

文章编号:1671-8879(2011)01-0079-05

# 时变路网双目标动态路线优选有约束 $A^*$ 算法

王东柱<sup>1</sup>, 陈艳艳<sup>2</sup>, 朱书善<sup>1</sup>

(1. 交通运输部公路科学研究院 国家智能交通系统工程技术研究中心, 北京 100088;

2. 北京工业大学 北京市交通工程重点实验室, 北京 100124)

**摘要:**为了解决现有交通时变网络(网络中的路权为时间的函数)模型中计算所得的最短路不稳定的问题,构建符合首进首出原则的时变网络,进而将时变网络扩展为一系列静态网络,并在扩展的静态路网上应用  $A^*$  算法求解时变最短路;同时,为满足用户多重喜好,借助道路延误风险分析,设计有约束的时变  $A^*$  算法,在路径寻优过程中对高延误风险路段进行启发式规避,从而实现在绕行许可范围内有效减少延误风险的可靠路径的快速搜索。数值试验结果表明:本算法由于利用了离线计算的信息,大大增加了有约束的动态  $A^*$  算法的效率;考虑了阻塞发生的可能性,提高了导航的准确性,减少了出行延误风险;该方法具有路径搜索速度快、可有效避开延误高风险路段的优点。

**关键词:**交通工程;动态  $A^*$  算法;时变网络;延误风险;可靠路径搜索

**中图分类号:**U491;U238

**文献标志码:**A

## Time-dependent route optimization with double objective by a constrained dynamic $A^*$ algorithm

WANG Dong-zhu<sup>1</sup>, CHEN Yan-yan<sup>2</sup>, ZHU Shu-shan<sup>1</sup>

(1. National Engineering and Technology Center of Intelligent Transport System, Research Institute of Highway Ministry Transport, Beijing 100088, China; 2. Beijing Key Laboratory of Traffic

Engineering, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China)

**Abstract:** To solve the problem that the calculated shortest path are unstable in time dependent transport network, a time-dependent road network that following first in-first out principle is built, and it is divided into a series of static network. Based on the static network, the shortest route of time-dependent is deduced by  $A^*$  algorithm. To meet the users' multi route choice favours, depending on delay risk analysis, a constrained dynamic  $A^*$  algorithm is proposed by avoiding high-risk links heuristically to search for a reliable path subject to a trip duration constraint. The efficiency of the constrained dynamic  $A^*$  search is increased by taking advantage of information computed offline. The result shows that, the algorithm is implemented and its computational performance is analyzed in numerical test, the path searching is quick and the high delay risk road segments can be avoided effectively. 2 tabs, 1 fig, 10 refs.

**Key words:** traffic engineering; dynamic  $A^*$  algorithm; time-dependent road network; delay risk; reliable path search

收稿日期:2010-02-09

基金项目:国家“十一五”科技支撑计划项目(2006BAJ18B01-06)

作者简介:王东柱(1966-),男,河南郑州人,高级工程师,E-mail:wangdrew@163.com。

0 引言

车载导航系统作为智能交通系统(ITS)的应用之一,它不仅给用户提供更好的路径信息服务,还可以帮助减少交通堵塞,缩短行驶时间和节省能源,因此,近年来得到了广泛的应用。最佳路线优选是车辆自动导航系统中一个重要的关键技术。目前实时信息的采集、预测及低成本传输问题难以在短时间内得以解决,因而现有导航产品多为静态导航。随着动态信息采集技术的发展,动态导航将面临的主要问题是,针对时变网络(网络中的路权为时间的函数)的动态路线优选算法还不甚成熟。Orda 等人在 1990 年最早研究了时变网络的最短路问题,但他们所提出的算法适用于通讯网络,而非交通路网<sup>[1]</sup>。在时变的交通网络中,一般假设在同一路段行驶的车辆应符合首进首出的要求,即先从路段一端出发的车辆,也应先抵达路段另一端。不满足首进首出的时变网络模型中,所得最短路很不稳定,即由于动态数据更新间隔不同,所得最短路也可能不同,这与实际情况是不相符的。Kaufmann 等人在 1993 年提出,当路段通行时间满足首进首出要求时,可将时变网络扩展为一系列静态网络,并将 Dijkstra 算法应用于静态扩展的时变网络计算<sup>[2]</sup>。但在静态网络中,两点间最短路计算的最有效算法为 A \* 算法,同广度优先的搜索算法如 Dijkstra 算法,A \* 算法用每个节点到目的点的估算距离来决定这个节点是否可能在最优路线上<sup>[3-5]</sup>。而目前鲜有将 A \* 算法应用于时变网络的文献;同时,动态导航还面临其他问题:① 以最短时间为单目标的优选路线难以满足用户多重喜好,而目前多目标路径算法多用于规划领域,且车载导航系统的计算能力有限,多目标路径计算速度难以满足实时要求;② 容易导致被诱导车辆积聚于同一道路,造成因诱导形成的新阻塞,引起系统效益降低等<sup>[6]</sup>。因此,如何提供高效准确、符合用户多目标要求、并兼顾系统优化目标的路径优化算法是一个亟需解决的问题。为此,本文通过构建符合首进首出原则的时变网络,借助道路延误风险分析,并设计有约束的时变 A \* 算法,在路径寻优过程中对高延误风险路段进行启发式规避,从而实现在绕行许可范围内有效减少延误风险的可靠路径的快速搜索。

