

积分变换性质链用理论体系研究

刘小云

(长安大学 理学院,陕西 西安 710064)

摘要:针对将积分变换性质进行类比替换应用及积分变换性质的链用缺乏理论指导的问题,定义了像原改变,给出了按像原改变选择积分变换性质、按改变逆序应用积分变换性质的链用规则,从而免去了以往对函数关系的嵌套分解,证明了积分变换性质中的非类比替换性,建立了积分变换性质链用的理论体系。

关键词:积分变换性质;非类比替换性;像原改变;链用规则

中图分类号:O29 **文献标志码:**A

Theoretical system of using integral transformation nature in series

LIU Xiao-yun

(School of Science, Chang'an University, Xi'an 710064, Shaanxi, China)

Abstract: For the question of using the integral transformation nature (ITN) in the method of analog replacement and lacking theoretical direction in applying ITN in series, a primitive image change is defined, a rule to use ITN in series is given, in which the ITN is selected by the primitive image change and is used in reverse order. By this method, the past complex decomposition of the image original function is cancelled. Non-analog replacement character in ITN is proved, and a theoretical system to using ITN in series is established. 10 refs.

Key words: integral transformation nature; non-analog replacement character; primitive image change; a rule applying in series

0 引言

积分变换常指 Fourier(傅里叶)变换和 Laplace(拉普拉斯)变换^[1-2],它作为一种重要的运算工具及频域分析的桥梁,广泛地应用于电学、力学等各技术领域^[3-8]。在这个过程中,人们常常需要求解时域函数 $f(t)$ 的像函数,定义之外的另一种方法就是利用积分变换的性质。对于积分变换性质,就 Fourier 变换的微积特性问题,李裕信进行了研究^[9];对于求 $\mathcal{F}[f(at-t_0)]$ (a, t_0 为常数, t 为自变量, $a \neq 0$),

为了对积分变换性质作出选择,李建林^[10]将 $f(at-t_0)$ 分解成 $g(t) = f(t-t_0)$, $f(at-t_0) = g(at)$ 。这样的分解是比较麻烦的,尤其对复杂函数,如 $\int_0^{a-b} te^{-3t} \sin(2t-7)dt$,分解起来更繁琐,也容易出错。为了免去对嵌套的函数关系的分解,有时人们“照着样子套公式”,结果出现了一些问题。比如:已知 $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$,求 $\mathcal{F}[f(at-t_0)]$ ($a \neq 0$, 为常数),会出现如下几种做法:

做法 ① $\mathcal{F}[f(at-t_0)] \xrightarrow{\text{位移性质}} e^{-j\omega t_0} \cdot$

收稿日期:2008-02-10

基金项目:国家自然科学基金项目(10472126)

作者简介:刘小云(1958-),女,陕西渭南人,副教授, E-mail: lxyunl@126.com。

$$\mathcal{F}[f(at)] \xrightarrow{\text{相似性质}} e^{-j\omega_0} \frac{1}{|a|} [\mathcal{F}(f(t))] \Big|_{\omega_1=\frac{\omega}{a}} = e^{-j\omega_0} \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{做法② } \mathcal{F}[f(at-t_0)] &\xrightarrow{\text{相似性质}} \frac{1}{|a|} \mathcal{F}[f(t-t_0)] \Big|_{\omega_1=\frac{\omega}{a}} \\ &\xrightarrow{\text{位移性质}} \frac{1}{|a|} [e^{-j\omega_1 t_0} \mathcal{F}(f(t))] \Big|_{\omega_1=\frac{\omega}{a}} = e^{-j\omega_0 \frac{t_0}{a}} \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{做法③ } \mathcal{F}[f(at-t_0)] &= \mathcal{F}\left[f\left(a\left(t-\frac{t_0}{a}\right)\right)\right] \xrightarrow{\text{相似性质}} \frac{1}{|a|} \mathcal{F}\left(f\left(t-\frac{t_0}{a}\right)\right) \Big|_{\omega_1=\frac{\omega}{a}} \\ &\xrightarrow{\text{位移性质}} \frac{1}{|a|} [e^{-j\omega_1 \frac{t_0}{a}} \mathcal{F}(f(t))] \Big|_{\omega_1=\frac{\omega}{a}} = e^{-j\omega_0 \frac{t_0}{a}} \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad (3) \end{aligned}$$

