

混凝土对称配筋梁的抗弯承载力分析与计算

郭军庆,熊二刚,杨 坤

(长安大学 建筑工程学院,陕西 西安 710061)

摘 要:针对混凝土双筋矩形梁在承载能力极限状态下可能出现的受拉纵筋应变超限问题,重新界定了其截面受压区的最小高度;根据混凝土双筋矩形梁抗弯承载力的计算理论,建立了混凝土对称配筋梁抗弯承载力计算的基本公式;对混凝土对称配筋梁的抗弯承载力进行相关计算,并提出了相应的实用计算方法。工程算例表明:对于混凝土对称配筋梁的抗弯承载力设计问题,应采用给出的实用计算方法进行相关计算,以确保安全;若按一般“双筋梁法”计算,则多数情况下结果偏于不安全,且最大误差可达10%以上。

关键词:结构工程;混凝土梁;对称配筋;抗弯承载力;受压区高度;纵筋

中图分类号:TU375.1; TU317.3 **文献标志码:**A

Analysis and calculation for flexural capacity of symmetrically reinforced concrete beams

GUO Jun-qing, XIONG Er-gang, YANG Kun

(School of Civil Engineering, Chang'an University, Xi'an 710061, Shaanxi, China)

Abstract: In order to deal with the problem that the strain of reinforcing bars in tension may be beyond the limit in the design of a doubly-reinforced concrete beam, the minimum depth of compression zone of its cross section was redefined. On the basis of computational theory for the flexural strength of doubly-reinforced concrete beams, the basic formulas for flexural strength of such beams were put forth. From the analysis of effect of depth of compression zone on stress of longitudinal reinforcement in compression, the corresponding practical method of computing the flexural strength of a symmetrically reinforced concrete beam was put forth. The example projects indicate that it is necessary to adopt the proposed method for the design of a symmetrically-reinforced concrete beam so as to ensure its safety. If traditional method was used, it would be unsafe in most cases, and the error could be more than 10% in the worst case. 2 tabs, 2 figs, 9 refs.

Key words: structure engineering; reinforced concrete beam; symmetric reinforcement; flexural capacity; depth of compression zone; longitudinal reinforcement

0 引言

混凝土对称配筋梁是实际工程中十分常见的梁型。如框架结构的顶层,常有框架梁支座截面与跨中截面的设计内力控制值比较接近的情况,此时为简化配筋,设计者往往会采用对称配筋截面。这种对称配筋梁不仅设计简单,计算方便,而且便于施工,不会发生纵筋上下错置。但是,作者经分析发现,由于该种梁的抗弯承载力计算采用了简化近似的方法,则在许多情况下并未满足现行规范的有关要求,使梁的设计留有安全隐患^[1]。为此,本文首先对混凝土矩形梁截面受压区的最小高度进行了重新界定;根据混凝土双筋矩形梁抗弯承载力的计算理论,建立了对称配筋梁抗弯承载力计算的基本公式,并通过相关分析,提出了混凝土对称配筋梁抗弯承载力的实用计算方法^[2-9]。算例表明,在工程设计中,采用本文方法对混凝土对称配筋梁的抗弯承载力进行相关计算很有必要。

1 问题的提出

混凝土双筋矩形梁抗弯承载力的基本公式为

$$\alpha_1 f_c b x + f_y' A_s' = f_y A_s \quad (1)$$

$$M_u = \alpha_1 f_c b x (h_0 - \frac{x}{2}) + f_y' A_s' (h_0 - a_s') \quad (2)$$

式中: x 为截面受压区高度(mm); h_0 为截面有效高度(mm); a_s 、 a_s' 分别为受拉、受压纵筋合力点到截面边缘的距离(mm); A_s 、 A_s' 分别为受拉、受压纵筋的截面面积(mm²); M_u 为截面极限弯矩设计值(N·mm); α_1 为混凝土受压区等效矩形应力图系数,按规范取值; b 为截面宽度; f_c 为混凝土轴心抗压设计强度; f_y 、 f_y' 分别为纵筋抗拉、抗压设计强度(MPa)。

