

圆射流零阶色散关系式的线性稳定性理论推导

侯 婕,曹建明,李跟宝,汪月英,熊 玮,李明龙

(长安大学 汽车学院,陕西 西安 710064)

摘 要:为了研究粘性圆射流喷射进入不可压缩气体介质中的碎裂过程,利用线性化的纳维-斯托克斯控制方程组与线性化的运动学和动力学边界条件,采用流函数方法,对碎裂过程进行线性稳定性分析。结果表明:可推导出圆射流零阶对称波形的量纲一色散准则关系式,且该色散准则关系式只与量纲一参数——维伯数 We 、雷诺数 Re 、欧拉数 Eu 、马赫数 Ma 、气液流速比 U 、气液压力比 P 等有关。

关键词:汽车工程;线性稳定性理论;圆射流;色散关系式

中图分类号:U464.136

文献标志码:A

Derivation on linear stability theory of zero order dispersion relation in liquid jets

HOU Jie, CAO Jian-ming, LI Gen-bao, WANG Yue-ying, XIONG Wei, LI Ming-long

(School of Automobile, Chang'an University, Xi'an 710064, Shaanxi, China)

Abstract: In order to study the disintegrated process of a viscous liquid jet moving in an incompressible gas medium, a linear stability analysis was carried out using the linearized Navier-Stokes equations, the linearized kinematic and dynamic boundary conditions, and employing the stream function method. The results indicate that: the dimensionless dispersion relation of the zero-order varicose waves in circular liquid jets can be derivated, which is related to some dimensionless parameters, they are Weber number We ; Reynolds number Re ; Euler number Eu ; Mach number Ma , gas-liquid velocity ratio U and gas-liquid pressure ratio P . 2 figs, 6 refs.

Key words: automotive engineering; linear stability theory; circular liquid jets; dispersion relation

0 引 言

喷嘴喷射出的实心液柱称为液体圆射流,如孔式喷嘴的喷雾,它是车辆、锅炉、航空航天等载运工具的燃烧室中喷雾的主要形式之一。喷雾是燃烧过程的首要环节。

圆射流碎裂过程的理论研究是发动机喷雾研究的重要环节,是国际流体与燃烧学界的热点研究课

题^[1]。目前,国际上对圆射流碎裂过程的理论研究多采用线性稳定性理论,该理论的核心和关键点在于色散关系式的推导。由于推导色散关系式需要具备扎实的流体力学和数学知识,加之推导过程异常繁复,往往需要反复研究才能有所进展。国内外许多名牌大学和研究机构广泛使用的大型发动机工作过程数值计算程序 KIWA 中,圆射流碎裂模型就采用了 Reitz 等人的零阶色散关系式^[2]。该程序采用

Fortran 语言编写,有数万条语句,由美国研制,目前是中国各高校和研究机构培养发动机工作过程方向博士研究生的重要研究工具之一。圆射流受周围气体的扰动作用,一出喷嘴就会形成一定模式的表面波,零阶表面波对应于单股状对称波形(varicose mode)的圆射流,它是大多数常规喷雾圆射流表面波所展示的形态。

1 研究进度

Reitz 等人的粘性圆射流喷射进入不可压缩气流中零阶色散关系式为

$$\omega^2 + 2v_1 k^2 \omega \left[\frac{I_1'(ka)}{I_0(ka)} - \frac{2kl}{k^2 + l^2} \frac{I_1(ka)}{I_0(ka)} \frac{I_1'(la)}{I_0'(la)} \right] = \frac{\sigma k}{\rho_1 a^2} (1 - k^2 a^2) \left(\frac{l^2 - k^2}{l^2 + k^2} \right) \frac{I_1(ka)}{I_0(ka)} + \frac{\rho_2}{\rho_1} (U - i\omega/k)^2 k^2 \left(\frac{l^2 - k^2}{l^2 + k^2} \right) \frac{I_1(ka)}{I_0(ka)} \frac{K_0(ka)}{K_1(ka)} \quad (1)$$

