

贝叶斯理论在红粘土地基沉降中的应用

李珍玉¹, 李海洋², 王永和¹, 杨果林¹

(1. 中南大学 土木建筑学院, 湖南 长沙 410075; 2. 青海省交通厅, 青海 西宁 810008)

摘 要:通过对实测样本进行直方图分析和假设检验,得到样本的概率分布,结合先验分布,基于贝叶斯方法得到沉降修正系数的后验分布,对传统的沉降修正系数进行优化。实例分析结果表明:当先验分布为无信息分布时,其后验分布受样本信息的影响较大;当样本信息服从高斯分布时,其后验分布也服从参数为 μ 和 σ 的高斯分布, μ 值随外荷载增大而减小, σ 值呈无明显规律变化;通过贝叶斯方法的优化,修正经验系数考虑了荷载的影响,并且取值的区间明显缩小。

关键词:岩土工程; 贝叶斯理论; 沉降修正系数; 先验信息; 后验分布; 均匀分布; 高斯分布

中图分类号: TU433

文献标志码: A

Application of Bayesian theory in ground settlement of red clay

LI Zhen-yu¹, LI Hai-yang², WANG Yong-he¹, YANG Guo-lin¹

(1. School of Civil Engineering and Architecture, Central South University, Changsha 410075, Hunan, China;

2. Department of Communications, Qinghai Province Government, Xining 810008, Qinghai, China)

Abstract: The probability distributions of samples measured are obtained through histogram analysis and hypothesis testing. The posterior distribution coefficients can be gotten based on the Bayesian approach and combined with priori distributions of the settlement modification coefficients. The analysis results show that when the prior distributions are the non-information, the posterior distributions of coefficients are greatly influenced by samples information. When the distributions of samples are approved to obey Gaussian distributions, the posterior distributions of coefficients also obey these distributions, whose parameters are μ and σ , the values of μ are decreased with external loads increasing, and the values of σ have no significant change law. Through the optimization by Bayesian methods, the range of settlement modification coefficients is narrowed, which the influence of external loads are taken into account. 3 tabs, 4 figs, 10 refs.

Key words: geotechnical engineering; Bayesian theory; settlement modification coefficients; prior knowledge; posterior distribution; uniform distribution; Gaussian distribution

0 引言

近年来,为解决地基沉降的问题,采用了许多计算方法^[1-2],其中分层总和法因其原理简单而被广泛

地应用于工程设计和实践中^[3]。由于土性材料的复杂性和各向异性,计算过程必须采用一些假设作为前提条件,致使计算值和实测值有较大的差异^[4]。为解决这个问题,修正系数的概念被引入分层总和

法中,如《建筑地基基础设计规范》^[5]规定,沉降修正系数的大小取决于地基上荷载的大小与地基土模量的高低;《港口工程地基规范》^[6]规定,按特定地区经验来选取修正系数;Serguey^[7]认为德国的这一无量纲系数应该取0.8。由于土的特殊性质、荷载及土的侧向变形等,修正系数的确定具有随意性和不确定性,也有很多学者考虑各种影响沉降修正系数的因素,提出各种不同的计算方法,如王志亮等^[8]考虑路堤高度、路基土体的软硬程度,提出路堤沉降的一维法计算修正系数;王志亮等^[9]考虑土体应力历史的影响,对沉降修正系数进行了研究。受土性和荷载等因素的影响,取自同一地区的土样,即使相隔很近其参数也会不同,因而很难用一个值对沉降的计算进行修正,在此可用一个分布代替一固定的值显得更为合理。对于地基沉降问题的处理,贝叶斯理论是一个很好的方法^[10]。为此,本文采用贝叶斯理论对红粘土地基沉降进行分析。

1 分析参数的贝叶斯推断

1.1 先验分布

先验分布是贝叶斯统计理论中的重要组成部分。对于先验分布的获取,目前有无信息先验分布(Non-informative Priors)和经验先验分布(Informative Priors)两种。无信息先验分布在后验分布中发挥的作用较小,当缺少外部信息或者外部信息对推断不产生影响时,都可称为无信息先验分布,通常采用均匀分布作为先验分布;经验先验分布的样本量大小和分布的形式对后验分布有较大的影响,样本容量越大对先验分布优势越有利,反之将降低先验分布对后验分布的重要性,经验先验分布主要是由先前的知识获得。

1.2 后验分布

从已有的信息和经验知识中,得到参数为 θ 的先验概率分布用 $\pi(\theta)$ 表示。对于给定样本,根据贝叶斯定理,对参数为 θ 的后验分布进行信息优化,后验分布的概率密度函数 $f(\theta | x)$ 为

$$f(\theta | x) = \frac{p(x | \theta)\pi(\theta)}{\int_{\xi} p(x | \theta)\pi(\theta)d\theta} \quad (1)$$

