

文章编号:1671-8879(2009)06-0093-05

液膜喷射色散关系式的非线性稳定性推导

曹建明¹,冯振宇²

(1. 长安大学 汽车学院,陕西 西安 710064; 2. 长安大学 理学院,陕西 西安 710064)

摘 要:根据液体、气体的非线性纳维-斯托克斯控制方程、附加控制方程和边界条件方程,推导出了液膜两侧表面波各种相位角下的不稳定雾化模型喷射表面波量纲一色散准则关系式。结果表明:色散关系式与准则(液体韦伯数、欧拉数、气液体雷诺数和气体马赫数)有关,而气液体表面波的圆频率和气相扰动振幅的差别取决于雷诺数;在此基础上,能够进一步研究喷射表面波的波形、碎裂条件、碎裂点的最不稳定频率,以及射流稳定性随准则的变化关系。

关键词:汽车工程;非线性稳定性理论;平面液膜雾化;色散关系式

中图分类号:U464.114

文献标志码:A

Derivation of dispersion relations of liquid film in sprays by nonlinear stability theory

CAO Jian-ming¹, FENG Zhen-yu²

(1. School of Automobile, Chang'an University, Xi'an 710064, Shaanxi, China;

2. School of Science, Chang'an University, Xi'an 710064, Shaanxi, China)

Abstract: The dimensionless dispersion relations of instability spray modeling under various phase angles of the surface waves on film's two sides are built according to both liquid and gas phase nonlinear N-S equations, additive control equation and boundary conditions. The results show that dimensionless dispersion relations are concerned with some dimensionless parameters, such as liquid Weber number, liquid Euler number, liquid and gas Reynolds number, gas Mach number. The gas disturbance amplitude difference on two surface waves and both liquid and gas complex eigenfrequency depends on Reynolds number. The wave shapes, breakup conditions, the most unstable frequency of breakup point, and stability of liquid jet change with these dimensionless parameters can be researched. 1 fig, 7 refs.

Key words: automobile engineering; nonlinear stability theory; plane liquid film spray; dispersion relation

0 引 言

人们对非线性稳定性理论本身的解释至今仍存在差异,共有 3 种基本方案:一是应用扰动扩展技术

(perturbation expansion technique)建立射流表面波扰动振幅解的 1~3 阶模型,采用的控制方程只有线性质量守恒方程,但对射流表面波振幅的解则是非线性的,由于仅考虑质量守恒,因此射流流动是无

收稿日期:2008-12-10

基金项目:国家自然科学基金项目(50676012)

