

岩质边坡六面体滑楔的三维塑性极限分析

王根龙^{1,2}, 张军慧¹, 晏长根³

(1. 防灾科技学院 防灾工程系, 河北 三河 065201; 2. 中国科学院 地质与地球物理研究所, 北京 100029; 3. 长安大学 地质工程与测绘学院, 陕西 西安 710054)

摘 要:针对岩质边坡六面体滑楔的稳定性问题,运用三维塑性极限分析方法,借助极限分析虚功率方程,推导出安全系数上限解公式;通过典型算例对该分析方法进行了检验,并与 Hoek 教授介绍的二维刚体极限平衡方法进行了比较。结果表明:刚塑性的假定条件及虚功率原理的应用,有效地避免了滑面的的受力分析,简化了复杂的计算;该方法具有分析结论正确、公式概念清晰、表达式简洁和使用方便等特点。

关键词:岩土工程;上限解;六面体滑楔;虚功率原理;塑性极限分析

中图分类号:TU45

文献标志码:A

3D plasticity limit analysis of hexahedral sliding wedge for rock slope

WANG Gen-long^{1,2}, ZHANG Jun-hui¹, YAN Chang-gen³

(1. Department of Disaster Prevention Engineering, Institute of Disaster Prevention Science and Technology, Sanhe 065201, Hebei, China; 2. Institute of Geology and Geophysics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029, China; 3. School of Geology Engineering and Geomatics, Chang'an University, Xi'an 710054, Shaanxi, China)

Abstract: By means of 3D plasticity limit analysis method and virtual work rate equation in limited state, the upper bound solution of safety factor can be derived when hexahedral sliding wedge for the rock slope stability is treated as study object. A typical example is used to prove the new method mentioned in the paper; moreover, the authors compare the method with 2D rigid body limit equilibrium method which has been introduced by Professor Hoek. The results show that based on rigid-plastic presumption and virtual work-rate theorem, not only the stress analysis on sliding surface can be avoided, but also the complicated calculation can be simplified, the new method has many advantages, such as correctness for analysis conclusion, clarity of formulaic concept, succinctness of algebraic expression, facility for use etc. 1 tab, 4 figs, 12 refs.

Key words: geotechnical engineering; upper bound solution; hexahedral sliding wedge; virtual work-rate theory; plasticity limit analysis

0 引言

三维滑楔是由坡面、顶面、破坏面、两侧切割面及顶部张裂缝等 6 个面围限的岩石边坡地质体,简称为六面体滑楔。在岩石边坡工程中,三维滑楔平面破坏模式可以认为是楔形体破坏分析的一种特殊情况。国外文献^[1]记载的西班牙 Atalaya 露天矿斑岩边坡、英格兰 Mendip 山腰石灰岩露天矿采石场边坡、中国济南市砚池山高边坡^[2]、莆田市委党校电教楼边坡^[3]等都属于三维滑楔平面滑动模式。

Hoek 和 Bray 共同撰写的《岩石边坡工程》,以刚体极限平衡理论为基础,从二维稳定分析方法入手,成功地解决了岩石边坡平面滑动稳定性问题^[4]。此后,这种方法广泛地被中国一些边坡工程所应用,并作为经典问题写进了一些大学的教材^[5]。陈祖煜院士等首次以塑性力学极限分析方法为理论框架,从上限定理出发,成功解决了岩质边坡楔体(四面体)稳定分析问题^[6]。本文作者在从事岩石边坡工程研究中发现,运用塑性极限分析方法能解决三维滑楔(六面体)稳定问题。为此,本文以六面体三维滑楔为研究对象,推导得出严密的安全系数解析表达式。

1 上限定理及刚塑性假定

1.1 塑性极限分析上限定理

塑性力学上限定理^[7-8]是从构筑一个处于塑性区 Ω 内机动可能的应变场 ϵ_{ij} 和滑裂面 Γ 上的协调速度场出发,找到满足力的平衡、变形协调与本构关系的外荷载 T^* ,且 T^* 一定比相应真实的塑性区 Ω 的真实的外荷载 T 大, T^* 可通过下式求得

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV + \int_{\Gamma} dD = FV + T^* V \quad (1)$$

式中: σ_{ij} 为 ϵ_{ij} 对应的应力; V 为塑性速度; D 为沿滑裂面的内能耗散; F 为塑性区的体积力。

上限定理指出,相应真实塑性区 Ω 的外荷载 T 要比极限状态下的外荷载 T^* 小。因此,极限分析上限解就是在许多可能的滑动机构 Ω 中寻求一个使 T^* 最小的临界滑动机构。式(1)中左侧两项分别是产生于破坏体 Ω 内和沿滑裂面 Γ 的内部耗散能。

