

# 基于裂缝特征的 PC 简支梁损伤刚度评估方法

赵 煜<sup>1,2</sup>, 周 博<sup>1</sup>, 贺拴海<sup>1</sup>, 葛耀君<sup>2</sup>

(1. 长安大学 公路学院, 陕西 西安 710064; 2. 同济大学 桥梁工程系, 上海 200092)

**摘 要:**为了研究预应力混凝土(PC)梁桥下挠与开裂后的结构性能评估方法,基于预应力混凝土简支梁的弯曲裂缝统计特征,考虑材料非线性特征,采用截面数值分析法,建立截面平衡迭代格式和截面损伤刚度表达式,提出了基于裂缝特征的预应力混凝土简支梁损伤刚度评估方法。分别采用规范法、基于实际裂缝特征的方法以及截面平衡分析法进行了模型桥验证。试验结果表明,截面一旦开裂,截面刚度迅速衰减,挠度迅速增大,刚度的衰减呈前快后慢的特点。采用本文提出的计算方法得到的荷载挠度曲线最接近于试验值。

**关键词:**桥梁工程;预应力混凝土梁;损伤刚度;截面分析;裂缝统计特征

**中图分类号:**U448.21

**文献标志码:**A

## Damage stiffness assessment method based on fracture characteristics of PC simply-supported beam

ZHAO Yu<sup>1,2</sup>, ZHOU Bo<sup>1</sup>, HE Shuan-hai<sup>1</sup>, GE Yao-jun<sup>2</sup>

(1. School of Highway, Chang'an University, Xi'an 710064, Shaanxi, China;

2. Department of Bridge Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

**Abstract:** In order to study the evaluation method of structural performance of PC beam after cracking and deformation, an iteration method of section equilibrium and an expression of damage bending rigidity are put forward with the section numerical analysis and material nonlinearity analysis based on fracture characteristics of PC simply-supported beam. The damage stiffness analysis method of PC simply-supported beam is presented. According to the model test, the results show that, once the section is cracked, the bending rigidity will decline accompanied by the increasing deformation, and the load-displacement curve in test is consistent with the one in using theoretical method. 2 tabs, 9 figs, 9 refs.

**Key words:** bridge engineering; prestressed concrete beam; damage stiffness; section analysis; statistical cracking characteristic

## 0 引 言

随着交通事业的发展,预应力混凝土桥梁因其自重轻、跨越能力大、耐久性好等优点而备受青睐。

随着预应力混凝土桥梁运营时间的延长,很大一部分出现了不同程度的开裂与下挠病害<sup>[1-3]</sup>。国内外学者和工程技术人员对预应力混凝土梁的研究主要集中在桥梁开裂下挠的原因分析、影响结构下挠和

开裂的主要因素及提出相应的处置对策<sup>[4-6]</sup>。如何简单地评估开裂损伤的预应力混凝土梁实际刚度,从而对损伤预应力混凝土桥梁使用状态和安全性进行评估,在中国尚属空白,急需开展相关研究工作<sup>[6-8]</sup>。本文基于预应力混凝土简支梁的弯曲裂缝统计特征,考虑材料非线性特征,采用截面数值分析法,提出了基于实测弯曲裂缝损伤参数的预应力混凝土简支梁损伤刚度分析方法,为开裂损伤的预应力混凝土梁桥安全性评估提供了重要思路。

## 1 弯曲裂缝损伤参数的建立

针对梁体的弯曲裂缝,按照统计学观点建立裂缝特征统计参数,主要包括:裂缝的平均高度  $\bar{h}_{cr}$ 、裂缝平均统计间距  $\bar{l}_{cr}$  和裂缝的总宽度  $\Delta_{cr}$  等<sup>[1]</sup>。这些量分别表示为

$$\left. \begin{aligned} \bar{h}_{cr} &= \frac{\sum_{i=1}^n h_{cri}}{n} \\ \bar{l}_{cr} &= \frac{\sum_{i=1}^{n-1} l_{cri}}{n-1} = \frac{l_{cr}}{n-1} \\ \Delta_{cr} &= \sum_{i=1}^n \delta_{cri} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中:  $h_{cri}$  为受拉区混凝土退出工作的程度,隐含受压区混凝土面积;  $\delta_{cri}$  为裂缝开展的程度,隐含梁变形曲率的大小;  $l_{cri}$  为裂缝间距,表示梁段内裂缝的多少;  $l_{cr}$  为开裂范围;  $n$  为裂缝条数。