式中: ω 为圆频率,其实部 ω_r 为表面波增长率; v_1 为液体的运动学粘度; k 为表面波数; I_0 、 I_1 分别为第一类 0 阶、1 阶贝塞尔函数; K_0 、 K_1 分别为第二类 0 阶、1 阶贝塞尔函数; a 为喷嘴出口半径; σ 为液体的表面张力; ρ_1 为液体的密度; ρ_2 为气体的密度; U 为气液体的相对速度; $l^2 = k^2 + \omega/v_1$; $i = \sqrt{-1}$ 。

1995 年, Li 又推导出了一个粘性圆射流喷射进入不可压缩气流中的零阶色散关系式^[3]。

$$(\omega + ikU_1)^2 + (\omega + ikU_g)^2 \left[\frac{\rho_g I_1(ka)}{\rho_l I_0(ka)} \frac{K_0(ka)}{K_1(ka)} \right] + 2v_1 k^2 (\omega + ikU_l) \left[1 + \frac{I_1'(ka)}{I_0(ka)} \right] + 4v_1^2 k^3 \left[k \frac{I_1'(ka)}{I_0(ka)} - s \frac{I_1(ka)}{I_0(ka)} \frac{I_1'(sa)}{I_1(sa)} \right] = \frac{\sigma k}{\rho_1 a^2} \frac{I_1(ka)}{I_0(ka)} (1 - k^2 a^2) \quad (2)$$

式中: U_1 为圆射流的喷射速度; U_g 为气体的速度; ρ_g 为气体的密度; $s^2 = k^2 + \omega/v_1$, 也就是 Reitz 等人方程中的 l^2 。

经过推导比较,式(1)、式(2)略有差别,其原因在于 Reitz 和 Li 所采用的线性运动学边界条件不同,Reitz 的运动学边界条件简化得更多。如果 Reitz 采用了 Li 的运动学边界条件,或 Li 采用了 Reitz 的运动学边界条件,则以上 2 个色散关系式完全相同。

由于 Li 在推导该色散关系式时所采用的控制方程和边界条件除了线性化之外,没有任何简化,因此被认为已将圆射流的零阶线性色散关系式推导到了极致,此后国际上再也没有这方面的进一步研究。

然而,由于 Reitz 和 Li 的推导均采用了有量纲形式的控制方程和边界条件,因此其色散关系式也是有量纲形式的。这样一来,在根据他们的色散关系式编制数值计算程序而得到的分析结果中,仅能够分析维伯数 We 、气液流速比 U 、液体粘性和气体马赫数 Ma 等因素对圆射流碎裂过程的影响。根据相似理论,量纲一的准则关系式要比有量纲形式的关系式包含更多的信息量,适用范围更广。

2 模型的建立

图 1 所示为圆射流表面波的示意图,图中参数已经量纲一化。考虑一个三维圆柱射流,初始半径为 1,密度为 ρ_l ,以压力 P_l 、速度 U_l 喷射进入密度为 ρ_g 、压力为 P_g 、速度为 U_g 的气体介质中。

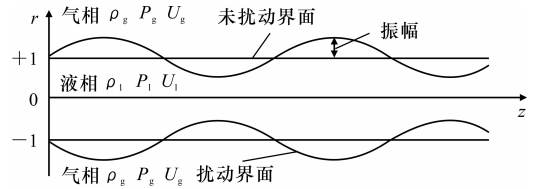


图 1 圆射流表面波

液流被看作是牛顿流体,并且质量力忽略不计,这是由于对实际的喷雾应用来说, Froude 数是非常大的。液流经扰动后,合流参数值为

$$\vec{u}_{i,\text{tot}} = \vec{U}_i + \vec{u}_i, \quad p_{i,\text{tot}} = P_i + p_i$$