1 时变网络的动态 A \* 算法

考虑一时变路网  $G(N,A)$ ,节点集合  $N = \{1,$

$2,\cdots,n\}$ ,路段集合  $A \in \{(i,j) \in N \times N\}$ 。令  $[f_k, f_{k+1})$  为一时间段序列, $k = 0,1,\cdots,v-1$ ,其中, $f_0 < f_1 < f_2 < \cdots < f_{v-1} < f_v$ 。该网络各路段通行时间或速度为各时间段的时变函数。本节涉及的若干符号定义见表 1。

表 1 参数符号定义

$l_{(i,j)}$	路段 $(i,j)$ 的非负路长
$v_{k(i,j)}$	路段 $(i,j)$ 在时间段 $[f_k, f_{k+1})$ 的平均车速
$g(i)$	从起点 $o$ 到节点 $i$ 的抵达时间
$T(g(i),(i,j))$	从节点 $i$ 在时间 $g(i)$ 出发抵达节点 $j$ 的时间, $(i,j) \in A$
$p(i)$	节点 $i$ 的前向节点
$A(i)$	所有与节点 $i$ 相连的后向路段集合
$h(i,g(i))$	在时间 $g(i)$ 从节点 $i$ 出发到终点的最短通行时间估计
$f(i)$	从起点 $o$ 经过节点 $i$ 到终点的最早抵达时间估计, $f(i) = g(i) + h(i,g(i))$

本文采用车速模型构建时变网络。所谓车速模型,即假设  $v_{k(i,j)}$  随着时间段  $[f_k, f_{k+1})$  的变化而改变。Sung 等人在 1999 年证明,用车速模型构建的时变网络可以满足首进首出的要求<sup>[7]</sup>。在车速模型中,节点  $i,j$  间的通行时间为  $T(g(i),(i,j)) - g(i)$ 。计算公式为

$$T(g(i),(i,j)) = l_{(i,j)} / v_{m(i,j)} + g(i)$$

当  $l_{(i,j)} / v_{m(i,j)} < f_{m+1} - g(i)$ ;  
或  $T(g(i),(i,j)) =$

$$(l_{(i,j)} - l_{m(i,j)}) / v_{(m+1)(i,j)} + f_{m+1}$$

当  $(l_{(i,j)} - l_{m(i,j)}) / v_{(m+1)(i,j)} < f_{m+2} - f_{m+1}$ ;  
或  $T(g(i),(i,j)) =$

$$(l_{(i,j)} - l_{(m+1)(i,j)}) / v_{(m+2)(i,j)} + f_{m+2}$$

当  $(l_{(i,j)} - l_{(m+1)(i,j)}) / v_{(m+1)(i,j)} < f_{m+3} - f_{m+2}$ ;  
.....

或  $T(g(i),(i,j)) =$

$$(l_{(i,j)} - l_{(m+n-1)(i,j)}) / v_{(m+n)(i,j)} + f_{m+n}$$

当  $(l_{(i,j)} - l_{(m+n-1)(i,j)}) / v_{(m+n)(i,j)} <$

$$f_{m+n+1} - f_{m+n}$$

.....