应用式(1)、式(2)时,必须满足以下适用条件: $x \leq \xi_b h_0$; $x \geq 2a_s'$ 。适用条件中的 ξ_b 为界限相对受压区高度。

当不满足第22页适用条件、即 $x < 2a_s'$ 时,可近似取 $x = 2a_s'$, M_u 按下式计算

$$M_u = f_y A_s (h_0 - a_s') \quad (3)$$

对于混凝土对称配筋梁, $A_s = A_s'$,一般 $f_y = f_y'$,则 $A_s f_y = A_s' f_y'$,代入式(1)可得: $x = 0$,亦即 $x < 2a_s'$,取 $x = 2a_s'$,故抗弯承载力通常按式(3)进行计算。

上述方法即为目前混凝土对称配筋梁抗弯承载力的一般计算方法,称为“双筋梁法”。该方法虽然简

单方便,但仍须符合现行规范关于承载力极限状态计算的一般规定,即截面混凝土不超过C50级时,在抗弯承载力极限状态下,梁截面的受拉纵筋应变 ϵ_s 应满足图1的要求。

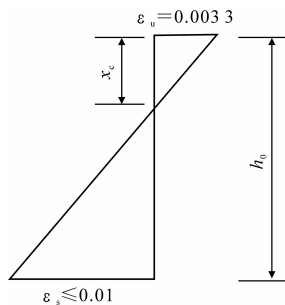


图1 极限状态的截面应变

在图1中, ϵ_u 为截面受压区边缘混凝土的极限压应变; x_c 为截面的中和轴高度(mm)。显然,当 x_c 为定值时,受拉纵筋应变 ϵ_s 将随梁截面高度 h 的增加而增大(因 $h_0 = h - a_s$,一般 a_s 取35 mm或60 mm)。 x_c 与 x 的换算公式为

$$x_c = x / \beta_1 \quad (4)$$

式中: β_1 为截面等效矩形应力图系数,当混凝土不超过C50级时,取0.8。

在进行混凝土梁的抗弯承载力计算时,通常取 $a_s' = 35$ mm,则当 $x = 2a_s' = 70$ mm时,由式(4)可得, $x_c = 87.5$ mm,则 h 为400~800 mm。由图1计算可得, ϵ_s 为0.01~0.026,即大多数梁的受拉纵筋应变已经超过0.01这一限值要求。因此,必须对混凝土对称配筋梁的抗弯承载力计算进行深入分析。

2 截面受压区最小高度

在文献[3]中,作者已按图1(取 $\epsilon_s = 0.01$)推得混凝土梁截面受压区最小高度应取 $0.2h_0$ 的重要结论,并提出式(1)、式(2)的适用条件应调整为

$$x \geq \max\{0.2h_0, 2a_s'\} \quad (5)$$

当截面高度 $h = 400 \sim 800$ mm时,一般均有 $0.2h_0 > 2a_s'$ 。所以,在对称配筋混凝土梁抗弯承载力计算中,取 $x = 2a_s'$ 已不满足式(5)要求,便会上述极限状态下受拉纵筋应变的超限问题。由此可见,对于混凝土双筋矩形梁的抗弯承载力计算,须按式(5)界定截面受压区的最小高度。

3 基本公式

在混凝土对称配筋梁的抗弯承载力计算中,因 $A_s = A_s'$,一般 $f_y = f_y'$,考虑式(5)的要求,则由式(1)可知,在极限状态下,受压纵筋的平均应力 σ_s' 达