作者简介:曹建明(1962-),男,山东昌邑人,教授,E-mail:jcao@chd.edu.cn。

旋的;二是应用涡旋离散方法(vortex discretisation method)建立射流表面波质点位移随时间变化的模型,射流流动是有旋的;三是建立非线性的质量、动量和能量守恒方程,在守恒方程中,质量守恒方程是线性的,但动量守恒和能量守恒方程则保留了对流项前的扰动速度非线性项,因而是非线性的控制方程,但扰动振幅解却是 1 阶线性的。根据控制方程的简化程度不同,射流流动可以是有旋的,也可以是无旋的。Jazayeri 等将非线性稳定性模型推导到了 3 阶,发现射流碎裂长度会随着初始扰动振幅和气液密度比的增大而减小^[1-2];Rangel 等应用涡旋离散方法,研究了液膜表面波的非线性稳定性和射流碎裂过程,以射流表面的质点为研究对象,质点由离散化的微涡旋从某一速度层面被带到另一速度层面,而微涡旋并不是圆的,会随时间变化而被“拉伸”或“压缩”,从而造成质点在随基流向前运动的同时,还产生随时间的增长而上下波动的位移,于是形成了表面波,其控制方程为比奥-萨瓦尔定律(Biot-Savart law)^[3-4];Tharakan 等建立了无粘性平面液膜射流的非线性欧拉(Euler)守恒控制方程^[5],开创了应用非线性守恒控制方程研究液膜表面波稳定性和射流碎裂过程的先河。在 Tharakan 等人的控制方程中,质量守恒方程仍是线性的,但动量守恒方程则是非线性的,而且还加入了非线性的能量守恒方程。本文应用粘性非线性纳维-斯托克斯(N-S)守恒控制方程,对液膜表面波的稳定性和射流碎裂过程进行了研究。在控制方程中,质量守恒方程是线性的,但动量守恒方程则是非线性的,保留了对流项前扰动速度的非线性项。N-S 方程本身是非线性的,扰动速度 u 与基流速度 U 相比,不能忽略不计,因此更接近于液膜碎裂的实际情况。N-S 控制方程没有限制流动状态是层流还是湍流,因而它对层流和湍流同样成立,因此适用于对层流区、过渡区和湍流程度较低的湍流的研究。从 N-S 方程最原始的一般形式开始,逐步推导出了有量纲非线性 N-S 方程、量纲一非线性准则方程,经液相推导、气相推导和边界条件的引入,得到了液膜喷射进入两侧气流流速不等和静止空气环境中的量纲一色散准则关系式(dispersion relations)。在此基础上,本文进一步研究喷射表面波的波形、碎裂条件和碎裂点的最不稳定频率,以及射流稳定性随液体韦伯数(liquid Weber number)、欧拉数(Euler number)、气液体雷诺数(gas Reynolds number)、气体马赫数(gas Mach

number)和液膜厚度的变化规律。篇幅所限,文中参数多为已经转化过的量纲一参数。

1 模型的建立

一个厚度为 2 的二维粘性液膜在喷射压力 P_1 的推动下,以液体基流(based flow)速度 U_1 喷射进入气体环境,液膜两侧设置不同基流速度的空气助力,如图 1 所示。液膜密度为 $\bar{\rho}_1$,液膜运动学粘度为 $\bar{\nu}_1$,液膜表面张力为 $\bar{\sigma}_1$ (其中:上标“-”表示有量纲参数)。环境气体的背压为 P_{g_j} ,液膜两侧助力空气的密度为 ρ_{g_j} ,流速为 U_{g_j} ($j=1$,表示液膜(或气体)的一侧; $j=2$ 表示另一侧,其他以此类推)。气液基流流速比为 U_j ,气液基流流速差为 U_{dj} ,气液压力比为 P_j ($P_j = P_{g_j}/P_1$)。由于弗劳德数(Froude number)很大,所以液膜的重力忽略不计。 x 向为液膜喷射方向, y 向垂直于液膜喷射方向,即液膜厚度方向, θ 为液膜两侧表面波的相位角, t 为时间。假设 $P_k = P_k(x, y, t)$ 、 $\mathbf{u}_k = \mathbf{u}_k(x, y, t)$ 分别为扰流(disturbed flow)的压力和速度向量(k 为 1 表示液体, k 为 g 表示气体),则基流与扰流合流的总压力为 $P_{\text{tot}} = 1 + P_1$; x 向、 y 向总流速分别为 $u_{\text{tot}x} = 1 + u_k$ 、 $v_{\text{tot}y} = v_k$ 。其中: u_k 为 x 向扰动速度; v_k 为 y 向扰动速度。

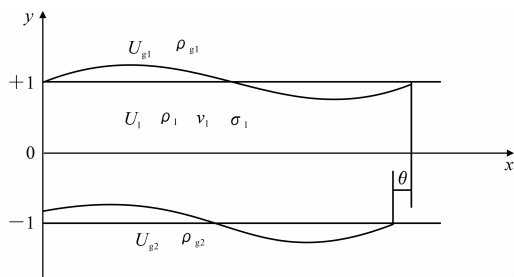


图 1 平面液膜表面波

2 控制方程和边界条件

N-S 连续性控制方程的一般形式为

$$\frac{d\bar{\rho}_k}{dt} + \bar{\rho}_k \operatorname{div}(\mathbf{u}_{k\text{tot}}) = 0 \quad (1)$$