取一段开裂区域,假定弯曲裂缝均为受拉裂缝,则混凝土的名义拉应变  $\bar{\epsilon}_{cr}$  为

$$\bar{\epsilon}_{cr} = \frac{\sum_{i=1}^n \delta_{cri}}{\sum_{i=1}^{n-1} l_{cri}} + \epsilon'_t \quad (2)$$

式中:  $\epsilon'_t$  为两裂缝之间混凝土的应变。

## 2 截面平衡方程的建立

### 2.1 材料本构方程及基本假定

(1) 平截面假定。

(2) 混凝土为非线性材料,其本构方程可采用 Hognestad E 建议的模型,即二次抛物线加斜直线,则应力  $\sigma$  与应变  $\epsilon$  关系为

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_0 \left[ 2 \frac{\epsilon}{\epsilon_0} - \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \right)^2 \right] & \epsilon \leq \epsilon_0 \\ \sigma_0 \left( 1 - \alpha \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon_u - \epsilon_0} \right) & \epsilon_0 < \epsilon \leq \epsilon_u \end{cases} \quad (3)$$

式中:  $\alpha = 0.15$ ;  $\epsilon_u = 0.0038$ ;  $\epsilon_0 = 0.002$ ;  $\sigma_0$  为峰值应力。

(3) 普通钢筋及预应力钢束采用线弹性本构关系,计算式为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_s &= E_s \epsilon \\ \sigma_p &= E_p \epsilon \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式中:  $\sigma_s$  为普通钢筋应力;  $\sigma_p$  为预应力钢筋应力;  $E_s$  为普通钢筋的弹性模量;  $E_p$  为预应力钢束的弹性模量。

(4) 钢筋和混凝土之间无相对滑移。

(5) 截面分层处理。认为截面平衡时每层内部的混凝土割线模量  $E_{ck}$  相同,且有

$$E_{ck} = \frac{\sigma(\epsilon_k)}{\epsilon_k} \quad (5)$$

式中:  $\sigma(\epsilon_k)$  为截面平衡时,根据混凝土本构关系确定的第  $k$  层截面中心处混凝土应力;  $\epsilon_k$  为截面平衡时第  $k$  层截面中心处应变。

### 2.2 平衡方程

预应力混凝土梁可以是任意截面,设全截面高度为  $h$ ,受压区高度为  $x$ ,开裂截面形心轴距上边缘距离为  $y'_{c0}$ 。截面配有  $n$  根预应力钢束,  $m$  根普通钢筋。其中第  $i$  根预应力钢束面积为  $A_{pi}$ ,距上边缘距离为  $y_{pi}$ ,截面平衡时的应力、应变分别为  $\sigma_{pi}$  和  $\epsilon_{pi}$ ;第  $j$  根普通钢筋面积为  $A_{sj}$ ,距上边缘距离为  $y_{sj}$ ,截面平衡时的应力、应变分别为  $\sigma_{sj}$ 、 $\epsilon_{sj}$ 。把截面分层处理,第  $k$  层的高度为  $h_k$ ,宽度为  $b_k$ ,其上缘到整个截面上缘的距离为  $y_{uk}$ 。计算分析如图 1 所示。