不到屈服强度,如图 2 所示。

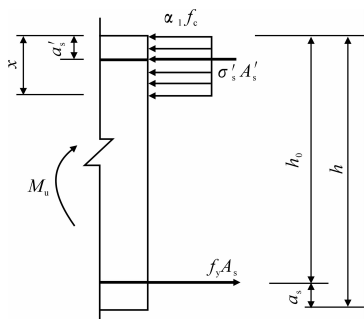


图 2 极限状态的计算

根据静力平衡条件,以 σ'_s 取代式(1)、式(2)中的 f'_y ,并整理可得

$$\alpha_1 f_c b x = (f_y - \sigma'_s) A_s \quad (6)$$

$$M_u = \alpha_1 f_c b x (h_0 - \frac{x}{2}) + \sigma'_s A_s (h_0 - a'_s) \quad (7)$$

以上两式的适用条件为

$$x \leq \xi_b h_0; x \geq \max\{0.2h_0, 2a'_s\}.$$

式(6)、式(7)即为混凝土对称配筋梁抗弯承载力计算的基本公式。

4 截面受压区高度的影响分析

由式(6)、式(7)可知,对于截面设计(求 A_s)和截面复核(求 M_u)问题,须已知截面受压区高度 x 或 σ'_s 才能求解。通过分析 x 对受压纵筋应力、配筋量及抗弯承载力的影响规律,确定 x 的合理取值。

4.1 受压纵筋应力

令 $M_u = M$,对式(6)、式(7)进行化简,并取 $f_y = f'_y$ 可得

$$\sigma'_s = \frac{M - \alpha_1 f_c b x (h_0 - x/2)}{M + \alpha_1 f_c b x [(x/2) - a'_s]} f'_y \quad (8)$$

对式(8) x 求导,且令 $\alpha_1 f_c b = \lambda$,化简可得

$$\frac{d\sigma'_s}{dx} = -\lambda f'_y \frac{(M - (\lambda x^2/2))(h_0 - a'_s)}{[M + \lambda x((x/2) - a'_s)]^2} \quad (9)$$

式(8)表明,当按极限状态进行抗弯承载力计算时,混凝土对称配筋梁受压纵筋的平均应力 σ'_s 小于屈服强度,即受压纵筋不能充分发挥作用;由式(9)可知, $\frac{d\sigma'_s}{dx} < 0$,表明当截面尺寸、材料强度及设计弯矩值 M 一定时, σ'_s 将随截面受压区高度 x 的增大而减小,即 x 愈大,受压纵筋的抗压作用愈小。

4.2 配筋量

同样,令 $M_u = M$,将式(6)、式(7)化简可得

$$A_s = \frac{M + \alpha_1 f_c b x [(x/2) - a'_s]}{f_y (h_0 - a'_s)} \quad (10)$$

对式(10) x 求导可得

$$\frac{dA_s}{dx} = \frac{\alpha_1 f_c b (x - a'_s)}{f_y (h_0 - a'_s)} \quad (11)$$

由适用条件知: $\frac{dA_s}{dx} > 0$,说明当截面尺寸、材料

强度及设计弯矩值 M 一定时,配筋量 A_s (等于 A'_s) 随 x 的增大而增加。当 x 取截面受压区最小高度,即 $x = \max\{0.2h_0, 2a'_s\}$ 时, A_s (等于 A'_s) 达到最小,即最经济;当 x 达到截面受压区最大高度,亦即 $x = \xi_b h_0$ 时, A_s (等于 A'_s) 将达到最大,也最不经济。由式(6),对混凝土对称配筋梁的最大配筋率 ρ_{\max} 的讨论如下。