(1)

式中: $l_{m(i,j)} = v_{m(i,j)} (f_{m+1} - g(i))$ ;  $l_{(m+1)(i,j)} = l_{m(i,j)} + v_{(m+1)(i,j)} (f_{m+2} - f_{m+1})$ ;  $l_{(m+2)(i,j)} = l_{(m+1)(i,j)} + v_{(m+2)(i,j)} (f_{m+3} - f_{m+2})$ ;  $\cdots$ ;  $l_{(m+n)(i,j)} = l_{(m+n-1)(i,j)} + v_{(m+n)(i,j)} (f_{m+n+1} - f_{m+n})$ ;  $\cdots$ ; 且  $m+n \leq v-1, n = 0,1,2,\cdots$ 。

在上述计算中,不考虑在路口停留等待的情况,因此, $g(i)$  是从起点到节点  $i$  的抵达时间,也是从节点  $i$  向终点行进的出发时间。

令 $o$ 为起点, $q$ 为终点,从起点出发的时间为 $t_0$ 。将时变路网展开成一系列时间断面上的静态路网,从而时变路网中动态A\*算法可描述如下。

步骤1:初始化。令 $g(o) = t_0, f(o) = t_0 + h(o, t_0), g(j) = \infty, f(j) = \infty \forall j \neq o; C = \{o\}; S = \Phi; p(o) = 0$ 。

步骤2:节点选择。在 $C$ 中选择具有最小 $f(i)$ 值的节点 $i$ 放在 $S$ 中,作为下一个扩展点。

$S = S \cup \{i\}, C = C / \{i\}$ 。

步骤3:如果 $i = q$ ,算法中止;否则,继续。

步骤4:更新 $f(j)$ 及距离标号 $g(j)$ ;对每一节点 $j \in A(i)$ ,如果 $T(g(i), (i, j)) + h(j, g(j)) < f(j)$ ,则 $g(j) = T(g(i), (i, j)), f(j) = T(g(i), (i, j)) + h(j, g(j))$  and  $p(j) = i$ ;如果 $j \notin C, C = C \cup \{j\}$ ,返回步骤2。

上述步骤中,要用到2个集合,也就是闭集 $S$ 和开集 $C$ 。已经计算和检查过的节点被放在闭集里,计算过而没有被检查过的节点放在开集里。当节点 $n$ 被放到闭集时, $g(j)$ 就是从起点到节点 $j$ 的最短路径的费用,对于不在闭集的节点 $j, g(j)$ 则大于或等于从起点到节点 $j$ 的最短路径费用。 $S = S \cup \{i\}$ 表示将 $\{j\}$ 并放入 $S$ 中, $C = C \cup \{i\}$ 表示将 $\{i\}$ 从集合 $C$ 中去除。

在步骤2中,开集中具有最小 $f(j)$ 值的节点被放在闭集中,并同时作为下一个扩展点。节点选择在步骤4,对每一节点 $j \in A(i)$ ,需更新其标号 $f(j)$ 及 $g(j)$ 。其中 $g(j) = \min_{i \neq j} \{T(g(i), (i, j))\}, j \in N, j \neq 1$ 。如果各节点到终点的最小距离估计小于实际值(如采用欧几里德距离),则无需重新考虑已放入集合 $S$ 中的节点。

在上述算法中,各路段的通行时间,根据车辆经过该路段时的平均车速计算,因此很容易将标号过程与路段行程时间计算相结合。这不会增加计算的复杂性,也无需额外的内存,仅需将 $T(g(i), (i, j))$ 计算作为子函数嵌入时变A\*算法, $T(g(i), (i, j))$ 即当前节点 $i$ 到达紧邻后续节点 $j$ 的时间。

## 2 道路单元延误风险分析

在城市拥挤路网中,出行时间具有较大的不确定性,一般阻塞状态下延误时间波动较大,道路行驶时间的不确定性也较高。根据美国通行能力手册中的路阻函数,路段通行时间可视为路段流量及通行能力的函数<sup>[8]</sup>。即

$$t_a = t_a(0) \left[ 1 + \alpha \left( \frac{q_a}{c_a} \right)^\beta \right] \quad (2)$$

式中: $t_a$ 为路段 $a$ 的通行时间; $q_a$ 为路段 $a$ 的流量; $c_a$ 为路段 $a$ 的通行能力; $t_a(0)$ 为路段 $a$ 在自由流下的通行时间; $\alpha, \beta$ 为常数。

$t_a$ 对 $q_a$ 的偏导数为

$$t'_a(q_a) = \frac{dt_a}{dq_a} = t_a(0) \alpha \beta (q_a/c_a)^{\beta-1} / c_a \quad (3)$$