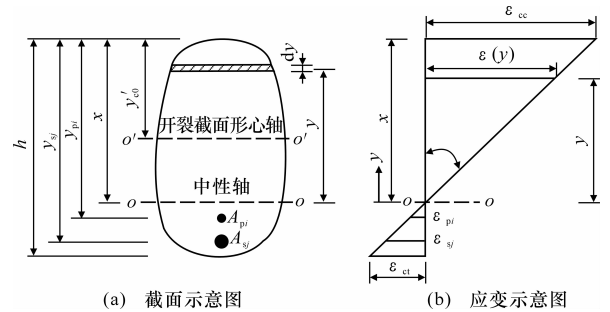


图 1 截面分析

#### 2.2.1 几何方程

中性轴(图 1 中的  $o-o$  轴)距上边缘距离为  $x$ 。以中性轴为零点建立坐标系  $y$ ,坐标轴向上为正,如图 1 所示。根据平截面假定及钢筋与混凝土无相对滑移,坐标为  $y$  处的应变  $\epsilon(y)$  为

$$\epsilon(y) = -\varphi y \quad (6)$$

式中:  $\varphi$  为截面的曲率。

#### 2.2.2 物理方程

把预应力钢束的应力  $\sigma_{pi}$  分为两部分:一部分为

有效预应力  $\sigma_{pi1}$ , 另一部分为预应力钢束随混凝土截面共同变形产生的应力  $\sigma_{pi2}$ 。即

$$\sigma_{pi} = \sigma_{pi1} + \sigma_{pi2} \quad (7)$$

截面平衡时第  $k$  层内材料的应力与应变的关系可以表示为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ck}(y) &= E_{ck}\epsilon(y) \\ \sigma_{pi2}(y) &= E_p\epsilon(x - y_{pi}) \\ \sigma_{sj} &= E_s\epsilon(x - y_{sj}) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

式中:  $E_{ck}$  为截面平衡时第  $k$  层混凝土的割线模量;  $E_p$  为预应力钢束弹性模量;  $E_s$  为普通钢筋弹性模量。

### 2.2.3 平衡方程

$N$  为外力产生的轴力,  $M$  为外力对开裂截面换算截面形心轴(图1中的  $o'-o'$  轴)产生的弯矩。以截面平衡时的状态建立方程, 由内外力平衡可得

$$N - \sum_{i=1}^n A_{pi}\sigma_{pi1} = \sum_{k=1}^p \int_{x-y_{uk}-h_k}^{x-y_{uk}} b_k \sigma_{ck}(y) dy +$$

$$y'_{c0} = \frac{\sum_{k=1}^p b_k \alpha_{Eck} [(y_{uk} + h_k)^2 - y_{uk}^2/2] + \alpha_{Ep} \sum_{i=1}^n A_{pi} y_{pi} + \alpha_{Es} \sum_{j=1}^m A_{sj} y_{sj}}{A_{cr}} \quad (12)$$

$$I_{cr} = \sum_{k=1}^p b_k \alpha_{Eck} \left[ \frac{1}{3} (x - y_{uk})^3 - \frac{1}{2} (x - y'_{c0}) (x - y_{uk})^2 - \frac{1}{3} (x - y_{uk} - h_k)^3 + \frac{1}{2} (x - y'_{c0}) \cdot \right. \\ \left. (x - y_{uk} - h_k)^2 \right] + \sum_{i=1}^n \alpha_{Ep} A_{pi} (y_{pi} - x) (y_{pi} - y'_{c0}) + \sum_{j=1}^m \alpha_{Es} A_{sj} (y_{sj} - x) (y_{sj} - y'_{c0}) \quad (13)$$

(2) 计算预应力和截面上边缘应变  $\epsilon_{cc}$ 。施加到截面下边缘的应变  $\epsilon_{ct} = -\epsilon_{cr}$ , 可算出预应力的合力  $N_p$  为

$$N_p = \frac{\epsilon_{ct} - (N/A_{cr}) - M(h - y'_{c0}/E_c I_{cr})}{-1/(E_c A_{cr}) - (y_p - y'_{c0})(h - y'_{c0})/E_c I_{cr}} \quad (14)$$

