第 28 卷 第 5 期
2008 年 9 月

长安大学学报(自然科学版)
Journal of Chang'an University(Natural Science Edition)

Vol. 28 No. 5
Sept. 2008

文章编号:1671-8879(2008)05-0123-04

线性系统的广义 Laplace 变换

张俊祖[1],冯复科[1],葛 键[2]

(1. 长安大学 理学院,陕西 西安 710064; 2. 西安财经学院 统计学院,陕西 西安 710061)

摘 要:为了研究线性定常系统动态方程的解以及传递矩阵的有关性质,将函数的 Laplace 变换概念推广到矩阵函数上,建立了矩阵函数的广义 Laplace 变换概念,讨论了矩阵函数广义 Laplace 变换的相关性质;运用矩阵函数的广义 Laplace 变换给出线性定常系统动态方程的解及传递矩阵的 Laplace 变换形式,并给出矩阵指数函数的广义 Laplace 变换计算。

关键词:矩阵函数;广义 Laplace 变换;指数函数;线性系统

中图分类号:O177.6; O231.1　　**文献标志码**:A

Generalized Laplace transformation of linear system

ZHANG Jun-zu[1], FENG Fu-ke[1], GE Jian[2]

(1. School of Science, Chang'an University, Xi'an 710064, Shaanxi, China; 2. School of Statistics, Xi'an University of Finance and Economics, Xi'an 710061, Shaanxi, Chian)

Abstract: In order to study the solution of the time-invariant linear system dynamic equation and some characteristics of the transfer matrix, this paper applied the conception of Laplace transformation into matrix function, built the generalized Laplace transformation conception of matrix function and discussed its relative characteristics. By using the generalized Laplace transformation of matrix function, this paper worked out the solution of the time-invariant linear system dynamic equation and the Laplace transformation pattern of the transfer matrix and the generalized Laplace transformation calculation of the matrix exponential function. 8 refs.

Key words: matrix function; generalized Laplace transformation; exponential function; linear system

0 引 言

矩阵函数在现代控制理论、常微分方程定性理论、动力学计算及其他工程计算中有着广泛应用,特别是在描述多输入、多输出系统的传递上有着更重要的应用。文献[1-3]给出矩阵理论及其在工程技术中的应用;文献[4]给出一般函数 Laplace 变换概念及相关性质;文献[5]讨论了矩阵指数函数的一些性质;文献[6]给出了一阶微分方程组解的指数矩阵表示形式;文献[7-8]分别给出了计算矩阵指数函数的方法。本文在建立了矩阵函数的广义 Laplace 变换的基础上,给出了线性定常系统动态方程解的 Laplace 变换形式,进而给出矩阵指数函数的广义 Laplace 变换计算。

1 矩阵函数的有关概念

定义 1 设矩阵函数 $\boldsymbol{A}(t)=(a_{ij}(t))_{mn}$ 的每个元素都是实变量 t 的函数,且在$[0,+\infty)$上的广义

收稿日期:2007-11-20

基金项目:陕西省自然科学基金项目(A05004)

作者简介:张俊祖(1961-),男,陕西户县人,副教授,E-mail:zjz_Qinling@126.com。

积分都存在,则称矩阵函数 $A(t)$ 的广义积分存在(或收敛),记为 $\int_0^{+\infty} A(t)\mathrm{d}t$。即

$$\int_0^{+\infty} A(t)\mathrm{d}t = \begin{bmatrix} \int_0^{+\infty} a_{11}(t)\mathrm{d}t & \cdots & \int_0^{+\infty} a_{1n}(t)\mathrm{d}t \\ \vdots & & \vdots \\ \int_0^{+\infty} a_{m1}(t)\mathrm{d}t & \cdots & \int_0^{+\infty} a_{mn}(t)\mathrm{d}t \end{bmatrix} \quad (1)$$

定义 2 设矩阵函数 $A(t) = (a_{ij}(t))_{mn}$ 的每个元素都是定义在 $[0, +\infty)$ 上的函数,函数 e^{-st}(其中 s 为复参量)与矩阵函数的乘积为

$$A(t)e^{-st} = (a_{ij}(t)e^{-st})_{mn} = \begin{bmatrix} a_{11}(t)e^{-st} & \cdots & a_{1n}(t)e^{-st} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}(t)e^{-st} & \cdots & a_{mn}(t)e^{-st} \end{bmatrix} \quad (2)$$