当 $x = \xi_b h_0$ 时,由式(6)可得

$$A_{s\max} = \frac{\alpha_1 \xi_b f_c b h_0}{f_y - \sigma'_s} \quad (12)$$

结合以上受压纵筋的应力分析,并考虑截面的经济合理性,只有令 $\sigma'_s = 0$ 时, $A_{s\max}$ 取值最小,即

$$A_{s\max} = \xi_b \frac{\alpha_1 f_c b h_0}{f_y} \quad (13)$$

式(13)为混凝土对称配筋梁纵筋的最大配筋量计算公式,即与单筋矩形梁的要求相同,则有

$$\rho_{\max} = \alpha_1 \xi_b \frac{f_c}{f_y} \quad (14)$$

即混凝土对称配筋梁纵筋的最大配筋率应按单筋矩形梁计算。

4.3 抗弯承载力

对式(6)、式(7)化简可得

$$M_u = f_y A_s (h_0 - a'_s) - \alpha_1 f_c b x (\frac{x}{2} - a'_s) \quad (15)$$

对式(15) x 求导得

$$\frac{dM_u}{dx} = -\alpha_1 f_c b (x - a'_s) \quad (16)$$

由适用条件可知: $\frac{dM_u}{dx} < 0$,说明当截面尺寸、

材料强度及配筋量 A_s (等于 A'_s) 一定时,混凝土对称配筋梁的抗弯承载力 M_u 将随 x 的减小而增大;当 x 等于截面受压区最小高度时, M_u 达到最大值,即截面材料最大限度得到利用。但当截面尺寸和材料强度一定时,由式(14)可知,随着配筋量 A_s (等于 A'_s) 的增加, M_u 将随之呈线性增大,当 $A_s = A_{s\max} = \xi_b \frac{\alpha_1 f_c}{f_y}$ 时, M_u 达到极限抗弯承载力。

综合上述分析,结合适用条件可知,应取 $x = \max\{0.2h_0, 2a'_s\}$ 对混凝土对称配筋梁的抗弯承载

力进行相关计算。

5 计算方法

5.1 截面设计

根据上述分析,混凝土对称配筋梁抗弯承载力的截面设计可分下列 2 种情况。

(1) 当 $0.2h_0 > 2a'_s$ 时,取 $x = 0.2h_0$,代入式(10)计算受拉和受压纵筋,即

$$A_s = A'_s = \frac{M + 0.2\alpha_1 f_c b h_0 (0.1h_0 - a'_s)}{f_y (h_0 - a'_s)} \quad (17)$$

(2) 当 $0.2h_0 \leq 2a'_s$ 时,取 $x = 2a'_s$,同样代入式(10)可得

$$A_s = A'_s = \frac{M}{f_y (h_0 - a'_s)} \quad (18)$$

由于式(18)是“双筋梁法”所采用的通用公式,故与式(17)对比可作如下讨论。

(1) 在实际工程中,情况(1)远比情况(2)多见,所以式(17)应为混凝土对称配筋梁抗弯承载力截面设计的一般公式,式(18)可作为特例。

(2) 按式(17)计算时,受拉与受压纵筋的配筋量均有所增加,说明仅按式(18)进行截面设计将偏于不安全。

(3) 设式(17)、式(18)的配筋量计算差值为 ΔA_s ,则 $\Delta A_s = \frac{0.2\alpha_1 f_c b h_0 (0.1h_0 - a'_s)^2}{f_y (h_0 - a'_s)^2}$,对 h_0 求导: $\frac{d\Delta A_s}{dh_0} = \frac{0.2\alpha_1 f_c b (0.1h_0 - a'_s)^2}{f_y (h_0 - a'_s)^2} > 0$,说明梁的截面高度越大,按式(18)计算的纵筋配筋量误差越大,也越不安全。

(4) 对按式(17)或式(18)所得配筋量 A_s (等于 A'_s)同样应满足 $\rho_{\min} \leq \rho \leq \rho_{\max}$,其中 ρ_{\max} 按式(14)计算, ρ 为配筋率。

5.2 截面复核

同理,混凝土对称配筋梁抗弯承载力的截面复核也分下列 2 种情况。

(1) 当 $0.2h_0 > 2a'_s$ 时,取 $x = 0.2h_0$,代入式(14)计算抗弯承载力,即

$$M_u = f_y A_s (h_0 - a'_s) - 0.2\alpha_1 f_c b h_0 (0.1h_0 - a'_s) \quad (19)$$