N-S 动量控制方程的一般形式为

$$\bar{\rho}_k \frac{d\mathbf{u}_{k\text{tot}}}{dt} = \bar{\rho}_k \bar{\mathbf{F}}_k - \nabla \bar{P}_{\text{tot}} + \bar{\mu}_k \Delta \mathbf{u}_{k\text{tot}} \quad (2)$$

式中: $\operatorname{div}()$ 为散度计算符号; $\bar{\rho}_k$ 为密度; $\mathbf{u}_{k\text{tot}}$ 为总流速向量; ∇ 为哈密顿算子; Δ 为拉普拉斯算子; $\bar{\mathbf{F}}_k$ 为重力; $\bar{\mu}_k$ 为动力学粘度。

2.1 液相 N-S 控制方程

对 N-S 方程的一般形式进行量纲一推导,得到不可压缩液相量纲一 N-S 准则控制方程,该方程为

涡量 $\bar{\omega}_1 = \nabla \times \bar{u}_1$ 的有旋方程。

连续性方程

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

x -动量守恒方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} + (1 + u_1) \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} = \\ -Eu_1 \frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{1}{Re_1} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

y -动量守恒方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial t} + (1 + u_1) \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} = \\ -Eu_1 \frac{\partial P_1}{\partial y} + \frac{1}{Re_1} \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

式中: $Eu_1 = \bar{P}_1 / (\bar{\rho}_1 \bar{U}_1^2)$ 为液流欧拉数; $Re_1 = \bar{a} \bar{U}_1 / \bar{\nu}_1$ 为液流雷诺数; \bar{a} 为液膜的半厚度(m); u_1, v_1 分别为 x 向、 y 向扰动速度。

在动量守恒方程式(4)、式(5)中,由于液体 x 向扰动速度 u_1 是变量,因此 N-S 动量守恒方程为非线性方程。

2.2 气相 N-S 控制方程

对 N-S 方程的一般形式进行量纲一化推导,得到马赫数小于 0.3 的不可压缩气相量纲一 N-S 准则控制方程。

连续性方程

$$\frac{\partial u_{gj}}{\partial x} + \frac{\partial v_{gj}}{\partial y} = 0 \quad (6)$$

x -动量守恒方程

$$\begin{aligned} \frac{1}{U_j} \frac{\partial u_{gj}}{\partial t} + (1 + u_{gj}) \frac{\partial u_{gj}}{\partial x} + v_{gj} \frac{\partial u_{gj}}{\partial y} = \\ -\frac{1}{\gamma Ma_{gj}^2} \frac{\partial P_{gj}}{\partial x} + \frac{1}{Re_{gj}} \left(\frac{\partial^2 u_{gj}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_{gj}}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

y -动量守恒方程

$$\begin{aligned} \frac{1}{U_j} \frac{\partial v_{gj}}{\partial t} + (1 + u_{gj}) \frac{\partial v_{gj}}{\partial x} + v_{gj} \frac{\partial v_{gj}}{\partial y} = \\ -\frac{1}{\gamma Ma_{gj}^2} \frac{\partial P_{gj}}{\partial y} + \frac{1}{Re_{gj}} \left(\frac{\partial^2 v_{gj}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_{gj}}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (8)$$

式中: γ 为绝热指数; $Ma_{gj} = \bar{U}_{gj} / \bar{C}$ 为气流马赫数; $Re_{gj} = \bar{a} \bar{U}_{gj} / \bar{\nu}_{gj}$ 为气流雷诺数; u_{gj}, v_{gj} 分别为气体 x 向、 y 向扰动速度; \bar{U}_{gj} 为气体基流速度。