式中: $\vec{u}_i = (u_r, u_\theta, u_z)_i$, $p_i = p_i(r, \theta, z)$ 分别指扰动速度和扰动压力; $\vec{u}_{i,\text{tot}}$ 、 $p_{i,\text{tot}}$ 分别为合流速度和合流压力; \vec{U}_i 、 P_i 分别为基流速度和基流压力, $\vec{U}_i = (U_r, U_\theta, U_z)_i = (0, 0, 1)_i = \text{const}$, $P_i = P_i(0, 0, 1) = \text{const}$;下标 i 为 l 表示液相, i 为 g 表示气相。

在动量守恒控制方程中,可将扰动速度项线性化,下标 r, θ, z 表示柱坐标 (r, θ, z) 。

由于圆射流为空间轴对称流动, θ 方向各项为 0, 有 $u_{i,\theta} = 0$, $\frac{\partial u_{i,\theta}}{\partial \theta} = 0$, 从而得到线性化的量纲一纳维-斯托克斯控制方程组,其形式如下。

液相、气相连续性方程

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r u_{i,r})}{\partial r} + \frac{\partial u_{i,z}}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

液相 r -方向动量方程

$$\frac{\partial u_{lr}}{\partial t} + \frac{\partial u_{lr}}{\partial z} = -Eu_l \frac{\partial p_l}{\partial r} + \frac{1}{Re_l} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_{lr}}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u_{lr}}{\partial z^2} - \frac{u_{lr}}{r^2} \right] \quad (4)$$

液相 r -方向动量方程

$$\frac{\partial u_{1z}}{\partial t} + \frac{\partial u_{1z}}{\partial z} = -Eu_1 \frac{\partial p_1}{\partial z} + \frac{1}{Re_1} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_{1z}}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u_{1z}}{\partial z^2} \right] \quad (5)$$

气相 r - 方向动量方程

$$\frac{1}{U} \frac{\partial u_{gr}}{\partial t} + \frac{\partial u_{gr}}{\partial t} = -\frac{1}{\gamma Ma_g^2} \frac{\partial p_g}{\partial r} \quad (6)$$

气相 z - 方向动量方程

$$\frac{1}{U} \frac{\partial u_{gz}}{\partial t} + \frac{\partial u_{gz}}{\partial z} = -\frac{1}{\gamma Ma_g^2} \frac{\partial p_g}{\partial z} \quad (7)$$

方程中的量纲一参数为液体欧拉数 Eu_1 、液体雷诺数 Re_1 、气体马赫数 Ma_g 、气液流速比 U 和绝热指数 γ 。

量纲一纳维 - 斯托克斯控制方程组式(3) ~ 式(7)的解必须满足流动运动学边界条件和流动动力学边界条件。在线性稳定性理论中,采用气液交界面处,即 $r = 1$ 时的线性化的边界条件。液相和气相的量纲一运动学边界条件方程分别表示为

$$u_{1r} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \right) \xi \quad (8)$$

$$u_{gr} = \left(\frac{1}{U} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \right) \xi \quad (9)$$

式中: ξ 为气液交界面处的扰动振幅,其量纲一形式表示为 $\xi = \xi_0 \exp(\omega t + ikz)$, ξ_0 表示气液交界面处的初始扰动振幅; t 为时间, k 为表面波数。

液相和气相的量纲一动力学边界条件为

$$\frac{\partial u_{i,r}}{\partial z} + \frac{\partial u_{i,z}}{\partial r} = 0 \quad (10)$$

$$p_1 - 2 \frac{1}{Re_1 Eu_1} \frac{\partial u_{1r}}{\partial r} - P p_g + \frac{1}{We_1 Eu_1} \left(1 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \xi = 0 \quad (11)$$

方程中的量纲一参数为液体韦伯数 We_1 、气液压力比 P 。

3 液相推导

为了对控制方程求解,对液相和气相都引入了流函数 ψ_i ,其方程表示为

$$u_{i,r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_i}{\partial z}, u_{i,z} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_i}{\partial r} \quad (12)$$

$$\psi_i(r, z, t) = r \psi_i(r) \exp(\omega t + ikz) \quad (13)$$

将式(12)代入式(4)和式(5)中,可得

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \right) = -Eu_1 \frac{\partial p_1}{\partial r} + \frac{1}{Re_1} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \right) \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \right) - \frac{1}{r^2} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \right) \right] \quad (14)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \right) = -Eu_1 \frac{\partial p_1}{\partial z} + \frac{1}{Re_1} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \right) \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \right) \right] \quad (15)$$