做法①、②、③的结果不同,孰对孰错?笔者发现,出现这个问题的主要原因是:一是误认为积分变换性质可对中间变量类比使用;二是到目前为止,还没有一套完整的、方法简单的理论体系来指导积分变换性质的链用。为此,笔者对其进行了探讨,发现了积分变换性质的共同特点,定义了像原改变,将其分成两大类,证明了积分变换性质中的非类比替换性,指出了识别像原改变的要点,以对像原改变的确认,将对积分变换性质做出选择;对像原改变的确认是简单的,这样就免去了对函数嵌套关系的层层分解,还给出了按像原改变逆序链用积分变换性质的顺序规律,将对积分变换性质的选择方法与链用顺序规律相结合,得出了积分变换性质的链用规则;建立了链用积分变换性质的理论体系,所提供方法具有快速准确的特点。

1 积分变换性质链用理论体系

鉴于 Laplace 变换性质与 Fourier 变换性质是类似的,存在的问题也是共同的,故以 Fourier 变换为例进行分析,所得结论对 Laplace 变换也同样适用。

1.1 积分变换性质的共同特点

为了揭示积分变换性质中像原函数的变化实质,先定义像原改变。在积分变换性质公式的两侧,都会出现像原函数,若一侧出现的像原函数为 $f(t)$,则另一侧出现的像原函数必是 $f(t)$ 经一次改变 G 后所得函数 $G\{f(t)\}$,称 G 为将 $f(t)$ 变成 $G\{f(t)\}$ 的一次像原改变,简称为改变。如像位移性质: $\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t} f(t)] = [\mathcal{F}[f(t)]]_{\omega_1=\omega-\omega_0}$ (ω_0 为常数)。

左侧出现的像原函数为 $e^{j\omega_0 t} f(t)$,右侧出现的像原函数为 $f(t)$,则 $e^{j\omega_0 t} f(t)$ 为 $f(t)$ 经一次像原改变 G (乘以因子 $e^{j\omega_0 t}$) 而得来。尽管积分变换有很多性质,但它们都反映的是经过改变函数的像与未经改变函数的像间的关系,这就是积分变换性质的共同特性。

1.2 积分变换性质中像原改变的分类及应用

将积分变换性质中的 $f(t)$ 或 $f_i(t)$ ($i=1,2$) 看作未经改变的函数,则各性质中的像原改变按改变位置可分为两类。为了便于由像原改变找到对应的性质,在分类命名时均采用与性质对应的名称。

1.2.1 第一类 对自变量的像原改变及应用要点

这类改变只对 $f(t)$ 的自变量 t 进行。

(1) 平移改变 $f(t-b)$,其中 b 为常数。

(2) 相似改变 $f(at)$ 。

应用要点:① 这类改变是对最终自变量 t 进行的,只有平移、相似两个性质具有,所以,遇到这两种改变选用积分变换性质时,不是选用平移性质就是选用相似性质;② 如果 t 是某变量 u 的函数,即为中间变量时,则平移、相似性质不成立。反例如下所述。

反例 1 对应于平移性质 $\mathcal{F}[f(t-t_0)] = e^{-j\omega_0} \mathcal{F}[f(t)]$,若以 at (a, t_0 为常数, $a \neq 0$) 代替 t ,则

$$\mathcal{F}[f(at-t_0)] \neq e^{-j\omega_0} \mathcal{F}[f(at)] \quad (4)$$

$$\text{而 } \mathcal{F}[f(at-t_0)] = e^{-j\omega_0 \frac{t_0}{a}} \mathcal{F}[f(at)] \quad (5)$$

$$\text{事实上, } \mathcal{F}[f(at-t_0)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(at-t_0) e^{-j\omega t} dt,$$

$$\text{令 } u = t - \frac{t_0}{a}$$

$$\mathcal{F}[f(at-t_0)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(au) e^{-j\omega(u+\frac{t_0}{a})} du =$$

$$e^{-j\omega_0 \frac{t_0}{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(au) e^{-j\omega u} du = e^{-j\omega_0 \frac{t_0}{a}} \mathcal{F}[f(at)]$$