2.3 附加控制方程

对于已经脱离喷嘴壁面约束、各向同性的牛顿流体,有流体附加控制方程^[6] 为

$$\frac{\partial u_k}{\partial y} + \frac{\partial v_k}{\partial x} = 0 \quad (9)$$

2.4 边界条件

N-S 方程的解必须满足动力学边界条件、运动学边界条件和附加控制方程条件的限制。对于非线性稳定性分析,运动学边界条件为

$$v_k = \frac{\partial \xi_{kj}}{\partial t} + u_{k\text{tot}} \frac{\partial \xi_{kj}}{\partial x} \quad (10)$$

式中: ξ_{kj} 为液膜上、下气液交界面表面波的振幅,它的 1 阶形式表示为

$$\xi_{k1} = \xi_0 \exp(\omega_k t + i q x) \quad \text{液膜一侧} \quad (11)$$

$$\xi_{k2} = \xi_0 \exp(\omega_k t + i q x + k \theta) \quad \text{液膜另一侧} \quad (12)$$

式中: ξ_0 为液膜表面波的初始振幅; ω_k 为圆频率; $i = \sqrt{-1}$; q 为波数。

动力学边界条件为

$$P_1 - P_j P_{gj} - (-1)^j \frac{\bar{\sigma}_1}{\bar{a} \bar{P}_1} \frac{\xi_{j,xx}}{(1 + \xi_{j,x}^2)^{3/2}} = 0 \quad (13)$$

式中: $\xi_{j,x} = \frac{\partial \xi_j}{\partial x}$; $\xi_{j,xx} = \frac{\partial^2 \xi_j}{\partial x^2}$; ξ_j 为液膜两侧的扰动振幅。

3 控制方程的解

由于液相和气相均为不可压缩流体,故可以引入扰动速度的流函数 ψ_k

$$u_k = \frac{\partial \psi_k}{\partial y}, \quad v_k = -\frac{\partial \psi_k}{\partial x} \quad (14)$$

式中: $\psi_k(x, y, t) = \psi_k(y) \exp(\omega_k t + i q x)$ (15)

应用流函数,能够分别对液相和气相非线性 N-S 控制方程求解。

3.1 液相 N-S 控制方程的解

将流函数方程式(14)、式(15)代入液相 N-S 控制方程式(3) ~ 式(5),建立液相流函数控制方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right) + \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} = \\ -Eu_1 \frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{1}{Re_1} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right) \right] \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial y} = \\ Eu_1 \frac{\partial p_1}{\partial y} + \frac{1}{Re_1} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right) \right] \end{aligned} \quad (17)$$

利用式(16)对 y 求偏导,加上式(17)对 x 求偏导,可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} \right) + \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} \right) = \end{aligned}$$

$$\frac{1}{Re_1} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} \right) \right] \quad (18)$$

将附加条件式(14)代入式(18)中的非线性项,得

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (19)$$

虽然 x -动量方程的非线性项和 y -动量方程的非线性项均不为 0,但当 x -动量方程和 y -动量方程联立求解时,可以通过对两动量方程求偏导再相加的方法,使两动量方程的非线性项相互抵消、约掉,从而使融合后的动量方程线性化。线性化后的式(18)变为

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} \right) = \\ & \frac{1}{Re_1} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (20)$$

$$\text{定义} \quad s_{1j}^2 = \frac{1}{3}q^2 + \frac{2}{3}Re_1(\omega_1 + iq) \quad (21)$$