式中: θ 为先验分布的参数; ξ 为 θ 的取值范围; $p(x | \theta)$ 为基本样本的联合密度函数。

当来自于样本容量为 n 的样本 x_1, x_2, \dots, x_n 被确定, $p(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta)$ 中 x_1, x_2, \dots, x_n 不变,只有 θ 改变,因此 $p(x | \theta)$ 可认为是以 θ 为参数的似然

函数,可表示为 $l(\theta | x_1, x_2, \dots, x_n)$ 。因此,后验概率密度函数可表示为

$$f(\theta | x_1, x_2, \dots, x_n) \propto \pi(\theta)l(\theta | x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2)$$

通过室内外试验,可根据观测到的样本信息,用直方图统计法对经验系数的分布进行估计并检验,得到经验系数样本信息的分布,用 $Q(\theta)$ 表示,则有

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta) \sim Q(\theta) \quad (3)$$

因此,似然函数 $l(\theta | x_1, x_2, \dots, x_n)$ 可表示为

$$l(\theta | x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n Q(\theta_i) \quad (4)$$

通过以上分析,后验分布可表示为

$$f(\theta | x_1, x_2, \dots, x_n) = \pi(\theta) \prod_{i=1}^n Q(\theta_i) \quad (5)$$

2 经验系数的贝叶斯分析

2.1 随机变量

目前,实际工程中对于沉降的计算,广泛使用的仍是《建筑地基基础设计规范》中推荐的方法,即引入平均附加应力概念的简化分层总和法。与传统的分层总和法相比,简化分层总和法中有许多实际经验得到的经验系数。经验系数 ϕ 定义为沉降观测值 S 和计算值 S' 的比值,其公式为

$$\phi = S/S' \quad (6)$$

规范^[5]中 ϕ 可通过观测信息和计算沉降量获得,当无观测数据时,可通过对土的压缩模量进行查表获得。由于土的复杂性和各向异性,土的特性是随空间变化的,即使相距不远的2个工点或不同工点,土的参数也不是固定值。地基沉降观测值和计算值随地质条件的不同而变化,因此可将 ϕ 视为随机变量。

2.2 贝叶斯分析

在岩土工程中,专家的经验特别值得重视。依据已有的成果,根据土的压缩模量选择沉降经验系数。因为土体压缩模量不是定值,故沉降经验系数也不会是常数。《建筑地基基础设计规范》中, ϕ 的推荐范围是 $[0.2, 1.4]$ 。当缺少土的压缩模量等信息时,将不能确定 ϕ 在此范围的具体值,此时取到该范围内任意值的机率都相等。因此可认为,在无更多信息条件下,经验系数的先验分布可取为在 $[0.2, 1.4]$ 区间的均匀分布,其概率密度函数表示为

$$\pi(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < \theta < b \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (7)$$

式(7)得到的先验信息可用均匀分布表示, a 和

b 的值分布为 0.2 和 1.4;结合典型工点实测沉降观测值对此概率密度进行优化,用沉降观测值的直方图得到样本分布,并进行假设检验。

3 工程实例分析

本文以某一客运新线红粘土地基沉降为例,研究小样本情况下沉降修正系数的分布。由前文分析, ϕ 的先验分布可取为均匀分布。所选实例主要是为了获得该地区沉降观测样本的分布信息,利用贝叶斯理论对先验分布进行优化。

地基沉降观测值来自 4 个不同的工点(1[#],2[#],

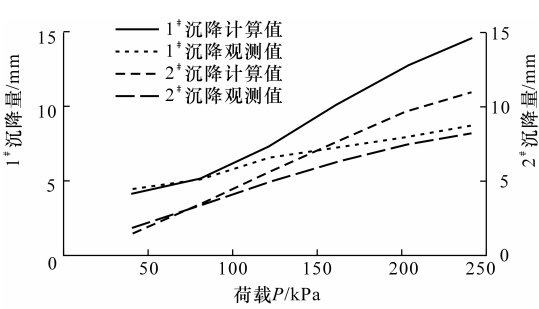
3[#],4[#]),在工点附近取原状土样进行室内试验,得到红粘土的基本特性指标如表 1 所示。在不同荷载作用下,地基现场沉降观测值 S 和计算值 S' 如表 2 和图 1 所示。

