度计算即可。而斜交墩支座传下来的力与墩身轴线不在同一方向,该墩具有一定的空间受力特性,因此需建立桥墩的三维空间实体模型。采用通用有限元程序 ANSYS,实体单元 solid 45 模拟斜交墩,桥墩的有限单元划分网格如下页图5所示。对墩顶施加 $14\,300 \text{ kN} \cdot \text{m}$ 的弯矩,将弯矩以面均布荷载的形式加载在下页图6所示的锚固块上(图6中4个长方体块为临时锚固块,左右1号组2号组各2个锚固块以桥墩轴线对称布置,1号组锚固块与2号组锚固块所施加的面均布荷载方向相反,实质为加一对力偶),建立多个不同斜交角的斜交墩模型进行分

析,以提取不同斜交角下的斜交墩标准段矩形截面顶点(选取弯曲正应力大于 0,且方向不变的顶点)最大弯曲正应力,见表 1。

由表 1 数据,可得到弯曲正应力随斜交角变化曲线如图 7 所示。由图 7 可以看出:弯曲正应力随着斜交角度的增大先增大后减小,且存在极值点,与理论分析相符;极值点对应的斜交角为 49°,将其与式(11)所计算的斜交角进行比较,发现两者大小吻合,验证了式(11)的正确性。



图 5 西水大桥斜交墩网格划分

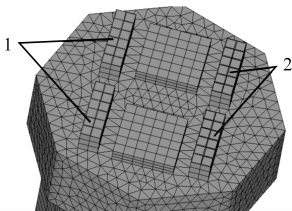


图 6 西水大桥斜交墩加载细部

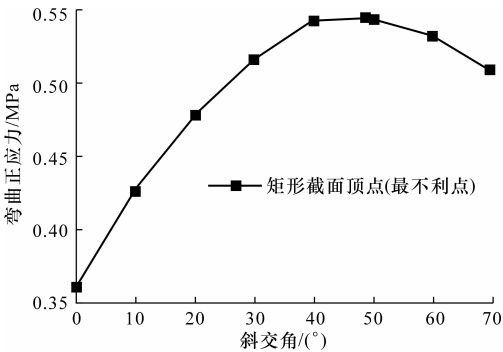


图 7 西水大桥弯曲正应力随斜交角变化曲线

表 1 矩形墩不同斜交角时的顶点最大弯曲正应力(大于 0 且方向不变)

斜交角/(°)	0	10	20	30	40	49	50	60	70	80	90
顶点最大弯曲正应力/MPa	0.360	0.426	0.479	0.516	0.544	0.545	0.544	0.532	0.508	0.465	0.397

4 结 语

- (1)斜交角变化时,顺桥向截面惯性矩随之改变。一般截面形式的斜交墩刚度相对于同样截面形式的正交墩的刚度增加。
- (2)斜交墩截面中性轴与该截面承受的弯矩的矢量方向一般不平行。
- (3)当弯矩的大小和方向不变、截面形式不变时,桥墩截面由于弯矩引起的顶点最大应力存在最不利斜交角度,并得到了较为简便的最不利斜交角度计算公式。

参考文献:

References:

[ 1 ] 徐贤德,李 杨.铁路正交连续梁桥斜交墩的设计与应用[J].铁道工程学报,2010(8):62-66.  
XU Xian-de,LI Yang. Design and application of skew pier of railway orthogonal continuous beam bridge [J]. Journal of Railway Engineering Society, 2010 (8):62-66.

[ 2 ] 乔 健,阚 越.斜交跨河设桥的思考[J].铁道标准设计,2004(4):25.  
QIAO Jian,KAN yue. Thinking of oblique crossing a bridge[J]. Railway Standard Design,2004(4):25.

[ 3 ] 李天恩.铁路斜交桥梁的设置[J].科技交流,2004 (1):82-84.  
LI Tian-en. The set of railway oblique bridge[J]. Com-

munication of Science and Technology. 2004(1):82-84.

[ 4 ] 李学罡,蔡明兮,韦成龙.材料力学[M].长春:吉林科学技术出版社,2006.

[ 5 ] 陈永辉,王新泉.公路软土地基处理中 Y 型沉管灌注桩异形特性研究[J].中国公路学报,2008,21(5):19-25.  
CHEN Yong-hui,WANG Xin-quan. Research on abnormality characteristic of Y-shaped tube-sinking cast-in-situ pile in highway soft ground[J]. China Journal of Highway and Transport,2008,21(5):19-25.

[ 6 ] 姚玲森,项海帆,顾安邦.桥梁工程[M].北京:人民交通出版社,2008.

[ 7 ] 同济大学应用数学系.高等数学[M].北京:高等教育出版社,2002.

[ 8 ] 田务国.连续函数极值的求法[J].科学咨询,2008 (增 2):74-75.  
TIAN Wu-guo. Calculation method of extreme value of continuous function[J]. Policy & Scientific Consult,2008(S2):74-75.

[ 9 ] 祝明桥,蒋伟中,霍海强.混凝土巨型箱形截面梁及其设计理论[J].建筑科学与工程学报,2010,27(3):85-88.  
ZHU Ming-qiao,JIANG Wei-zhong,HUO Hai-qiang. Concrete huge box section girder and its design theory [J]. Journal of Architecture and Civil Engineering, 2010,27(3):85-88.

[10] Ali K H M,Kamil O. Simulation of flow around piers [J]. Journal of Hydraulic Research, 2002, 40 (2): 161-174.