所以,当 t 为中间变量时,Fourier 变换的平移性质不能类比套用。

反例 2 对应于相似性质 $\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{|a|} [\mathcal{F}(f(t))]_{\omega_1=\frac{\omega}{a}}$,若以 $t-t_0$ 代替 t (a, t_0 为常数, $a \neq 0$),则

$$\mathcal{F}[f(a(t-t_0))] \neq \frac{1}{|a|} [\mathcal{F}(f(t-t_0))] \Big|_{\omega_1=\frac{\omega}{a}} \quad (6)$$

$$\text{而 } \mathcal{F}[f(a(t-t_0))] = \frac{1}{|a|} e^{-j\omega(1-\frac{1}{a})t_0} [\mathcal{F}(f(t-t_0))] \Big|_{\omega_1=\frac{\omega}{a}} \quad (7)$$

$$\text{事实上, } \mathcal{F}[f(a(t-t_0))] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(a(t-t_0)) e^{-j\omega t} dt$$

$t_0)$] $e^{-j\omega t} dt$, 令 $u = a(t - t_0) + t_0$

$$\mathcal{F}[f(a(t - t_0))] = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u - t_0) \cdot$$

$$e^{-j\omega(\frac{a-t_0}{a}+t_0)} du = \frac{1}{|a|} e^{-j\omega(1-\frac{1}{a})t_0} \cdot$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u - t_0) e^{-j\omega u} du =$$

$$\frac{1}{|a|} e^{-j\omega(1-\frac{1}{a})t_0} [\mathcal{F}(f(t - t_0))] \Big|_{\omega_1 = \frac{\omega}{a}}$$

所以,当 t 为中间变量时,Fourier 变换的相似性质不能类比套用。结合反例 1 的结论可知,相似性质和位移性质都不能对中间变量类比使用。这里将这个结论称为相似性质和位移性质不具有类比替换性。由此判定,就引言中所举例子,它的做法 ①、③是错误的,因为它们分别将位移性质、相似性质错误地套给了中间变量 at 和 $t - \frac{t_0}{a}$,违背了这两个性质不具有类比替换性的特点。

1.2.2 第二类 对 $f(t)$ 或 $f_i(t)$ ($i = 1, 2$) 整体的像原改变及应用要点

(1) 线性改变 $\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)$, 其中 α, β 为系数。

(2) 像位移改变 $e^{j\omega t_0} f(t)$ 。

(3) 微分改变 $f'(t)$ 。

(4) 像微分改变 $(-jt)f(t)$ 。

(5) 像卷积改变 $f_1(t)f_2(t)$ 。

(6) 卷积改变 $(f_1 * f_2)(t)$ 。

(7) 积分改变 $\int_{-\infty}^t f(t) dt$ 。

(8) 对称改变 $F(\pm t)$ ($F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$)。

应用要点:① 这些改变都是对函数的整体进行的,应用积分变换性质时,根据像原改变的名称得出相应的性质名称,用之即可;② 用证明式(5)、式(7)的方法还可以证明,Fourier 变换的微分性质、积分性质也不具有类比替换性。这与微积分学中的微分形式不变性是不同的。所以,在应用积分变换性质时,最好应用已被证明了的基础性质(如各参考书给出的积分变换性质),若不是基础性质,就需加以证明,确认正确后才能采用。

1.3 积分变换性质的快速选择方法

设 $H(t)$ 是 $f(t)$ 经有限次像原改变而得到的函数,从 $f(t)$ 到 $H(t)$ 的像原改变依次为 G_1, G_2, \dots, G_n 。则利用 $\mathcal{F}[f(t)]$ 求 $\mathcal{F}[H(t)]$ 时,对每一次改变 G_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 都要套用一次积分变换性质公式。套用选择积分变换性质的标准是:先辨认 G_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 属于上述中哪一类的哪一种改变,由

改变名称得出性质名称,再验证一下性质的应用要点,若满足,则可套用。

1.4 链用积分变换性质的顺序规律

设 $H(t)$ 是 $f(t)$ 经有限次像原改变而得到的函数,从 $f(t)$ 到 $H(t)$ 的像原改变依次为 G_1, G_2, \dots, G_n 。则利用 $\mathcal{F}[f(t)]$ 求 $\mathcal{F}[H(t)]$ 时,从最后一次改变 G_n 开始,按照 $G_n, G_{n-1}, G_{n-2}, \dots, G_1$ 的次序,即按改变逆序依次应用积分变换性质。这就是链用积分变换性质的顺序规律。将这个顺序规律与积分变换性质选用标准结合起来称为积分变换性质的链用规则。积分变换性质的链用规则,使积分变换性质的链用在顺序上有规律可循,在性质的选择上有简便方法可依,它免去了以往对函数关系的嵌套分解,建立了依据可靠、应用简便的积分变换性质链用理论体系,大大降低了积分变换性质链用时的计算难度。