计算与此时预应力对应的截面上边缘应变为

$$\epsilon_{cc} = \frac{N - N_p}{E_c A_{cr}} - \frac{[M - N_p(y_p - y'_{c0})]y'_{c0}}{E_c I_{cr}} \quad (15)$$

(3) 由平截面假定可得

$$x_{n+1} = \frac{h\epsilon_{cc}}{\epsilon_{cc} - \epsilon_{ct}} \quad (16)$$

(4) 迭代计算。把步骤(3)中计算的工作截面高度  $h$  代入步骤(1)中的公式, 重新计算截面特征  $A_{cr}$ 、 $y'_{c0}$ 、 $I_{cr}$ 。重复步骤(1)~(3), 直到受压区高度基本不再变化。

迭代法流程如图2所示。

以上公式中各参数定义如下:  $b$  为截面的宽度;  $x$  为受压区高度;  $n$  为预应力钢束根数;  $m$  为普通钢筋根数;  $\alpha_{Eck}$  为第  $k$  层混凝土割线模量  $E_{ck}$  与标准弹模  $E_c$  的比值;  $\alpha_{Ep}$  为预应力钢束与混凝土的弹性模

$$\sum_{i=1}^n A_{pi}\sigma_{pi} + \sum_{j=1}^m A_{sj}\sigma_{sj} \quad (9)$$

$$M - \sum_{i=1}^n A_{pi}\sigma_{pi1}(y_{pi} - y'_{c0}) = \sum_{k=1}^p \int_{x-y_{uk}-h_k}^{x-y_{uk}} b_k \cdot \sigma_{ck}(y)(x - y'_{c0} - y) dy + \sum_{i=1}^n A_{pi}\sigma_{pi2} \cdot (y_{pi} - y'_{c0}) + \sum_{j=1}^m A_{sj}\sigma_{sj}(y_{sj} - y'_{c0}) \quad (10)$$

### 2.3 迭代格式

截面非线性分析迭代的迭代变量为截面受压区高度  $x$  与截面平衡时每层混凝土的割线模量  $E_{ck}$ 。设  $x$  的初值为  $x = \frac{h}{2}$ ,  $E_{ck}$  的初值为  $E_{ck} = E_c$ , 迭代步骤及公式如下所述。

(1) 计算初始截面特征  $A_{cr}$ 、 $y'_{c0}$ 、 $I_{cr}$ 。

$$A_{cr} = \sum_{k=1}^p \alpha_{Eck} b_k h_k + \alpha_{Ep} \sum_{i=1}^n A_{pi} + \alpha_{Es} \sum_{j=1}^m A_{sj} \quad (11)$$

$$y'_{c0} = \frac{\sum_{k=1}^p b_k \alpha_{Eck} [(y_{uk} + h_k)^2 - y_{uk}^2/2] + \alpha_{Ep} \sum_{i=1}^n A_{pi} y_{pi} + \alpha_{Es} \sum_{j=1}^m A_{sj} y_{sj}}{A_{cr}} \quad (12)$$

$$I_{cr} = \sum_{k=1}^p b_k \alpha_{Eck} \left[ \frac{1}{3} (x - y_{uk})^3 - \frac{1}{2} (x - y'_{c0}) (x - y_{uk})^2 - \frac{1}{3} (x - y_{uk} - h_k)^3 + \frac{1}{2} (x - y'_{c0}) \cdot \right. \\ \left. (x - y_{uk} - h_k)^2 \right] + \sum_{i=1}^n \alpha_{Ep} A_{pi} (y_{pi} - x) (y_{pi} - y'_{c0}) + \sum_{j=1}^m \alpha_{Es} A_{sj} (y_{sj} - x) (y_{sj} - y'_{c0}) \quad (13)$$