1.2 刚塑性假定

在极限分析中引入刚塑性假定,将弹性应变部分予以忽略。如图 1 所示,速度间断面(滑面)可以看作是一个长度为 L 、厚度为 h 的薄层塑性变形区。图 1 中, φ 为内摩擦角; V_x 、 V_y 分别为 x 、 y 向的分速度。

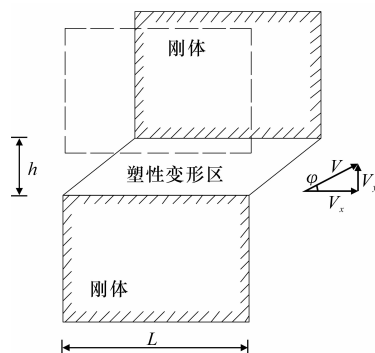


图 1 刚塑性假定分析

根据刚塑性假定,六面体滑楔被视为刚体,所以在滑体内部将不存在应力-应变,因此也就没有内能耗散。滑面被视为塑性区,在岩土材料进入极限平衡状态后,可能会发生较大的塑性变形,从而使能量的耗散主要集中在滑面上。在极限分析领域中,总是假定塑性变形为结构的全部变形,所以式(1)可以被简化为

$$\int_{\Gamma} dD = FV + T^* V \quad (2)$$

2 三维滑楔的塑性极限分析解

2.1 几何要素

图 2 为六面体滑楔;图 3(见下页)为三维滑楔的典型岩石边坡横剖面,其张裂缝在坡顶,几何要素包括:坡高 H 、坡角 θ 、滑面倾角 α 、张裂缝深度 Z 、张裂缝积水深度 Z_w 和张裂缝距坡顶缘的水平距离 b 。受两侧切割面分割,六面体滑楔宽度用 B 表示。根据各要素几何关系,滑楔体积 V_T 及滑面面积 A 计算公式分别为

$$V_T = \frac{1}{2} H^2 B \left\{ \left[1 - \left(\frac{Z}{H} \right)^2 \right] \cot(\alpha) - \cot(\theta) \right\} \quad (3)$$

$$A = \frac{(H-Z)}{\sin(\alpha)} B \quad (4)$$

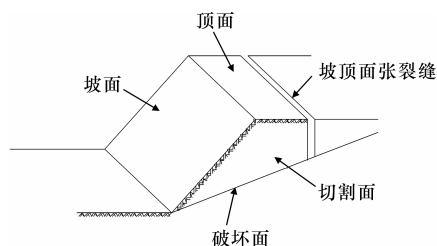


图 2 六面体滑楔

2.2 受力分析

三维滑楔受力包括两组:① 自重荷载 G 、滑面静水压力 U_1 、张裂缝静水压力 U_2 、水平地震惯性力 $k_c G$ (其中 k_c 为水平地震影响系数);② 滑面上的剪切力 S 和法向力 N 。滑面上的剪切力 S 包括两部分,

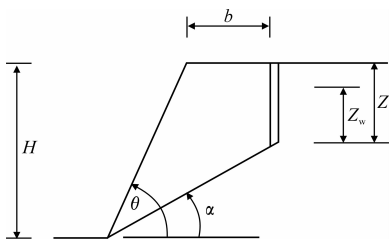


图3 几何要素

一部分为凝聚力 c ，它是已知的，其值为 cA ；另一部分是摩擦力，其值为 $N \tan(\varphi)$ 。 S 和 N 一起，构成一个与滑面法线方向夹角为 φ （内摩擦角）的合力——“组合摩擦力”。这个摩擦力的大小通常是未知的，但它的方向是已知的，即与法线方向夹角为 φ 。如前所述， V 与滑面夹角为 φ ，这样“组合摩擦力” P 与 V 正交，所以 P 在 V 上所做的功为 0，因此，可以避开三维滑楔的第二组受力分析。