该导数反映了 $t_a$ 相对于 $q_a$ 变化的敏感度,当通行能力不变时,具有较大 $t'_a(q_a)$ 的路段通行时间波动受流量变化的影响较敏感,因此,可近似视 $t'_a(q_a)$ 较大的路段具有较高的延误风险。 $t_a(0)$ 越大, $q_a/c_a$ (路段 $a$ 的饱和度)越大,通行能力 $c_a$ 越小,路段延误风险越高。本文定义延误风险指数 $r_i \in (0, 1]$ 来近似反映路段 $i$ 的延误风险,计算式为

$$r_i = t'_i(q_i) / \max_{i \in A} (t'_i(q_i)) \quad (4)$$

式中: $A$ 为时变路网中的路段集合; $t_i, q_i$ 分别为路段 $i$ 的通行时间和流量; $t'_i(q_i)$ 为 $dt_i/dq_i$ 。

考虑路段因发生事故等原因,导致通行能力降低的可能性,根据历史数据,发生事故可能性较大的路段,其延误风险指数可进行适度调整。风险指数的计算可由信息中心的计算机计算,并在每个数据更新周期,仅将高风险的路段风险指数随同动态车速信息发布给车载计算单元。

由于拥挤路网通行时间的强不确定性,加之目前预测技术尚不成熟,因此,即使在有动态更新的信息来源下,依然要考虑对高风险单元的规避。本文将具有高延误风险的单元视为不可靠单元,并尽可能在导航时予以规避,以减少出行延误风险。该诱导机制尤其适用于被诱导车辆群聚于负荷度已经较高的最短路上,避免因诱导造成的阻塞现象,从而保证了动态诱导的可靠性及路网效益的发挥。

## 3 有约束的时变风险规避A\*算法

本文论述中,一个好的路线尽管不一定是最好(最快)的,但对驾驶人而言却是一个可接受的和出行时间可靠的。如果建议路线的费用(长度或时间)不比最短路优化路径明显增多,那么就是可以接受的;如果在行驶中遇到阻塞或延误的概率比较低,那么所建议的路径就是可靠的。决定最可靠和最短路径是个双目标路线规划问题,一方面,可通过线性加权将其转为单目标规划;另一方面,可将其转化为有约束的单目标规划问题。前者存在权重系数确定过于主观的弊端,后者采用传统数学规划算法求解时间过长,因此,可以采取有约束的启发式算法来解决这个有约束的单目标优化问题。本文算法思路基于

以下事实,如果路段 $(i,j)$  具有较大的权重 $w(i,j)$ , 则它将有较大可能性不被包括在从节点 $s$  到节点 $t$  的最短路径 $P_{st}$  中,如果设定 $w(i,j) = \infty$ , 那么路段 $(i,j)$  将永远不会出现在 $P_{st}$  中<sup>[8-10]</sup>。

驾驶人通常对异常延误比较敏感,一个好的路径应在绕行约束条件下,尽可能避免遇到阻塞可能性较大的路段。因此,基于上面的事实,本文采用了一种启发式算法,通过对高阻塞风险单元加权的方法,减少高风险单元在最佳路径中出现的可能性。该算法首先对高风险道路的权重加一很大的正值,进而计算最短路,当所得最短路路长超过绕行约束时,逐步减少增加的权重,从而在绕行约束条件下,有效地搜索到尽可能避免高延误风险单元的可靠路径。该算法属于启发式算法,虽不一定得到最优解,但该算法同有经验的驾驶人行为相一致,因此易于被受诱导的驾驶人所接受。在这个算法中,采用前文所述时变网络动态 A \* 算法,作为基本的最短路搜索方法。算法所涉及的符号定义见表 2。

表 2 算法符号定义

$w_{0i}$	路段 $i$ 的准动态行驶时间
$w_i$	路段 $i$ 的动态行驶时间
$w'_i$	增加权重后的路段 $i$ 的新权重
$W_0$	加到 $w_i$ 上的很大值(正值)
$P_{s0}$	准动态通行时间最短的路径
$L_{s0}$	$P_{s0}$ 长度
$\beta L_{s0}$	绕行长度限制, $\beta$ 为允许系数( $\beta > 1$ )
$P_{sk}$	$k$ 次迭代所得的最短路径
$L_{sk}$	$P_{sk}$ 路权(行程时间)

该算法的详细描述如下。

步骤 1:初始化。令 $k = 0$ ,以 $w_{0i}$  为路段 $i$  的权重,通过 A \* 算法找到具有最小权重的路径 $P_{s0}$ , $P_{s0}$  行程时间为 $L_{s0}$ 。