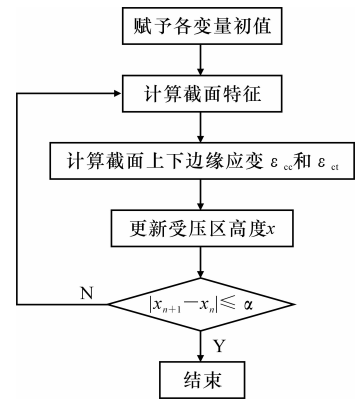


图2 迭代流程

量之比;  $\alpha_{Es}$  为普通钢筋与混凝土的弹性模量之比;  $y_{sj}$  为第  $j$  根普通钢筋到截面上边缘的距离;  $\epsilon_{cc}$  为截面上边缘应变;  $\epsilon_{ct}$  为截面下边缘应变;  $N_p$  为预应力钢束合力,  $N_p = \sum_{i=1}^n A_{pi}\sigma_{pi1}$ ;  $y_p$  为预应力钢束合力点到上边缘的距离,  $y_p = \frac{\sum_{i=1}^n A_{pi}\sigma_{pi1} y_{pi}}{\sum_{i=1}^n A_{pi}\sigma_{pi1}}$ ;  $E_c$  为混凝土的

弹性模量； $x_{n+1}$  为第  $n+1$  次迭代后混凝土的受压区高度； $x_n$  为第  $n$  次迭代后混凝土的受压区高度； $h$  为截面高度。

3 预应力简支梁损伤刚度评估

3.1 截面损伤刚度的表达

截面开裂后的损伤刚度  $B_{cr}$  为

$$B_{cr} = \frac{M - M_p}{\varphi} \tag{17}$$

式中： $M_p$  为预应力对开裂截面换算截面形心的弯矩。

3.2 截面损伤刚度评估

预应力混凝土简支梁的刚度评估流程框图如图 3 所示。

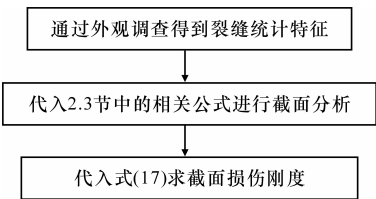


图 3 截面损伤刚度评估流程

3.3 全梁刚度的确定

根据简支梁裂缝区间进行分段，统计各段梁的名义拉应变  $\bar{\epsilon}_{ct}$ ，根据评估流程，计算得到各段梁的损伤刚度  $B_{cri}$ ，如图 4 所示，其中  $B$  为全截面刚度。

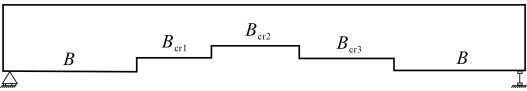


图 4 基于裂缝特征统计的阶梯形刚度变化

根据刚度分布特点，采用分段积分法，即可求解不同位置的简支梁挠度。

4 模型试验

4.1 试验目的

通过对比理论挠度和试验挠度，验证根据本文方法确定的全梁刚度在计算挠度时的可行性。

4.2 试验模型设计

以预应力混凝土简支 T 梁作为研究对象，试验模型参照标准图按比例缩尺。模型 T 梁共 2 片，编号分别为 JZL-1 和 JZL-2，预应力钢筋采用先张法按直线配置。截面尺寸及配筋如图 5 所示。