(2) 当 $0.2h_0 \leq 2a'_s$ 时,取 $x = 2a'_s$,同样代入式(15)可得式(3)。

结合式(13)、式(14)可作如下讨论。

(1) 同截面设计,式(19)应为混凝土对称配筋梁抗弯承载力截面复核的一般公式,式(3)可作为特例。

(2) 在截面复核时,首先应验算截面是否超筋或少筋,即当 $\rho_{\min} \leq \rho \leq \rho_{\max}$ 时,方可按上述方法计算。特别当 $\rho > \rho_{\max}$ 时,应取 $A_s = A_{s\max}$,代入式(14)或式(3)计算 M_u 。

(3) 由于情况(1)远比情况(2)多见,所以当按式(19)计算时,截面抗弯承载力设计值 M_u 有所减小,说明按式(3)复核截面偏于不安全。

6 算 例

例 1:已知混凝土梁的截面尺寸 $bh = 250 \text{ mm} \times 700 \text{ mm}$,混凝土为 C40 级,钢筋采用 HRB400,设计弯矩 $M = 170 \text{ kN} \cdot \text{m}$,对称配筋。

要求:计算所需的配筋量 A_s (等于 A'_s)。
解:设 $a_s = a'_s = 35 \text{ mm}$, $h_0 = 665 \text{ mm}$,查得: $f_c = 19.1 \text{ MPa}$, $f_t = 1.71 \text{ MPa}$, $f_y = 360 \text{ MPa}$ 。其中 f_t 为混凝土轴心抗拉设计强度。

分别按“双筋梁法”和本文方法进行计算,结果列于表 1。

表 1 混凝土对称配筋梁截面设计及结果对比					
计算方法	x/mm	ξ	$A_s(A'_s)/\text{mm}^2$	$\rho/\%$	误差 / %
双筋梁法	70.0	0.105	749.6	0.45	-10.53
本文方法	123.0	0.200	837.8	0.50	0

注: $\rho_{\max} = 2.75\%$,取 $\rho_{\min} = 0.45f_t/f_y = 0.21\%$; $\xi = x/h_0$ 。

例 2:已知混凝土梁的截面尺寸 $bh = 250 \text{ mm} \times 500 \text{ mm}$,混凝土为 C30 级,钢筋采用 HRB400,截面对称配筋如下。

$A_s = A'_s = 1\,473 \text{ mm}^2 (3\Phi 25 \text{ mm})$;
 $A_s = A'_s = 2\,454 \text{ mm}^2 (5\Phi 25 \text{ mm}, \text{双排})$ 。

要求:计算以上 2 种配筋所对应的 M_u 。
解: $f_c = 14.3 \text{ MPa}$, $f_t = 1.43 \text{ MPa}$, $f_y = 360 \text{ MPa}$ 。

$a_s = a'_s = 35 \text{ mm}$, $h_0 = 465 \text{ mm}$;
 $a_s = a'_s = 60 \text{ mm}$, $h_0 = 440 \text{ mm}$ 。

分别按“双筋梁法”和本文方法进行计算,结果见下页表 2。

由表 1、表 2 可知,“双筋梁法”的计算结果均偏于不安全,且最大误差可达 10% 以上。因此,混凝土对称配筋梁的抗弯承载力应按本文方法进行计算,以确保安全。

表 2 混凝土对称配筋梁截面复核及结果对比

计算方法		$\rho/\%$	$\rho_{\max}/\%$	$M_u/(\text{kN}\cdot\text{m})$	误差 /%
双筋梁法	1	1.27		228.02	1.70
	2	2.20		335.71	8.30
本文方法	1	1.27	2.06	224.20	0
	2	2.20	2.06	309.99	0