如果对于每个元素的广义积分 $\int_0^{+\infty} a_{ij}(t)e^{-st}\mathrm{d}t$ 在 s 的某一域内收敛,则矩阵函数的广义积分 $\int_0^{+\infty} A(t)e^{-st}\mathrm{d}t$ 称为 $A(t)$ 的广义 Laplace 变换。记作

$$\mathscr{L}[A(t)] = \int_0^{+\infty} A(t)e^{-st}\mathrm{d}t = B(s) \quad (3)$$

当 $m = n = 1$ 时,此定义就是 $a_{11}(t)$ 的 Laplace 变换 $\mathscr{L}[a_{11}(t)]$。

引理 1 设 $A \in C^{n\times n}$,则含有参数 t 的矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$ 收敛。记 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k} = e^{At}$,特别当 $t = 1$ 时,$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = e^{A}$。

2 矩阵函数广义 Laplace 变换存在定理

定理 1 设矩阵函数 $A(t) = (a_{ij}(t))_{mn}$,如果对于其中每一个元素 $a_{ij}(t)$ 均满足下列条件:① 在 $t \geqslant 0$ 的任一有限区间上分段连续;② 当 $t \to +\infty$ 时,$a_{ij}(t)$ 的增长速度不超过某一指数函数,即存在常数 $M > 0, c \geqslant 0$,使得 $|a_{ij}(t)| \leqslant Me^{ct}$,$0 \leqslant t < +\infty$ 成立(满足此条件的函数,称它的增大是指数级的,c 为增长指数),则矩阵函数 $A(t)$ 的广义 Laplace 变换一定存在。

证明 由题设可知,在半平面上 $\mathrm{Re}(s) > c$ 内,函数 $a_{ij}(t)$ 的广义 Laplace 变换一定存在,且在半平面内是解析函数(见文献[4])。于是由定义 2 可知,在 $\mathrm{Re}(s) > c$ 上,矩阵函数 $A(t)$ 的广义 Laplace 变换 $\mathscr{L}[A(t)] = \int_0^{+\infty} A(t)e^{-st}\mathrm{d}t = B(s)$ 一定存在。证毕。

3 矩阵函数广义 Laplace 变换的性质

由矩阵函数的广义积分性质及定义 2 不难得到矩阵函数的广义 Laplace 变换性质。

(1) 线性性质。如果 $\mathscr{L}[A_1(t)] = B_1(s)$,$\mathscr{L}[A_2(t)] = B_2(s)$,$\lambda$、$\mu$ 均为非零常数,则

$$\mathscr{L}[\lambda A_1(t) + \mu A_2(t)] = \lambda \mathscr{L}[A_1(t)] + \mu \mathscr{L}[A_2(t)] = \lambda B_1(s) + \mu B_2(s)。$$

证明 设 $A_1(t) = (a_{ij}(t))_{mn}$,$A_2(t) = (b_{ij}(t))_{mn}$,则根据题设条件有

$$\mathscr{L}[\lambda A_1(t) + \mu A_2(t)] = \left(\int_0^{+\infty} [\lambda a_{ij}(t) + \mu b_{ij}(t)]e^{-st}\mathrm{d}t\right)_{mn} = \lambda\left(\int_0^{+\infty} a_{ij}(t)e^{-st}\mathrm{d}t\right)_{mn} + \mu\left(\int_0^{+\infty} b_{ij}(t)e^{-st}\mathrm{d}t\right)_{mn} = \lambda \mathscr{L}[A_1(t)] + \mu \mathscr{L}[A_2(t)] = \lambda B_1(s) + \mu B_2(s)$$

(2) 微分性质。如果 $\mathscr{L}[A(t)] = B(s)$,则

$$\mathscr{L}[A'(t)] = sB(s) - A(0)。$$

证明 设 $A(t) = (a_{ij}(t))_{mn}$,由于 $A'(t) = (a'(t))_{mn}$(文献[2]),且

$\mathscr{L}[a_{ij}'(t)] = s\mathscr{L}[a_{ij}(t)] - a_{ij}(0)$,所以,

$$\mathscr{L}[A'(t)] = [\mathscr{L}(a_{ij}'(t))]_{mn} = \{s\mathscr{L}[a_{ij}(t)] - a_{ij}(0)\}_{mn} = s\{\mathscr{L}[a_{ij}(t)]\}_{mn} - (a_{ij}(0))_{mn} = sB(s) - A(0)$$