步骤 2:对路网上具有较高风险的各路段的权重增加 $\Delta w_i$ ; $w'_i = w_i + \Delta w_i = w_i + \alpha^k(1 - r_i)^q W_0$ ,  $0 < \alpha < 1$ ;当 $k = 0$  时, $q = 0$ ;  $k \geq 1$  时, $q = 1$ ;  $k = k + 1$ 。

步骤 3:计算可靠路径。以 $w'_i$  为路段 $i$  的新权重,重新用动态 A \* 算法计算权重最小的路径 $P_{sk}$ , 将其上面的路段 $i$  的权重恢复为 $w_i$ , 计算 $L_{sk}$ , 也就是路径 $P_{sk}$  上各路段的权重 $w_i$  总和。

步骤 4:检查路径约束条件。如果所得路径满足绕行长度限制( $L_{sk} < \beta L_{s0}$ ) 或 $P_{sk}$  与 $P_{s(k-1)}$  相同,则转到步骤 5,否则回到步骤 2。

步骤 5: $P_{sk}$  就是满足绕行长度限制条件的可靠路径,算法终止。

在本算法,在第 1 次迭代中, $k = 0$ ,路网上具有较高风险的各路段的权重开始都增加 $W_0$ ,从而避免了这些高风险路段在规划路径中的出现。可是,如果违反了绕行长度的限制条件,就需重新规划。这意味着为得到满足绕行限制的路径,曾被避免的部分高风险路段需被新规划的路径经过,为此,在随后的迭代中,较高风险路段已增加的权重被逐步降低,最短路径在新的权重下被重新计算。函数 $\alpha^k(1 - r_i)^q$  保证 $\Delta w_i$  随着迭代次数的增加而减小;同时,为了尽可能避免高风险路段出现在推荐路径上,高风险路段的权重要比相对较低风险的路段减小较少。为了得到更佳的路径,当减少 $\Delta w_i$  后得到的最佳路径没有违反约束条件时,由于可能存在一条避免更多高风险路段,但同时也满足长度限制的最佳路径,因而可以在上次循环和这次循环值之间适当上调 $\Delta w_i$ , 重新进行路径规划。然而,这种方法将会造成大量的迭代计算,不适合实时路径搜索,所以,在本文中采用 $\Delta w_i$  单调减少方法,尽管这种方法可能得不到最优路径,可是它可以更快地得到可接受的结果。

允许系数 $\beta$  随着出行距离及驾驶人的喜好不同而不同,出行距离越近,与避免延误节省的时间相比,绕行的路径多出的时间越可以接受。若驾驶人越不愿意冒险, $\beta$  也就越大,因为避免风险路段可能是要以较长的绕行路径为代价的。本文建议:最短出行距离在 8 km 以内时, $\beta$  取值为 2;最短出行距离在 8 km 到 15 km 时, $\beta$  取值为 1.5;最短出行距离在 15 km 以上时, $\beta$  取值为 1.2。当然,驾驶人也可自行设置 $\beta$  值。

目前常用的 A \* 算法 $h(n)$  估计一般基于欧几里得几何距离估计,当以行程距离作为道路权重时,一般以欧几里得几何距离作为节点 $n$  到目的地的最短路长估计值 $h(n)$ ; 当以道路通行时间为道路权重时,则用欧几里得几何距离除以路网最大速度作为 $h(n)$  估计。在实际路网中,基于欧几里得几何距离的 $h(n)$  估计虽能保证得到最优解,但因基于欧几里得几何距离的 $h(n)$  估计与实际最短路长有着较大偏差,算法的搜索效率难以得到保障。因此,为提高搜索速度,也可将基于欧几里得几何距离的 $h(n)$  估计乘以适当调整系数 $\delta$ (建议取 1.3 ~ 1.5),以满足实时要求。通过在实际路网上进行试验,精度可以满足要求。

4 数值试验

为验证算法的合理性及有效性,本文在一个随

机生成的方格路网上进行了试验。各路段的车速为30~60 km/h的随机数,风险指数为0~1之间的随机数,其中风险指数高于0.9的单元视为不可靠单元,并在可靠路线搜索时考虑规避。每15 min对车速及风险指数进行一次更新。试验设定3种不同的条件:第1种情况为动态通行时间最短路(路线1)计算;第2种为无绕行约束下的可靠路径(路径2)计算;第3种为有绕行约束条件(绕行长度允许系数 $\beta$ 为1.1)下的可靠路径(路径3)计算。3条路径的比较如图1所示。设起点号码为24,终点号码为30。