表 1 红粘土的物理力学参数

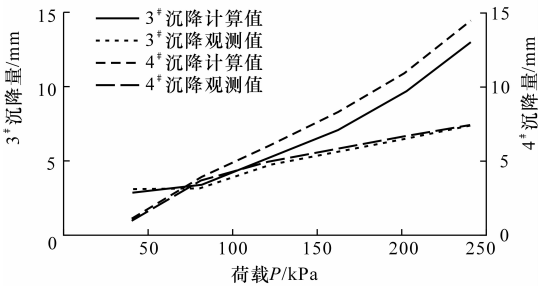
工点	含水量 $w/\%$	密度 $\rho/$ ($\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$)	孔隙比 e	塑限 $w_p/$ $\%$	液限 $w_L/$ $\%$	压缩系数 $/$ MPa^{-1}
1 [#]	28.0	1.83	0.947	27.3	50.4	0.12
2 [#]	36.2	1.80	1.075	29.5	47.0	0.17
3 [#]	24.9	1.95	0.751	28.6	48.8	0.21
4 [#]	25.5	1.93	0.761	28.1	43.5	0.09

表 2 地基沉降观测值与理论计算值

荷载 $P/$ kPa	1 [#]			2 [#]			3 [#]			4 [#]		
	S'/mm	S/mm	$\frac{S}{S'}$	S'/mm	S/mm	$\frac{S}{S'}$	S'/mm	S/mm	$\frac{S}{S'}$	S'/mm	S/mm	$\frac{S}{S'}$
40	4.03	4.39	1.09	1.55	1.78	1.15	2.84	3.02	1.06	1.05	1.07	1.02
80	5.16	4.95	0.96	3.53	3.28	0.93	3.24	3.05	0.94	3.78	3.62	0.96
120	7.34	6.59	0.89	5.56	4.78	0.86	5.11	4.59	0.89	5.87	5.27	0.89
160	10.03	7.27	0.73	7.59	6.22	0.82	6.97	5.50	0.79	8.01	6.65	0.83
200	12.71	7.88	0.62	9.63	7.54	0.78	9.62	6.44	0.67	10.87	7.82	0.72
240	14.08	8.85	0.61	10.54	7.96	0.76	13.08	7.34	0.56	14.72	8.83	0.60



(a) 1[#]和2[#]工点



(b) 3[#]和4[#]工点

图 1 地基在不同荷载下的沉降量

根据已有的知识, ϕ 的先验分布被认为服从均匀分布,先验分布概率密度如图 2 所示。

图 3 为对 4 个工点的沉降修正系数进行分析得到的沉降修正系数直方图。从图 3 可看出,该样本分布类似于高斯分布。假设该样本服从高斯分布,利用适用于小样本检验的 Shapiro-Wilk test 对该样本进行正态性验证,其公式为

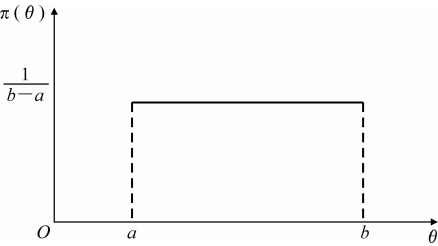


图 2 经验系数的先验分布

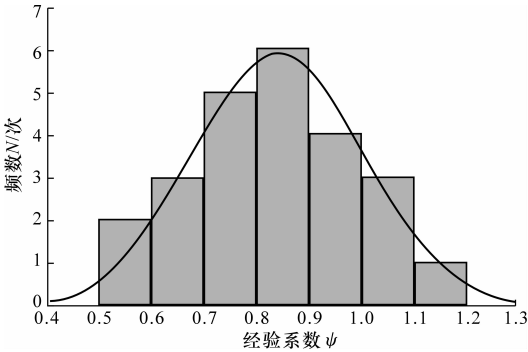


图 3 经验系数的直方图

$$W = \frac{\left[\sum_{k=1}^{n/2} a_k (x_{(n+1-k)} - x_{(k)}) \right]^2}{\sum_{k=1}^n (x_{(k)} - \bar{x})^2} \quad (8)$$

式中: W 为 Shapiro-Wilk test 的统计值; $x_{(k)}$ 为样本值, $k = 1, 2, \dots, n/2$; \bar{x} 为样本均值; a_k 为 Shapiro-Wilk test 系数。

经过计算分析,Shapiro-Wilk test 的统计值为

0.977 6,当显著性水平 α 为 0.05 时,统计值 W 的临界分位值 $W_{0.05}$ 查表得 0.916,由于 $W_{0.05} < W < 1$,正态分布的假设被接受。

从上述分析可知,经验分布系数可认为服从高斯分布,则有

$$p(x \mid \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2}} \quad -\infty < x < \infty \quad (9)$$