(3) 位移性质。如果 $\mathscr{L}[A(t)] = B(s)$,a 为非零常数,则 $\mathscr{L}[e^{at}A(t)] = B(s-a)$。

证明 当 $\mathrm{Re}(s) > c$ 时,$\mathscr{L}[A(t)] = B(s)$,从而

$$\mathscr{L}[e^{at}A(t)] = \int_0^{-\infty} e^{at}A(t)e^{-st}\mathrm{d}t = \int_0^{-\infty} A(t)e^{-(s-a)t}\mathrm{d}t = B(s-a)$$

(4) 积分性质。如果 $\mathscr{L}[A(t)] = B(s)$,则 $\mathscr{L}\left[\int_0^t A(t)\mathrm{d}t\right] = \frac{1}{s}B(s)$。

证明 设 $H(t) = \int_0^t A(t)\mathrm{d}t$,则有 $H'(t) = A(t)$,且 $H(0) = O$。

由微分性质(2)可知

$$\mathscr{L}[H'(t)] = s\mathscr{L}[H(t)] - H(0)$$

即 $$\mathscr{L}\left[\int_0^t A(t)\mathrm{d}t\right] = \frac{1}{s}\mathscr{L}[H'(t)] = \frac{1}{s}\mathscr{L}[A(t)] = \frac{1}{s}B(s)$$

同理可证以下其他性质。

(5) 相似性质。设 a 为大于零的常数,如果 $\mathscr{L}[A(t)] = B(s)$,则 $\mathscr{L}[A(at)] = \frac{1}{a}B\left(\frac{s}{a}\right)$。

(6) 象矩阵的微分性质。如果$\mathscr{L}[\boldsymbol{A}(t)]=\boldsymbol{B}(s)$,则$\mathscr{L}[t^n\boldsymbol{A}(t)]=(-1)^n\boldsymbol{B}^{(n)}(s)$。

(7) 象矩阵的积分性质。如果$\mathscr{L}[\boldsymbol{A}(t)]=\boldsymbol{B}(s)$,则$\mathscr{L}[\frac{1}{t}\boldsymbol{A}(t)]=\int_s^{+\infty}\boldsymbol{B}(s)\mathrm{d}s$。

(8) 延迟性质。设 a 为大于零的常数,且 $\boldsymbol{E}(t-a)=\begin{cases}\boldsymbol{O} & t<a\\ \boldsymbol{E} & t\geqslant a\end{cases}$,其中,$\boldsymbol{O}$ 为零矩阵;$\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵。如果$\mathscr{L}[\boldsymbol{A}(t)]=\boldsymbol{B}(s)$,则

$$\mathscr{L}[\boldsymbol{A}(t-a)\boldsymbol{E}(t-a)]=\boldsymbol{B}(s)\mathrm{e}^{-as}。$$

4　线性定常系统解的 Laplace 变换

定理 2　设线性定常系统的动态方程为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}(t)}{\mathrm{d}t}&=\boldsymbol{AX}(t)+\boldsymbol{BU}(t)\\ \boldsymbol{Y}(t)&=\boldsymbol{CX}(t)+\boldsymbol{DU}(t)\\ \boldsymbol{X}(0)&=0\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

则该线性系统解的广义 Laplace 变换矩阵表示式为

$$\boldsymbol{Y}(s)=\boldsymbol{W}(s)\boldsymbol{U}(s)$$

式中:$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{D}$ 均为矩阵函数;$\boldsymbol{W}(s)$ 为传递矩阵;$\boldsymbol{U}(s)$ 为 $\boldsymbol{U}(t)$ 的广义 Laplace 变换矩阵。

证明　对方程(4) 两边作 Laplace 变换可得

$$s\boldsymbol{X}(s)=\boldsymbol{AX}(s)+\boldsymbol{BU}(s)\tag{5}$$

$$\boldsymbol{Y}(s)=\boldsymbol{CX}(s)+\boldsymbol{DU}(s)\tag{6}$$

由式(5) 得 $\boldsymbol{X}(s)=(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{BU}(s)$,代入式(6) 则有

$\boldsymbol{Y}(s)=[\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}]\boldsymbol{U}(s)=\boldsymbol{W}(s)\boldsymbol{U}(s)$,从而得传递矩阵

$$\boldsymbol{W}(s)=\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}$$

其线性系统解的广义 Laplace 变换矩阵展开式可表示为

$$\begin{bmatrix}Y_1\\ \vdots\\ Y_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}W_{11}(s) & \cdots & W_{1n}(s)\\ \vdots & & \vdots\\ W_{m1}(s) & \cdots & W_{mn}(s)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_1(s)\\ \vdots\\ U_n(s)\end{bmatrix}\tag{7}$$