下面介绍应用积分变换性质链用规则的实用做法。从理论上讲,要将 $\mathcal{F}[H(t)]$ 用 $\mathcal{F}[f(t)]$ 表示,首先需找出从 $f(t)$ 到 $H(t)$ 的所有改变 G_1, G_2, \dots, G_n 。但实际应用时,并不需一次将 G_1, G_2, \dots, G_n 全找出来。实用的做法是先找出 $H(t)$ 中的最后一个像原改变 G_n ,对 G_n 按积分变换性质选择方法选择套用积分变换性质;套用一次后进行整理,再观察次后的像原改变 G_{n-1} ,对 G_{n-1} 重复对 G_n 的做法,然后对 $G_{n-2}, G_{n-3}, \dots, G_1$ 依次选择套用积分变换性质公式,一直到 $\mathcal{F}[f(t)]$ 处,这样就用 $\mathcal{F}[f(t)]$ 表示出了 $\mathcal{F}[H(t)]$ 。当 $\mathcal{F}[f(t)]$ 已知或易求得时,就求得了 $H(t)$ 的 Fourier 变换。

2 链用积分变换性质求复杂函数像函数的举例

在链用积分变换性质时,前面归纳的积分变换性质链用规则具有规律性强、选择性简单、可免去函数嵌套关系的分解特点,这里举例说明。

例 设 $f(t) = \int_0^{a-b} t e^{-3t} \sin(2t-7) dt$ ($a > 0$, a 为常数),求 $f(t)$ 的 Laplace 变换 $\mathcal{L}[f(t)]$ 。

解 根据积分变换性质链用规则的实用做法,从 $f(t)$ 的最后一次像原改变开始逆序应用 Laplace 变换性质,用 G_i 表示从最后一次改变计起的倒数第 i 次改变,用 IV(independent variable) 表示对自变量的像原改变。

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L} \left[\int_0^{(G_1)} t e^{-3t} \sin(2t-7) dt \right] =$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{a} \left[\mathcal{L} \int_0^{t-b} t e^{-3t} \sin(2t-7) dt \right]_{s_1=\frac{1}{a}} = \\
& \frac{1}{a} \left[e^{-bs_1} \mathcal{L} \int_0^t e^{-3t} \sin(2t-7) dt \right]_{s_1=\frac{1}{a}} = \\
& \frac{1}{a} \left\{ \frac{e^{-bs_1}}{s_1} \mathcal{L} \left[\frac{t e^{-3t} \sin(2t-7)}{(G_4)} \right] \right\}_{s_1=\frac{1}{a}} = \\
& \frac{-1}{a} \left\{ \frac{e^{-bs_1}}{s_1} \frac{d}{ds_1} \left[\mathcal{L} \left[\frac{e^{-3t} \sin(2t-7)}{(G_5)} \right] \right] \right\}_{s_1=\frac{1}{a}} = \\
& \frac{-1}{a} \left\{ \frac{e^{-bs_1}}{s_1} \frac{d}{ds_1} \left[\mathcal{L} \left[\frac{\sin(2t-7)}{(G_6)} \right] \right]_{s_2=s_1+3} \right\}_{s_1=\frac{1}{a}} = \\
& \frac{-1}{2a} \cdot \\
& \left\{ \frac{e^{-bs_1}}{s_1} \frac{d}{ds_1} \left[\left[\mathcal{L} \left[\frac{\sin(t-7)}{(G_7)} \right] \right]_{s_3=\frac{s_2}{2}} \right]_{s_2=s_1+3} \right\}_{s_1=\frac{1}{a}} = \\
& \frac{-1}{2a} \left\{ \frac{e^{-bs_1}}{s_1} \frac{d}{ds_1} \left[\left[\left(e^{-7s_3} \mathcal{L} [\sin(t)] \right)_{s_3=\frac{s_2}{2}} \right]_{s_2=s_1+3} \right] \right\}_{s_1=\frac{1}{a}} = \\
& \frac{-1}{2a} \left\{ \frac{e^{-bs_1}}{s_1} \frac{d}{ds_1} \left[\left(\left(e^{-7s_3} \frac{1}{s_3^2+1} \right)_{s_3=\frac{s_2}{2}} \right)_{s_2=s_1+3} \right] \right\}_{s_1=\frac{1}{a}} = \\
& \frac{-1}{2a} \left\{ \frac{e^{-bs_1}}{s_1} \frac{d}{ds_1} \left[e^{-\frac{7(s_1+3)}{2}} \left(\frac{4}{(s_1+3)^2+4} \right) \right] \right\}_{s_1=\frac{1}{a}} = \\
& \frac{a^2 e^{-\frac{b}{a}}}{s} e^{-\frac{7}{2a}(s+3a)} \frac{7[(s+3a)^2+4a^2]+4a(s+3a)}{[(s+3a)^2+4a^2]^2} = \\
& \frac{a^2(7s^2+46as+103a^2)}{s[s^2+6as+13a^2]^2} e^{-\frac{26+7}{2a}s-10.5}
\end{aligned}$$