则式(20)变成

$$\frac{d^2 \phi_1(y)}{dy^2} - s_{1j}^2 \phi_1(y) = 0 \quad (22)$$

解式(22),得其通解为

$$\phi_1(y) = c_1 \exp(s_{11}y) + c_2 \exp(-s_{12}y) \quad (23)$$

式中: c_1, c_2 均为积分常数。

将此通解代入 N-S 控制方程和附加控制方程,方程平衡,验证了通解的正确性。将运动学边界条件式(10)代入式(23),求得式(23)的积分常数为

$$c_1 = A_1 \frac{C_1 e^{i\theta} - E_1}{B_1 E_1 - C_1 D_1} \quad (24)$$

$$c_2 = A_1 \frac{B_1 e^{i\theta} - D_1}{B_1 E_1 - C_1 D_1} \quad (25)$$

$$\text{式中:} \quad A_1 = \xi_0 \frac{\omega_1 + iq}{iq};$$

$$B_1 = [iq\xi_{11} + 1] \exp(iq + iq\xi_{11});$$

$$C_1 = [iq\xi_{11} - 1] \exp(-iq - iq\xi_{11});$$

$$D_1 = [iq\xi_{12} + 1] \exp(-iq + iq\xi_{12});$$

$$E_1 = [iq\xi_{12} - 1] \exp(iq - iq\xi_{12}).$$

从而得到式(23)的特解。液相表面波的扰动振幅、 x 向和 y 向扰动速度、扰动压力可分别表示为

$$\xi_{11} = \xi_0 \exp\left(-\frac{2q^2}{Re_1}t\right) \quad (26)$$

$$\xi_{12} = \xi_0 \exp\left(-\frac{2q^2}{Re_1}t + i\theta\right) \quad (27)$$

$$u_1 = \frac{iqA_1}{B_1 E_1 - C_1 D_1} [(C_1 e^{i\theta} - E_1) e^{i\omega y} -$$

$$(B_1 e^{i\theta} - D_1) e^{-i\omega y}] \exp\left(-\frac{2q^2}{Re_1}t\right) \quad (28)$$

$$\begin{aligned} v_1 = & \frac{iqA_1}{B_1 E_1 - C_1 D_1} [(C_1 e^{i\theta} - E_1) e^{i\omega y} + \\ & (B_1 e^{i\theta} - D_1) e^{-i\omega y}] \exp\left(-\frac{2q^2}{Re_1}t\right) \end{aligned} \quad (29)$$

$$P_1 = -\frac{2q^2}{Eu_1} c_1 c_2 \exp\left(-\frac{4q^2}{Re_1}t\right) + p_{10} \quad (30)$$

式中: p_{10} 为液相扰动压力积分常数。

3.2 气相 N-S 控制方程的解

经过与解液相 N-S 方程相似的推导过程,可以得到气相二阶常系数常微分线性齐次方程的通解为

$$\phi_{g1}(y) = c_3 \exp(s_{g1}y) + c_4 \exp(-s_{g1}y) \quad (31)$$

$$\text{定义} \quad s_{gj}^2 = \frac{1}{3}q^2 + \frac{2}{3}Re_g(\omega_g + iq)$$

求得式(31)的积分常数为

$$c_3 = \frac{A_{g2} C_g e^{i\theta} - A_{g1} E_g}{B_g E_g - C_g D_g} \quad (32)$$

$$c_4 = \frac{A_{g2} B_g e^{i\theta} - A_{g1} D_g}{B_g E_g - C_g D_g} \quad (33)$$

$$\text{式中:} \quad A_{gj} = \xi_0 \frac{\omega_{gj}/U_j + iq}{iq};$$

$$B_g = [iq\xi_{g1} + 1] \exp(iq + iq\xi_{g1});$$

$$C_g = [iq\xi_{g1} - 1] \exp(-iq - iq\xi_{g1});$$

$$D_g = [iq\xi_{g2} + 1] \exp(-iq + iq\xi_{g2});$$

$$E_g = [iq\xi_{g2} - 1] \exp(iq - iq\xi_{g2}).$$

从而得到式(31)的特解。气相表面波的扰动振幅、 x 向和 y 向扰动速度、扰动压力可分别表示为

$$\xi_{g1} = \xi_0 \exp\left[\left(-\frac{2q^2 U_1}{Re_{g1}} + iqU_{d1}\right)t\right] \quad (34)$$