剩下的力仅有 G 、 U_1 、 U_2 、 $k_c G$ （图4），其中前3者的计算公式为

$$G = \gamma V \quad (5)$$

$$U_1 = \frac{1}{2} \gamma_w Z_w A \quad (6)$$

$$U_2 = \frac{1}{2} \gamma_w Z_w^2 B \quad (7)$$

式中： γ 为岩石重度（ kN/m^3 ）； γ_w 为水的重度，一般取值 10 kN/m^3 。

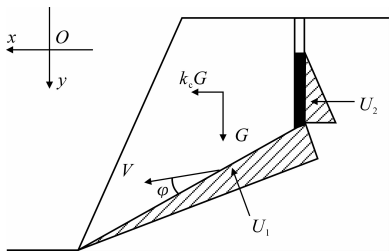


图4 受力分析

虽然张裂缝和滑面上的静水压力可能不是很大，但由于它们作用在很大的面积上，因此，这个力对边坡的稳定性往往很重要。在暴雨情况下，由于张裂缝底部排水不畅，张裂缝临时充水可能达到一定高度，沿张裂缝及滑动面产生静水压力，使滑动力突然增大，这往往是暴雨后边坡容易产生滑动的重要原因。对于地震烈度大于Ⅵ度的地区，还需要考虑水平地震惯性力 $k_c G$ 对边坡稳定性的影响。对Ⅶ、Ⅷ和Ⅸ度地区，水平地震影响系数 k_c 分别取为 0.1、0.2 和 0.4。

为了便于进行公式推导，这里将 G 、 U_1 、 U_2 、 $k_c G$ 分解后合成为水平力 F_x 和垂直力 F_y ，其计算公式分别为

$$F_x = U_2 + k_c G + U_1 \sin(\alpha) \quad (8)$$

$$F_y = G - U_1 \cos(\alpha) \quad (9)$$

2.3 上限解

极限分析法对于虚功原理的描述：作用在边坡上的荷载（自重荷载、静水压力和地震惯性力）所做的外功率与塑性变形区的内能耗散率相等。由于已经假定滑楔为刚体，因此，内能耗散只发生在滑面上。滑楔在滑面上的内能耗散 D 的计算公式为

$$D = cAV \cos(\varphi) \quad (10)$$

G 、 U_1 、 U_2 、 $k_c G$ 共计 4 个外荷载，在 V 上所做的外功 W 的计算公式为

$$W = F_x V \cos(\alpha - \varphi) + F_y V \sin(\alpha - \varphi) \quad (11)$$

式(2)表示的是岩质边坡处于极限状态的虚功率方程，实际工程中，岩质边坡是具有一定安全储备的结构，需要对滑楔施加一定的外荷载，促其达到极限平衡状态。本文采用超载系数的方法，将安全系数 K 隐含于滑楔所受的荷载 F ，使其达到极限荷载 F^* ，从而使岩质边坡处于极限平衡状态。如上所述，将滑楔受到的实际荷载分为两部分：水平荷载 F_x 和垂直荷载 F_y ，相应的极限荷载分别为 F_x^* 和 F_y^* 。当六面体滑楔处于极限状态时，受到的极限荷载为

$$\left. \begin{aligned} F_x^* &= KF_x \\ F_y^* &= KF_y \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

将式(8)～式(10)代入虚功率方程中，由于左右两边代数表达式中都有 V ，因此可以消掉该项，进而整理得到六面体三维滑楔的塑性极限分析上限解（安全系数）公式为

$$K = \frac{cA \cos(\varphi)}{F_x \cos(\alpha - \varphi) + F_y \sin(\alpha - \varphi)} \quad (13)$$

3 算例分析

某岩质边坡， $H = 30.5 \text{ m}$ ， $\theta = 60^\circ$ ， $B = 26.2 \text{ m}$ ，坡内有一层面穿过，层面的倾角 $\alpha = 30^\circ$ ，在距离坡顶线 8.8 m 处有一张裂缝，其深度 $Z = 15.2 \text{ m}$ ，张裂缝中充水深度 $Z_w = 7.6 \text{ m}$ ；岩石重度 $\gamma = 25.6 \text{ kN/m}^3$ ，水的重度 $\gamma_w = 10 \text{ kN/m}^3$ ；层面的凝聚力 $c = 48.6 \text{ kPa}$ ，内摩擦角 $\varphi = 28^\circ$ 。

将以上数据代入式(3)～式(9)中，可以计算得到三维滑楔塑性极限分析上限解用到的 6 个分量值（见下页表 1）。将各分量值代入式(13)，可以得到该算例的稳定性评价塑性极限分析上限解 $K = 1.15$ 。将以上基本数据代入 Hoek 教授推荐的二维平面滑动刚体极限平衡安全系数计算公式，可以得到安全系数 $K = 1.06$ 。

表 1 六面体滑楔上限解计算值

分量名	F_x/kN	F_y/kN	$\cos(\varphi)$	$\cos(\alpha-\varphi)$	$\sin(\alpha-\varphi)$	A/m^2
计算值	22.8×10^3	199.8×10^3	0.882 9	0.999 4	0.034 9	801.7
上限值	$K = 1.15$					