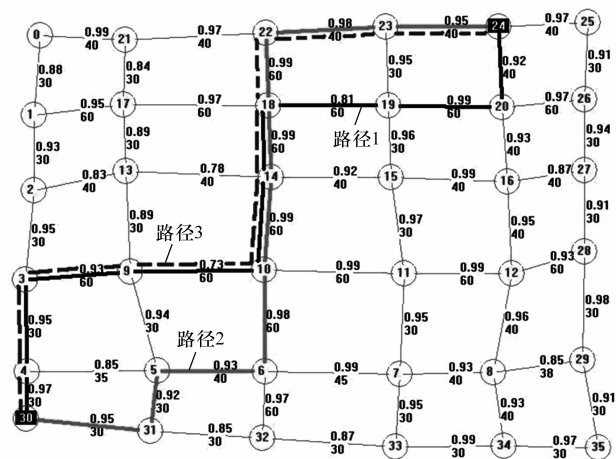


图1 最短正常行驶时间的路径与在长度限制条件下可靠路径的比较

计算结果表明,路径1通行时间为38.6 min,但其经过3个风险路段;路径2通行时间为57.3 min,该路径避开了所有的风险路段,但未满足绕行约束条件;路径3通行时间为40.5 min,该路线经过1个风险路段。在带有长度约束的最短路中,一些高风险路段未被避开,但延误风险仍小于根本没有考虑路段可靠度的通行时间最短路。通过多次试验,一般可在2~4次迭代后得到最佳路线。

## 5 结 语

(1)通过构建符合首进首出原则的时变网络,研究了时变网络的动态A\*算法,可解决时变网络最短路不稳定的问题。

(2)以出行时间最短及出现异常延误风险最小为路径优化的双重目标,通过设计有约束的阻塞风险规避的A\*启发式算法,可提供有效规避延误风险的、满意的路径。

(3)数值试验表明,该算法能以较少的时间求出满意解,同时可有效避免被诱导车辆群聚于负荷度已高的最短路上造成的阻塞,从而避免了路网系统效率的降低。

## 参考文献:

### References:

- [1] Orda A, Rom R. Shortest-path and minimum-delay algorithms in networks with time-dependent edge-length[J]. Journal of the ACM, 1990, 37(3): 607-625.
- [2] Kaufmann D E, Smith R L. Fastest paths in time dependent networks for IVHS application[J]. Journal of IVHS, 1993(1): 1-12.
- [3] Dijkstra E W. A note on two problems in connection with graphs[J]. Numerische Mathematik, 1959, 1(1): 269-271.
- [4] 张渭军, 王 华. 城市道路最短路径的Dijkstra算法优化[J]. 长安大学学报: 自然科学版, 2005, 25(6): 35-38  
ZHANG Wei-jun, WANG Hua. Optimization Dijkstra arithmetic for shortest path of urban traffic net[J]. Journal of Chang'an University: Natural Science Edition, 2005, 25(6): 35-38.
- [5] Hart E P, Nilsson N J, Raphael B. A formal basis for the heuristic determination of minimum cost paths [J]. IEEE Transporation System Science Cybernation, 1968, 4(2): 100-107.
- [6] 马永峰, 路 健, 项乔君. 出行决策的公路网多目标最优路径算法[J]. 交通运输工程学报, 2007, 7(3): 100-105.  
MA Yong-feng, LU Jian, XIANG Qiao-jun. Optimal arithmetic with multi-goals in highway network based on travel decision-making[J]. Journal of Traffic and Transportation Engineering, 2007, 7(3): 100-105.
- [7] Sung K, Bell M G H, Seong M, et al. Shortest paths in a network with time-dependent flow speeds [J]. European Journal of Operational Research, 2000, 121(3): 32-39.
- [8] 任福田, 徐吉谦, 朱长仁, 等. 交通工程学导论[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1987.
- [9] Chen Y, Michael G H B, Klaus B. Risk-averse autonomous route guidance by a constrained A\* search[J]. Journal of Systems, 2010, 14(3): 188-196.
- [10] 陈艳艳, 王东柱. 不完全动态信息条件下延误风险规避的分布式车载导航系统路线实时优化算法[J]. 公路交通科技, 2006, 23(12): 118-122.  
CHEN Yan-yan, WANG Dong-zhu. Responsive optimum path algorithm for delay risk aversion based distributed onboard navigation system under the condition of incomplete dynamic information[J]. Journal of Highway and Transport Research and Development, 2006, 23(12): 118-122.