$$\xi_{g2} = \xi_0 \exp\left[\left(-\frac{2q^2 U_2}{Re_{g2}} + iqU_{d2}\right)t + i\theta\right] \quad (35)$$

$$\begin{aligned} u_{gj} = & \frac{iq}{B_g E_g - C_g D_g} [(A_{g2} C_g e^{i\theta} - A_{g1} E_g) e^{i\omega y} - \\ & (A_{g2} B_g e^{i\theta} - A_{g1} D_g) e^{-i\omega y}] \exp\left[\left(-\frac{2q^2 U_j}{Re_{gj}} + iqU_{dj}\right)t\right] \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} v_{gj} = & -\frac{iq}{B_g E_g - C_g D_g} [(A_{g2} C_g e^{i\theta} - A_{g1} E_g) e^{i\omega y} + \\ & (A_{g2} B_g e^{i\theta} - A_{g1} D_g) e^{-i\omega y}] \exp\left[\left(-\frac{2q^2 U_j}{Re_{gj}} + iqU_{dj}\right)t\right] \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} P_{gj} = & -2q^2 \gamma Ma_{gj}^2 c_3 c_4 \exp\left[\left(-\frac{4q^2 U_j}{Re_{gj}} + \right. \right. \\ & \left. \left. 2iqU_{dj}\right)t\right] + p_{g0} \end{aligned} \quad (38)$$

式中: p_{g0} 为气相扰动压力积分常数,由于气液交界

面处的液相与气相压力平衡,因此扰动压力积分常数 $p_{l0} = p_{g0}$ 。

4 色散关系式

4.1 空气助力环境中液膜的表面波(液膜两侧相位角 $\theta \neq 0$ 或 $\theta \neq \pi$)

将气相、液相 N-S 控制方程的解代入动力学边界条件式(13),得到空气助力环境中液膜表面波的量纲一色散准则关系式为

$$(F + J)L\xi_1 + (F + G)I\xi_2 = 0 \quad (39)$$

或

$$e^{i\theta} = -\frac{L}{I} \frac{F + J}{F + G} \quad (40)$$

式中:

$$F = 4q^2 \xi_1^2 \frac{We_1}{Re_1^2} \frac{(C_1 e^{i\theta} - E_1)(B_1 e^{i\theta} - D_1)}{(B_1 E_1 - C_1 D_1)^2};$$

$$G = \gamma PEu_1 We_1 Ma_{g1}^2 \cdot$$

$$\frac{(A_{g2} C_g e^{i\theta} - A_{g1} E_g)(A_{g2} B_g e^{i\theta} - A_{g1} D_g)}{(B_g E_g - C_g D_g)^2} \cdot$$

$$\exp\left[\left(-\frac{4q^2 U_1}{Re_{g1}} + 2iqU_{d1}\right)t\right];$$

$$J = \gamma PEu_1 We_1 Ma_{g2}^2 \cdot$$

$$\frac{(A_{g2} C_g e^{i\theta} - A_{g1} E_g)(A_{g2} B_g e^{i\theta} - A_{g1} D_g)}{(B_g E_g - C_g D_g)^2} \cdot$$

$$\exp\left[\left(-\frac{4q^2 U_2}{Re_{g2}} + 2iqU_{d2}\right)t\right];$$

$$I = 2(1 - q^2 \xi_1^2)^{3/2};$$

$$L = 2(1 - q^2 \xi_2^2)^{3/2}.$$

色散准则关系式(39)反映了量纲一参数:液流韦伯数 We_1 、液流欧拉数 Eu_1 、液流雷诺数 Re_1 、气流雷诺数 Re_{g1} 、气流马赫数 Ma_{g1} 、气液压力比 P_j 、气液基流流速差 U_{dj} 或气液基流流速比 U_j 与初始扰动振幅 ξ_0 和液膜两侧扰动振幅 ξ_j 之间的关系。