4.3 试验过程

4.3.1 挠度测点布置

在试验梁的跨中设置挠度计，测点布置如图 6 所示，其中  $L$  为跨度。

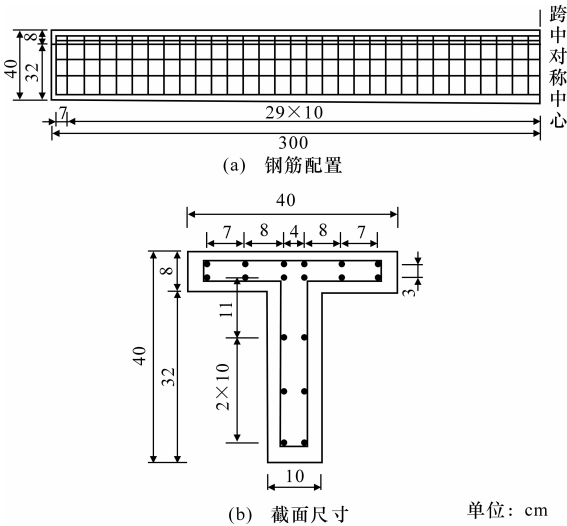


图 5 试验梁尺寸及配筋

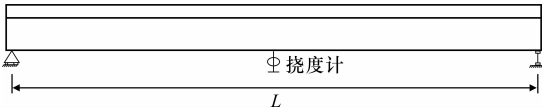


图 6 简支 T 梁挠度测点布置

4.3.2 试验过程

试验过程主要包括模型的放置、预加载、加载至裂缝有变化、分级加载、采集记录变形和裂缝特征。试验过程如图 7 所示。

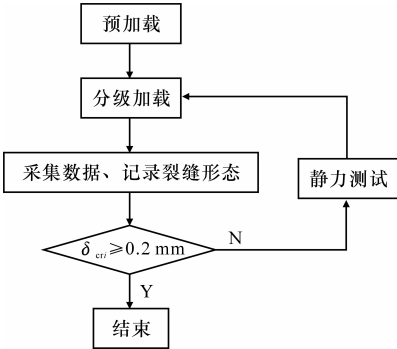


图 7 试验过程流程

4.4 全梁刚度的计算方法

方法一：基于《公路钢筋混凝土及预应力混凝土桥涵设计规范》(以下简称《规范》)的计算方法。

根据《规范》附录 G，计算受压区相对高度；根据受压区高度，计算开裂截面换算截面惯性矩；然后，根据《规范》第 6.5.2 条，计算简支梁截面刚度。

方法二：基于试验刚度的计算方法。

根据梁裂缝的开展情况对梁进行分段，统计出各段的裂缝平均高度  $\bar{h}_{cr}$  及名义拉应变  $\bar{\epsilon}_{ct}$ ，则此段梁截面的曲率  $\bar{\varphi} = \bar{h}_{cr} / \bar{\epsilon}_{ct}$ ，试验刚度为

$$\bar{B}_{cr} = (M - M_p) / \bar{\varphi}$$

方法三：基于裂缝统计特征的计算方法。

依据本文第 3 节的方法确定全梁刚度分布。

段,其中 JZL-1 分为 4 段,JZL-2 分为 3 段。根据每

4.5 数据采集及分析

4.5.1 裂缝统计参数

根据梁裂缝的分布状态,对梁的开裂段进行分

见表 1。详细试验数据详见文献[9]。

表 1 下边缘名义应变  $\bar{\epsilon}_{cr}$

荷载/ kN	$\bar{\epsilon}_{cr}/10^{-6}$				荷载/ kN	$\bar{\epsilon}_{cr}/10^{-6}$		
	JZL-1 开裂段 1	JZL-1 开裂段 2	JZL-1 开裂段 3	JZL-1 开裂段 4		JZL-2 开裂段 1	JZL-2 开裂段 2	JZL-2 开裂段 3
0	0	0	0		0	0	0	0
5	143	286	286		1	212	403	198
10	308	330	330		3	471	621	593
15	578	740	740	303	5	565	774	716
20	889	904	904	403	7	659	1 008	889
23	1 220	504	504		10	753	1 169	988
26	1 458	533	533		12	847	1 387	1 062
29	1 678	639	639		14	941	1 629	1 160
32	1 881	722	722		16	1 106	1 790	1 432
35	2 119	805	805		18	1 176	2 260	1 531