式中: G_1, G_2, \dots, G_7 均为像原改变, 其各自代表的改变是: G_1 为相似改变(IV); G_2 为位移改变(IV); G_3 为积分改变; G_4 为像微分改变; G_5 为像位移改变; G_6 为相似改变(IV); G_7 为位移改变(IV); G_8 为基础函数; s 为复自变量。

3 结 语

(1) 证明了积分变换性质中的非类比替换性。

(2) 揭示了积分变换性质的共同特性, 定义了像原改变, 给出了积分变换性质链用规则, 建立了依据可靠、应用简便的积分变换性质链用理论体系。

参考文献:

References:

[1] 东南大学数学系. 积分变换[M]. 4版. 北京: 高等教

育出版社, 2003.

- [2] 戴嘉尊. 数学物理方程[M]. 南京: 东南大学出版社, 2003.
- [3] 刘小云, 田润利. 移动载荷下粘弹性道路瞬态响应解析解[J]. 工程数学学报, 2007, 24(6): 1049-1055.
LIU Xiao-Yun, TIAN Run-li. Dynamic response solution in transient state of viscous-elastic road under moving load[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2007, 24(6): 1049-1055.
- [4] 孙 璐, 邓学钧. 匀速运动的线源荷载激励下无限长梁动力分析[J]. 应用数学和力学, 1998, 19(4): 341-347.
SUN Lu, DENG Xue-jun. Dynamical analysis to infinite beam under a moving line load with uniform motion[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 1998, 19(4): 341-347.
- [5] 尹 刚, 冯贤贵. 用拉氏变换计算连续梁的弯曲变形[J]. 重庆工学院学报, 2004, 18(4): 22-23.
YIN Gang, FENG Xian-gui. Calculation of bending deflection of continual beams with Laplace's integral transformation[J]. Journal of Chongqing Institute of Technology, 2004, 18(4): 22-23.
- [6] 李 博, 胡国辉, 周哲玮. 用积分变换法分析周向不对称射流的稳定性问题[J]. 上海大学学报: 自然科学版, 2005, 11(4): 402-407.
LI Bo, HU Guo-hui, ZHOU Zhe-wei. Analysis of azimuthal instability of two-phase jets by integral transformation[J]. Journal of Shanghai University: Natural Science, 2005, 11(4): 402-407.
- [7] 冯凯防. 工程测试技术[M]. 西安: 西北工业大学出版社, 1998.
- [8] 吴大正, 杨林耀, 张永瑞. 信号与线性系统分析[M]. 3版. 北京: 高等教育出版社, 2003.
- [9] 李裕信. Fourier变换微积分特性定理的普遍公式[J]. 高等数学研究, 2007, 10(1): 55-59.
LI Yu-xin. General formula of differential and integral characteristics theorem on Fourier transformation[J]. Studies in College Mathematics, 2007, 10(1): 55-59.
- [10] 李建林. 复变函数与积分变换典型题分析解集[M]. 西安: 西北工业大学出版社, 2000.