推论　设一阶线性常系数齐次微分方程组初值问题为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}(t)}{\mathrm{d}t}&=\boldsymbol{AX}(t)\\ \boldsymbol{X}(0)&=[x_1(0),x_2(0),\cdots,x_n(0)]^{\mathrm{T}}\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

其中,$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{nn}$,$\boldsymbol{X}(t)=[x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)]^{\mathrm{T}}$,则方程组解的矩阵形式为

$$\boldsymbol{X}(t)=\mathscr{L}^{-1}[(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}]\boldsymbol{X}(0)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{X}(0)\tag{9}$$

证明　对题设微分方程组(8) 作广义 Laplace 变换,得 $s\,\mathscr{L}[\boldsymbol{X}(t)]-\boldsymbol{X}(0)=\boldsymbol{A}\,\mathscr{L}[\boldsymbol{X}(t)]$,

即　$s\boldsymbol{X}(s)-\boldsymbol{X}(0)=\boldsymbol{AX}(s)$

整理得$(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}(s)=\boldsymbol{X}(0)$。

所以 $\boldsymbol{X}(s)=(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{X}(0)$,从而可得方程组解的矩阵形式为

$$\boldsymbol{X}(t)=\mathscr{L}^{-1}[(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}]\boldsymbol{X}(0)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{X}(0)\tag{10}$$

式(10) 不但给出了一阶线性常系数齐次微分方程组初值问题解的矩阵表示式,而且给出了矩阵指数函数的一种算法,即

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\mathscr{L}^{-1}[(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}]\tag{11}$$

例　设系统的动态方程为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}(t)}{\mathrm{d}t}&=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -2\end{bmatrix}\boldsymbol{X}(t)+\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{U}(t)\\ \boldsymbol{Y}(t)&=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{X}(t)+\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{U}(t)\end{aligned}\right\}$$

其中,$\boldsymbol{U}(t)=(t,\mathrm{e}^{-t})^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{X}(0)=0$,求 $\boldsymbol{X}(t)$、$\boldsymbol{Y}(t)$ 及状态转移矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$。

解　$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$,

$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$,

$s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}s & -1\\ 1 & s+2\end{bmatrix}$,$|s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=$

$\begin{vmatrix}s & -1\\ 1 & s+2\end{vmatrix}=(s+1)^2$,$\boldsymbol{U}(s)=(\frac{1}{s^2},\frac{1}{s+1})^{\mathrm{T}}$,

$$(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{1}{(s+1)^2}\begin{bmatrix}s+2 & 1\\ -1 & s\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{X}(s)=(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{BU}(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{s+2}{(s+1)^3}+\dfrac{2}{s^2(s+1)^2}\\ \dfrac{-1}{(s+1)^3}+\dfrac{2}{s(s+1)^2}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{X}(t)=\mathscr{L}^{-1}[(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{BU}(s)]=\begin{bmatrix}(\frac{1}{2}t^2+3t+4)\mathrm{e}^{-t}+2t-4\\ 2-(\frac{1}{2}t^2+2t+2)\mathrm{e}^{-t}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{Y}(t)=\boldsymbol{CX}(t)+\boldsymbol{DU}(t)=\begin{bmatrix}(1-t-\frac{1}{2}t^2)\mathrm{e}^{-t}+2t\\ (2+t)\mathrm{e}^{-t}+3t-2\end{bmatrix},$$

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\mathscr{L}^{-1}[(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}]=\mathscr{L}^{-1}\begin{bmatrix}\dfrac{s+2}{(s+1)^2} & \dfrac{1}{(s+1)^2}\\ -\dfrac{1}{(s+1)^2} & \dfrac{s}{(s+1)^2}\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix} (t+1)e^{-t} & te^{-t} \\ -te^{-t} & (1-t)e^{-t} \end{bmatrix}。$$

5 结 语

(1)将一般函数的 Laplace 变换引入到矩阵函数上,建立了矩阵函数的广义 Laplace 变换概念,讨论了矩阵函数广义 Laplace 变换的相关性质。

(2)运用矩阵函数的广义 Laplace 变换,给出线性定常系统动态方程的解及传递矩阵的广义 Laplace 变换形式。

(3)给出矩阵指数函数的广义 Laplace 变换计算。该方法旨在矩阵求逆及求矩阵广义 Laplace 逆变换,表示形式简便。

参考文献:

References:

[1] 葛照强. 矩阵理论及其在工程技术中的应用[M]. 西安:陕西科学技术出版社,1991.