注:取 $\rho_{\min}=0.2\%$ 。

7 结 语

(1)混凝土对称配筋梁属于双筋截面梁的特殊形式,在极限状态下,受压纵筋的平均应力达不到屈服强度,若采用“双筋梁法”进行计算,则在多数情况下偏于不安全。

(2)本文提出的计算方法是对“双筋梁法”的修正和完善,对工程设计中混凝土对称配筋梁的抗弯承载力设计具有较高的应用和参考价值。

(3)通过大量的电算结果分析,对于截面设计问题,当梁的截面高度小于 600 mm、且混凝土强度等级较低时,“双筋梁法”与本文方法的结果误差较小;反之,误差则明显增大。

(4)对混凝土对称配筋梁的纵筋配置首次提出了最大配筋率的限值要求,不仅使抗弯承载力计算更趋合理经济,也消除了以往计算中的盲点问题。

(5)对于工程中常用的 T 形、I 形截面梁,当纵筋对称配置时,参照本文分析易得出相应的计算公式及方法,故未作讨论。

参考文献:

References:

[1] GB 50010—2002,混凝土结构设计规范[S].

[2] 程文瀾,康谷贻,颜德姮.混凝土结构[M].北京:中国建筑工业出版社,2002.

[3] 郭军庆,雷自学.钢筋混凝土受弯构件受压区高度的限定条件[J].工业建筑,1999,29(8):64-65,70.

GUO Jun-qing, LEI Zi-xue. The confining conditions for compression zone of flexural RC members[J]. Industrial Construction,1999,29(8):64-65,70.

[4] 徐新生,纪涛,郑永峰.FRP 筋混凝土梁弯曲试验及设计方法探讨[J].建筑结构,2008,38(11):45-48.

XU Xin-sheng,JI Tao,ZHENG Yong-feng. Test and design method on flexural resistance performance of concrete beam with FRP bar[J]. Building Structure, 2008,38(11):45-48.

[5] 叶列平,王宇航.中、美规范钢筋混凝土梁斜截面承载力的计算对比[J].建筑科学与工程学报,2008,25(1):88-95.

YE Lie-ping,WANG Yu-hang. Calculation and comparison of shear strength of RC beams between Chinese and American codes[J]. Journal of Architecture and Civil Engineering,2008,25(1):88-95.

[6] 张志权,赵胜民,张玉芬,等.外方内圆钢管混凝土轴压承载力计算方法[J].建筑科学与工程学报,2009,26(2):63-67.

ZHANG Zhi-quan,ZHAO Sheng-min,ZHANG Yu-fen,et al. Caculation method of axial bearing capacity of concrete-filled square steel tubular columns reinforced by inner circular steel tube[J]. Journal of Architecture and Civil Engineering,2009,26(2):63-67.

[7] 赵均海,张兆强,魏学英,等.固支圆板在线性荷载下的极限解[J].长安大学学报:自然科学版,2008,28(1):81-86.

ZHAO Jun-hai,ZHANG Zhao-qiang ,WEI Xue-ying et al. Plastic limit analysis of clamped circular plate under linear distributed load[J]. Journal of Chang'an University: Natural Science Edition, 2008, 28 (1): 81-86.

[8] 赵均海,孟晓健,刘建军,等.圆中空夹层钢管混凝土短柱的承载力[J].长安大学学报:自然科学版,2009,29(1):70-74.

ZHAO Jun-hai,MENG Xiao-jian,LIU Jian-jun,et al. Bearing capacity of concrete-filled double-skin steel-tube stub column[J]. Journal of Chang'an University: Natural Science Edition,2009,29(1):70-74.

[9] 魏巍巍,贡金鑫,田磊.钢筋混凝土构件受剪承载力对比分析[J].建筑科学与工程学报,2010,27(2):25-37,44.

WEI Wei-wei,GONG Jin-xin,TIAN Lei. Comparative analysis of shear capacity for reinforced concrete members[J]. Journal of Architecture and Civil Engineering,2010,27(2):25-37,44.