4.5.2 刚度计算

根据各段的裂缝统计特征,计算出的各段的损

伤刚度  $B_{cr}$ 见表 2。

表 2 基于裂缝统计特征的开裂后截面损伤刚度  $B_{cr}$

荷载/ kN	$B_{cr}/10^6(N \cdot m^2)$				荷载/ kN	$B_{cr}/10^6(N \cdot m^2)$		
	JZL-1 开裂段 1	JZL-1 开裂段 2	JZL-1 开裂段 3	JZL-1 开裂段 4		JZL-2 开裂段 1	JZL-2 开裂段 2	JZL-2 开裂段 3
0	30.91	30.91	30.91		0	30.91	30.91	30.91
5	5.44	9.89			1	4.95	4.47	5.13
10	6.23	6.66			3	4.96	4.50	4.95
15	6.45	6.11	4.91	6.14	5	4.95	4.23	4.97
20	6.19	5.60	5.53	6.79	7	4.97	4.46	4.95
23	6.76	5.13	5.20		10	5.10	4.63	4.97
26	6.15	5.15	5.16		12	5.39	4.69	4.95
29	5.81	5.18	5.74		14	5.57	4.57	4.94
32	5.71	5.26	5.56		16	5.40	4.41	4.95
35	5.53	5.26	5.42		18	5.65	4.47	4.96

4.4.3 变形的分析比较

每次加载后采集跨中的挠度数据,挠度的计算值和试验值的对比如图 8、图 9 所示。

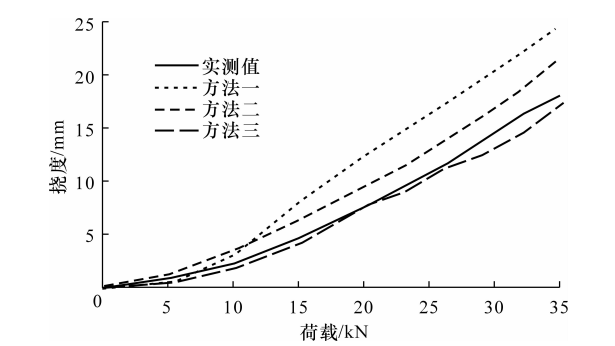


图 8 JZL-1 荷载与挠度的关系

试验结果表明:截面一旦开裂,截面刚度迅速衰

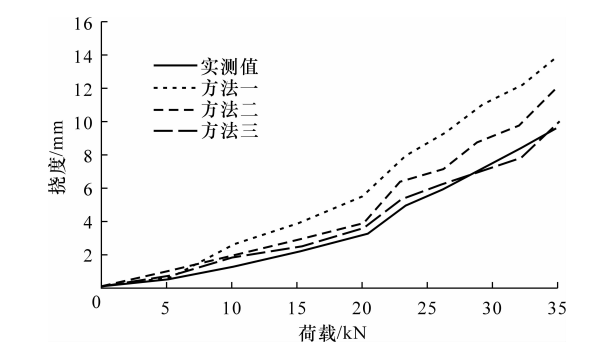


图 9 JZL-2 荷载与挠度的关系

减,挠度迅速增大;刚度的衰减呈前快后慢的特点,即开裂初期迅速下降,后期逐渐减缓。试验表明,预应力筋对抑制裂缝开展有较明显的作用。

## 5 讨 论

(1)本文评估方法的一个重要前提是假定结构受弯区域可见裂缝为受拉裂缝,这样才能基于裂缝特征建立受拉区名义拉应力状态。当然,这与当前很多可见可测但实际受压的裂缝存在一定偏差,但是对评价结构安全性是偏保守的。

(2)分析结果表明,《公路钢筋混凝土及预应力混凝土桥涵设计规范》认为全桥各截面刚度均为刚度最小截面的刚度,显然此方法计算的全桥刚度偏小,挠度偏大;根据试验方法确定全桥刚度时,虽然对梁进行了分段处理,但认为裂缝高度即为受压区高度,忽视了裂缝之间未开裂混凝土全截面承压,计算的全桥刚度偏小,挠度偏大;本文方法不但根据裂缝发展情况对梁进行了分段处理,而且在裂缝统计特征的基础上,从实际的截面平衡关系入手求各段梁的实际刚度,使得开裂混凝土挠度计算更加准确。因此,本方法对于在役开裂预应力混凝土桥梁评估具有重要应用价值。