方程(15)对 r 求偏导减去方程(14)对 z 求偏导,得

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r^2} \right) + \\ & \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r^2} \right) = \\ & \frac{1}{Re_1} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r^2} \right) \right) + \right. \\ & \left. \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r^2} \right) - \right. \\ & \left. \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \right) \right) + \right. \\ & \left. \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \right) \right) + \frac{1}{r^2} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} \right) \right] \quad (16) \end{aligned}$$

定义

$$\frac{d^2 \psi_1(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi_1(r)}{dr} - \left(k^2 + \frac{1}{r^2} \right) \psi_1(r) = A \quad (17)$$

$$s_1^2 = k^2 + Re_1(\omega + ik) \quad (18)$$

式(16)变成

$$\frac{d^2 A}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dA}{dr} - \left(s_1^2 + \frac{1}{r^2} \right) A = 0 \quad (19)$$

式(19)为一阶修正贝塞尔方程,其解为

$$A(r) = a_1 I_1(s_1 r) + a_2 K_1(s_1 r) \quad (20)$$

式中: I_1 、 K_1 分别为第一类和第二类的 1 阶贝塞尔函数; a_1 、 a_2 为式(19)解的常数。

将式(20)代入式(17),得

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 \psi_1(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi_1(r)}{dr} - \left(k^2 + \frac{1}{r^2} \right) \psi_1(r) = \\ & a_1 I_1(s_1 r) + a_2 K_1(s_1 r) \quad (21) \end{aligned}$$

式(21)的通解为

$$\begin{aligned} \psi_1(r) = & c_1 I_1(s_1 r) + c_2 K_1(s_1 r) + c_3 I_1(kr) + \\ & c_4 K_1(kr) \quad (22) \end{aligned}$$

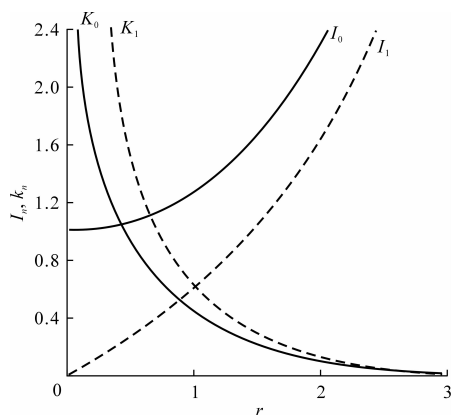
式中: c_1 、 c_2 、 c_3 、 c_4 为积分常数,由于在圆柱中心线上 r 方向速度分量等于 0,根据 I_n 、 K_n 曲线(下页图 2)可知,作为边界条件,当 $r \rightarrow 0$ 时, $K_n \rightarrow \infty$,因此,有 $c_2 = 0$, $c_4 = 0$ 。

式(21)的通解变成

$$\psi_1(r) = c_1 I_1(s_1 r) + c_3 I_1(kr) \quad (23)$$

将式(23)代入式(13),得流函数

$$\begin{aligned} \psi_1(r, z, t) = & r [c_1 I_1(s_1 r) + \\ & c_3 I_1(kr)] \exp(\omega t + ikz) \quad (24) \end{aligned}$$

图2 第一类、第二类贝塞尔函数 I_n 、 K_n 曲线

将式(24)代入式(12),再代入运动学边界条件方程和动力学边界条件式(8)和式(10),并将圆射流的量纲一初始半径 $r=1$ 代入,可得到常数 c_1 和 c_3 的解

$$c_1 = -\frac{2K}{Re_1 I_1(s_1)} \xi_0 i, \quad c_3 = \frac{s_1^2 + k^2}{Re_1 k I_1(k)} \xi_0 i \quad (25)$$