文中的方法与 Hoek E 教授提出的方法区别在于:①前者属于三维计算问题,可以考虑岩质边坡包括的结构面,如断层、层面、节理、裂缝及挤压破碎带等的影响,而后者属于二维计算问题,不能全面反映六面体滑楔破坏特征;②前者的理论框架是塑性极限分析上限定理,特别是虚功率方程的使用,可以有效避免复杂的静力平衡分析,而后者属于刚体极限平衡理论;③文中方法推导得到的上限解公式,具有超载系数的意义,而后者安全系数是总抗滑力与总下滑力之比,二者存在一定的差异。通过以上分析可以发现,文中方法与传统方法存在较大的区别,但作为解决岩质边坡六面体滑楔稳定性问题,二者又具有相同的作用,反映了一个问题的 2 个解答。

由于本文的方法属于塑性极限分析上限解范畴^[9-12],因此总是过高的估计了安全系数,例如文中的算例要比刚体极限平衡方法计算结果略大(8%)。作为学术研究,文中的方法做了岩土材料为刚塑性的假定,并且应用了极限分析上限定理,因此计算结果略大是可以理解的。作为一种新的方法,作者希望能够被更多的岩石边坡工程验证和应用,期望取得进一步的完善。

4 结 语

- (1)建立了岩质边坡六面体滑楔的三维塑性极限分析方法,并推导得出安全系数的解析表达式。
- (2)根据材料刚塑性的假定条件,将塑性速率引入了虚功原理,建立了上限定理的虚功率方程。
- (3)将超载系数的定义方法用于岩质边坡,实现了安全系数计算公式的推导。
- (4)文中方法具有物理概念清晰、理论基础可靠、公式推导严密和使用简便等优点。

参考文献:

References:

[1] Hoek E,Bray J W. Rock slope engineering[M]. London:Institution of Mining and Metallurgy,1981.

[2] 胡 勇,马 勇,刘军熙. 济南市砚池山高边坡优势面控稳分析[J]. 岩土工程界,2005,8(10):58-61.

HU Yong,MA Yong,LIU Jun-xi. Analysis of stability controlled by preferred plane of Yanchishan high slope in Jinan city [J]. Geotechnical Engineering

World,2005,8(10):58-61.

[3] 陈文庆. 莆田市某边坡失稳模式分析及其稳定性评价[J]. 岩土工程界,2004,7(4):58-60.

CHEN Wen-qing. Analysis of unstable mode and evaluation of stability for some slope in Putian city [J]. Geotechnical Engineering World,2004,7(4):58-60.

[4] Hoek E,Bray J W. 岩石边坡工程[M]. 卢世宗,译. 北京:冶金工业出版社,1983.

[5] 徐志英. 岩石力学[M]. 北京:中国水利水电出版社,1991.

[6] 陈祖煜,汪小刚,杨 健. 岩质边坡稳定分析:原理·方法·程序[M]. 北京:中国水利水电出版社,2005.

[7] 龚晓南. 土塑性力学[M]. 杭州:浙江大学出版社,1997.

[8] 张宏亮,陈祖煜,张发明,等. 边坡稳定三维极限分析方法及工程应用[J]. 岩土力学,2002,23(5):649-653.

ZHANG Hong-liang, CHEN Zu-yu, ZHANG Fa-ming,et al. The 3D limit method for slope stability analysis and applications[J]. Rock and Soil Mechanics,2002,23(5):649-653.

[9] 董建华,朱彦鹏. 地震作用下土钉支护边坡稳定性分析[J]. 中国公路学报,2008,21(6):20-25.

DONG Jian-hua,ZHU Yan-peng. Stability analysis of slope supported by soil nailing retaining wall under earthquake[J]. China Journal of Highway and Transport,2008,21(6):20-25.

[10] 王根龙,伍法权,祁生文,等. 加锚岩质边坡稳定性评价的极限分析上限法研究[J]. 岩石力学与工程学报,2007,26(12):2556-2562.

WANG Gen-long,WU Fa-quan,QI Sheng-wen,et al. Research on limit analysis upper bound method for stability evaluation of anchored rock slope[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering,2007,26(12):2556-2562.

[11] 王根龙,伍法权,李巨文. 岩质边坡稳定塑性极限分析方法——斜分条法[J]. 岩土工程学报,2007,29(12):1767-1771.

WANG Gen-long, WU Fa-quan, LI Ju-wen. Rock slope stability analysis based on plasticity limit theory——method of slices with inclined interfaces [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering,2007,29(12):1767-1771.

[12] 王根龙,门玉明,陈志新,等. 土坡稳定性塑性极限分析条分法[J]. 长安大学学报:自然科学版,2002,22(4):28-30,42.

WANG Gen-long, MEN Yu-ming, CHEN Zhi-xin, et al. Plasticity limit analysis on soil slope stability by slice techniques[J]. Journal of Chang'an University: Natural Science Edition,2002,22(4):28-30,42.