## 6 结 语

(1)基于预应力混凝土简支梁的弯曲裂缝统计特征,考虑材料非线性特征,采用截面数值分析法,建立了非线性截面平衡方程,提出了基于实测裂缝损伤参数的预应力混凝土简支梁损伤刚度分析方法;本方法对截面形状无要求,具有更好的适用性。

(2)通过不同方法的比较,表明本文方法计算结果与试验值更加接近;该方法可对开裂损伤后的预应力混凝土梁桥使用性能评估提供借鉴。

### 参考文献:

### References:

- [1] 邓 刚. 后张法预应力 T 梁裂缝产生原因及预防措施[J]. 筑路机械与施工机械化, 2008, 25(7): 61-63.  
DENG Gang. Cause and preventative measure of cracks in T beam construction with post-tensioned prestress[J]. Road Machinery & Construction Mechanization, 2008, 25(7): 61-63.
- [2] 赵 煜, 贺拴海, 李春风, 等. 在役预应力混凝土箱梁开裂后承载力评估[J]. 同济大学学报: 自然科学版, 2010, 38(9): 1271-1275.  
ZHAO Yu, HE Shuan-hai, LI Chun-feng, et al. Evaluating system of bearing capacity for existing cracked prestressed concrete box girder based on crack feature

- [J]. Journal of Tongji University: Natural Science, 2010, 38(9): 1271-1275.
- [3] 彭荣贵. 水泥混凝土桥梁施工裂缝的产生及控制[J]. 筑路机械与施工机械化, 2011, 28(4): 63-65.  
PENG Rong-gui. Research on generation and control of construction crack on reinforced concrete bridge [J]. Road Machinery & Construction Mechanization, 2011, 28(4): 63-65.
- [4] 谢 峻, 王国亮, 郑晓华. 大跨径预应力混凝土箱梁桥长期下挠问题的研究现状[J]. 公路交通科技, 2007, 24(1): 47-50.  
XIE Jun, WANG Guo-liang, ZHENG Xiao-hua. State of art of long-term deflection for long span prestressed concrete box-girder bridge [J]. Journal of Highway and Transportation Research and Development, 2007, 24(1): 47-50.
- [5] 程 灏. 大跨度预应力混凝土连续刚构桥箱梁底板裂缝成因分析[J]. 贵州工业大学学报: 自然科学版, 2008, 37(3): 170-175.  
CHENG Hao. The analysis of the cause of crack in bottom slab of a large span prestressed concrete continuous rigid frame bridge [J]. Journal of Guizhou University of Technology: Natural Science Edition, 2008, 37(3): 170-175.
- [6] Creazza G, Russo S. A new model for predicting crack width with different percentages of reinforcement and concrete strength classes [J]. Materials and Structures, 1999, 32: 520-524.
- [7] 陈宇峰, 徐君兰, 余武军. 大跨 PC 连续刚构桥跨中持续下挠成因及预防措施[J]. 重庆交通大学学报: 自然科学版, 2007, 26(4): 6-8.  
CHEN Yu-feng, XU Jun-lan, YU Wu-jun. Causes and precautionary measures to long-term deflection of long span pre-stressed concrete box girder of continuous rigid frame bridge [J]. Journal of Chongqing Jiaotong University: Natural Science Edition, 2007, 26(4): 6-8.
- [8] 吴文清, 陈小刚, 李 波, 等. 预应力混凝土连续箱梁施工质量评价指标调查[J]. 建筑科学与工程学报, 2009, 26(3): 42-48.  
WU Wen-qing, CHEN Xiao-gang, LI Bo, et al. Investigation of construction quality evaluating indices in PC continuous box-girder [J]. Journal of Architecture and Civil Engineering, 2009, 26(3): 42-48.
- [9] 董水英. 预应力混凝土简支梁开裂后挠度模型试验研究[D]. 西安: 长安大学, 2010.