将式(12)和式(25)代入式(5),得液相压力为

$$p_l = -\xi_0 \frac{(\omega_l + ik)(s_1^2 + k^2)}{kEu_1 Re_1} \frac{I_0(k)}{I_1(k)} \exp(\omega t + ikz) \quad (26)$$

4 气相推导

将式(12)代入式(6)和式(7),得

$$\left(\frac{1}{U} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\right) \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_g}{\partial z}\right) = -\frac{1}{\gamma Ma_g^2} \frac{\partial p_g}{\partial r} \quad (27)$$

$$\left(\frac{1}{U} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\right) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_g}{\partial r}\right) = -\frac{1}{\gamma Ma_g^2} \frac{\partial p_g}{\partial z} \quad (28)$$

根据与液相推导相同的步骤,可以得到气相的积分常数的解

$$d_2 = \frac{\omega_g/U + ik}{kK_1(k)} \xi_0 i \quad (29)$$

气相压力

$$p_g = \xi_0 \gamma Ma_g^2 \frac{(\omega/U + ik)^2}{k} \frac{K_0(k)}{K_1(k)} \exp(\omega t + ikz) \quad (30)$$

5 量纲一色散准则关系式

将式(26)和式(30)代入动力学边界条件式(11),可得到圆射流碎裂的零阶对称波形的量纲一色散准则方程式

$$\frac{1}{kEu_l} \frac{I_0(k)}{I_1(k)} \left\{ (\omega + ik)^2 + \frac{2k^2}{Re_1} (\omega + ik) \cdot \right.$$

$$\left. \left[1 + \frac{I_1'(k)}{I_0(k)} \right] - \frac{4k^3}{Re_l^2} \left[s \frac{I_1'(s)}{I_1(s)} \frac{I_1(k)}{I_0(k)} - k \frac{I_1'(k)}{I_0(k)} \right] \right\} + P \frac{\gamma Ma_g^2}{k} \frac{K_0(k)}{K_1(k)} (\omega/U + ik)^2 = \frac{1}{We_l Eu_l} (1 - k^2) \quad (31)$$

经过推导,如果将1995年Li等人的粘性圆射流喷射进入不可压缩气流中的零阶色散关系式(2)量纲一化,则可得到方程式(31);并且可以得到,圆射流碎裂的零阶对称波形的量纲一色散准则式(31)只与量纲一参数——维伯数 We 、雷诺数 Re 、欧拉数 Eu 、马赫数 Ma 、气液流速比 U 、气液压力比 P 等有关。

6 结 语

(1)应用线性化的纳维-斯托克斯控制方程组和线性化的运动学和动力学边界条件,采用流函数方法,对粘性圆射流喷射进入不可压缩气体介质中的碎裂过程进行线性稳定性分析,可推导出圆射流零阶对称波形的量纲一色散准则关系式。

(2)粘性圆射流碎裂的零阶对称波形的量纲一色散准则方程式只与无量纲参数——韦伯准则 We 、欧拉准则 Eu 、雷诺准则 Re 、气体马赫准则 Ma 、气液流速比 U 及气液压力比 P 有关;经过编程和数值计算,可以得到这些无量纲参数对粘性圆射流碎裂过程的影响。

参考文献:

References:

- [1] 曹建明. 喷雾学[M]. 北京:机械工业出版社,2005.
- [2] Reitz D B. Mechanism of atomization of a liquid jet [J]. Phys Fluids A, 1982, 25: 1730-1742.
- [3] Li X. Mechanism of atomization of a liquid jet [J]. American Society of Mechanical Engineers, 1995, 66: 113-120.
- [4] Chen T, Li X. Liquid jet atomization in a compressible gas streams [J]. Journal of Propulsion and Power, 1999, 15(3): 369-376.
- [5] Cao J M, Li X. Stability of plane liquid sheets in compressible gas streams [J]. Journal of Propulsion and Power, 2000, 16(4): 623-627.
- [6] Cao J M. Theoretical and experimental study of atomization from an annular liquid sheet [J]. Journal of Automobile Engineering, 2003, 217 (8): 735-743.