4.2 静止空气环境中液膜的表面波(液膜两侧相位角 $\theta = 0$ 的非对称波形(sinusous)或 $\theta = \pi$ 的对称波形(varicose))

典型的表面波形式为非对称波形(sinusous)和对称波形(varicose),上、下气液体交界面表面波相位角 $\theta = 0$ 、 $e^{i\theta} = 1$ 为非对称波形, $\theta = \pi$ 、 $e^{i\theta} = -1$ 为对称波形。量纲一色散准则关系式为

$$F + G \mp \frac{\xi}{I} = 0 \quad (41)$$

式中: ξ 为液膜两侧相同的扰动振幅。其他参数可依据空气助力下液膜表面波色散关系式中的相应参数

方程简化而得。对于 $\bar{U}_g = 0$ 的静止环境气体,由于 $Ma_g = 0$ 和 $Re_g = 0$,所以参数 G 应为

$$G = -4q^2 \xi_0^2 \gamma PEu_1 \frac{We_1}{Re_{gc}^2} \frac{(C_g \pm E_g)(B_g \pm D_g)}{(B_g E_g - C_g D_g)^2} \cdot \exp\left[\left(-\frac{4q^2}{Re_{lg}} + 2iq\right)t\right] \quad (42)$$

式中:符号“ \mp ”或“ \pm ”的上部符号表示对称波形(varicose),下部符号表示非对称波形(sinusous);雷诺数为 $Re_{gc} = a\bar{C}/\bar{v}_g$, $Re_{lg} = a\bar{U}_1/\bar{v}_g$ 。

5 结果与讨论

通过推导,还可以得到气液体表面波圆频率比、圆频率差和气相振幅比。

气液体表面波圆频率比 ω 为

$$\omega = \frac{\omega_{gj}}{\omega_1} = U_j \frac{2q^2/Re_{gj} + iq}{2q^2/Re_1 + iq} \quad (43)$$

圆频率差为(ω_{gj} 为气体圆频率, ω_1 为液体圆频率)

$$\omega_{gj} - \omega_1 = \frac{2q^2}{U_1} \left(\frac{\bar{v}_1}{\bar{\rho}_1} - \frac{\bar{v}_g}{\bar{\rho}_g} \right) + iqU_{dj} \quad (44)$$

上、下气液体交界面的液相表面波振幅比为

$$\frac{\xi_{l2}}{\xi_{l1}} = e^{i\theta} \quad (45)$$

气相表面波振幅比为

$$\frac{\xi_{g2}}{\xi_{g1}} = \frac{\exp[(-2q^2 U_2/Re_{g2} + iqU_{d2})t + i\theta]}{\exp[(-2q^2 U_1/Re_{g1} + iqU_{d1})t]} \quad (46)$$

由式(43)~式(46)可知,气液体表面波的圆频率及气相扰动振幅的差别取决于雷诺数,只有当气液体流速相等,且雷诺数相等时,气液体表面波的圆频率才完全相同,液流边界与气流边界重合;否则,气液体表面波的圆频率不等,液流边界与气流边界分离。当气液体圆频率比 $\omega > 1$ 时, $\omega_{gj} > \omega_1$, 气体的扰动振幅将大于液体的扰动振幅,由于气液体均假设为不可压缩的理想流体,因此在液流边界与气流边界之间将出现真空的空穴。雷诺数差值越大,液流边界与气流边界之间相对速度越大,则空穴处的压力越低,液流与气流边界之间的空穴将会增大。在高雷诺数下,空气动力作用将远远大于表面张力的影响,是液膜碎裂的主要影响因素;而空穴的负压作用会使液膜边界首先变得粗糙不平,进而分裂成液片或大颗粒液滴,造成整个液膜碎裂的重要因素。对于实际可压缩气体,空穴处应多为稀薄气体所填充,且有涡旋产生^[7]。气液体的实际交界面位于液体边界和气体边界之间,近似为液体边界。当气液体圆

(下转第 102 页)