式中: μ 、 σ 均为高斯分布的参数,此处 $\mu = \theta$ 。

根据贝叶斯方法,先验分布结合优化信息后,由式(1)、式(7) 和式(9),可得后验分布为

$$f(x) = \frac{p(x \mid \theta)\pi(\theta)}{\int_a^b p(x \mid \theta)\pi(\theta) d\theta} \quad (10)$$

式中: $f(x)$ 为后验分布; a 、 b 分别为上、下边界值。

如果令

$$m = \frac{\pi(\theta)}{\int_a^b p(x \mid \theta)\pi(\theta) d\theta} \quad (11)$$

则式(10) 可写为

$$f(x) = mp(x \mid \theta) \quad (12)$$

令 $f(x) = Y$, $p(x \mid \theta) = X$,则式(12) 为

$$Y = mX \quad (13)$$

式(13) 为线性函数,当 X 为自变量时, Y 是严格单调的函数,则有

$$f^{-1}(Y) = \frac{Y}{m} \quad (14)$$

则 Y 的概率密度函数为

$$P(Y) = P(f^{-1}(Y)) \mid f^{-1}(Y)' \mid =$$

$$\begin{aligned} &P(f^{-1}(Y)) \mid \frac{1}{m} \mid = \\ &\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(Y/m-\theta)^2}{2\sigma^2}\right] \Big| \frac{1}{m} \Big| = \\ &\frac{1}{\sqrt{2\pi} \mid m \mid \sigma} \exp\left[-\frac{(Y-m\theta)^2}{2m^2\sigma^2}\right] \end{aligned} \quad (15)$$

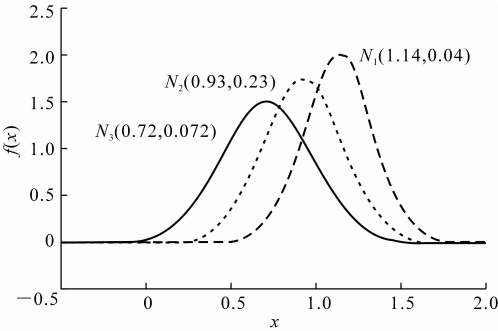
可记为 $Y \sim N(m\theta, m^2\sigma^2)$ 。

从式(15) 可看出,后验分布仍是服从参数为 $m\theta$ 和 $m^2\sigma^2$ 的高斯分布。4 个工点地基在不同荷载作用下,沉降经验系数的后验分布参数见表 3;经验系数的后验分布如图 4 所示。

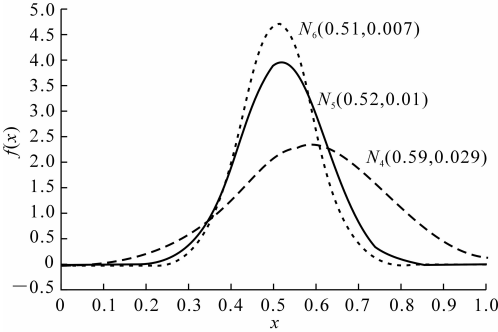
由图 4 可以看出,在不同荷载作用下,虽然先验分布相同,但后验分布不同,经验系数服从高斯分布而不是传统的一固定值;当荷载增加时,高斯分布的 μ 也不同, σ 无特定规律,但该值与样本容量有关,根据统计知识,样本容量越大, σ 值越小,因此,沉降观测数据对后验分布影响非常大。

表 3 经验系数的后验统计

荷载 P/kPa	μ	σ	$N(\mu, \sigma^2)$
40	1.140	0.200	$N_1(1.140, 0.040)$
80	0.093	0.230	$N_2(0.930, 0.057)$
120	0.720	0.268	$N_3(0.720, 0.072)$
160	0.590	0.170	$N_4(0.590, 0.029)$
200	0.520	0.100	$N_5(0.520, 0.010)$
240	0.510	0.084	$N_6(0.510, 0.007)$



(a) 荷载为40、80、120 kPa的后验分布



(b) 荷载为160、200、240 kPa的后验分布

图 4 经验系数的后验分布

4 结 语

(1)贝叶斯理论运用于岩土工程的主要问题,是怎样获取先验分布和对后验分布的推断;根据以往的经验,沉降经验系数的先验分布取为在某区间上的均匀分布。

(2)通过对观测的小样本进行统计分析和假设检验,得到沉降经验系数样本的概率分布,基于贝叶斯理论,结合其先验分布,获得沉降经验系数后验分布;实例证明,后验分布的沉降修正系数的选取,缩小了传统方法的取值范围[0.2,1.4],降低了沉降计算的不确定性。

(3)先验分布结合样本信息的后验分布,最大限度地利用有限的样本信息;研究结果表明,经验系数随作用在地基上的荷载改变而变化,荷载增大,高斯分布的 μ 逐渐减小, σ 无特定规律。