[2] 蒋正新,施国梁. 矩阵理论及其应用[M]. 北京:北京航空航天大学出版社,1988.

[3] 王耕禄,史荣昌. 矩阵理论[M]. 北京:国防工业出版社,1988.

[4] 张元林. 积分变换[M]. 北京:高等教育出版社,2003.

[5] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报:交通科学与工程版,2001,25(2):147-149.
HUANG Cheng-xu. Some properties of matrix exponentials[J]. Journal of Wuhan University of Technology: Transportation Science & Engincering, 2001,25(2):147-149.

[6] 尚有林,张金良. 指数矩阵 e^{tA} 表示一阶微分方程组的解[J]. 洛阳大学学报,1995,10(4):30-33.
SHANG You-lin, ZHANG Jin-liang. Exponential matrix e^{tA} showing the solution of differential equations of the first-order[J]. Journal of Luoyang University,1995,10(4):30-33.

[7] 杨开春. 计算矩阵指数的一种新方法[J]. 西安联合大学学报,2003,6(4):49-56.
YANG Kai-chun. A new method for the calculation of matrix exponent [J]. Journal of Xi'an United University,2003,6(4):49-56.

[8] 张俊祖,姜根明,冯复科. 矩阵指数函数的一种计算[J]. 长安大学学报:自然科学版,2006,26(1):108-110.
ZHANG Jun-zu, JIANG Gen-ming, FENG Fu-ke. A computation method of matrix exponent function[J]. Journal of Chang'an University: Natural Science Edition,2006,26(1):108-110.

(上接第 110 页)

[2] 魏 朗,高丽敏. 道路交通安全性评估模式的探讨[J]. 安全与环境学报,2004,4(6):93-95.
WEI Lang, GAO Li-min. Probe into road traffic safety mode assessment [J]. Journal of Safety and Environment,2004,4(6):93-95.

[3] 魏 朗,陈 涛,高丽敏,等. 汽车驾驶员车速控制模式的模拟研究[J]. 汽车工程,2005,27(6):696-701.
WEI Lang, CHEN Tao, GAO Li-min, et al. A simulation study on the vehicle speed control mode of driver[J]. Automotive Engineering, 2005, 27(6): 696-701.

[4] 魏 朗,高丽敏,余 强,等. 驾驶员道路安全感受模糊评判模型[J]. 交通运输工程学报,2004,4(1):102-105.
WEI Lang, GAO Li-min, YU Qiang, et al. Fuzzy evaluating model of driver's road safety perception [J]. Journal of Traffic and Transportation Engineering,2004,4(1):102-105.

[5] 袁望方. 驾驶人道路安全感虚拟现实评价技术研究[D]. 西安:长安大学,2006.

[6] 陈 涛,魏 朗. 人-车-路互动模式虚拟仿真系统[J]. 长安大学学报:自然科学版,2007,27(1):67-71.
CHEN Tao, WEI Lang. Driver-vehicle-road virtual simulation with interaction mode [J]. Journal of Chang'an University: Natural Science Edition, 2007, 27(1):67-71.

[7] 王 俊,揣锦华,徐 静. 基于 MultiGen/Vega 的隧道场景漫游系统研究[C]//吕彭民. 长安大学研究生学术年会论文集. 西安:陕西科学技术出版社,2004:322-324.

[8] Clark J. Hierarchical geometric models for visible surface algorithms[J]. Communications of the ACM, 1976,19(10):547-554.

[9] 陈 涛. 人-车-路(环境)联合运行虚拟仿真理论与实现技术研究[D]. 西安:长安大学,2005.

[10] 陈 涛,魏 朗. 道路行车安全性虚拟评价方法研究[J]. 安全与环境学报,2006,6(6):115-118.
CHEN Tao, WEI Lang. Virtual assessment method for road operational safety[J]. Journal of Safety and Environment,2006,6(6):115-118.

[11] 魏 朗,陈 涛,代素珍,等. 关于一、三级公路安全性认知因素的试验建模研究[J]. 公路交通科技,2005,22(2):116-120.
WEI Lang,CHEN Tao,DAI Su-zhen,et al. Tests and modeling for the safety perception factor on first-grade and third-grade highway [J]. Journal of Highway and Transportation Research and Development,2005,22(2):116-120.