

文章编号:1671-8879(2008)03-0025-05

## 弹性地基上复合路面的受力分析

祝海燕<sup>1,2</sup>, 王选仓<sup>1</sup>, 曹宝贵<sup>2</sup>

(1. 长安大学 公路学院, 陕西 西安 710064; 2. 吉林大学 交通学院, 吉林 长春 130025)

**摘要:**为探讨水泥混凝土路面上覆沥青层复合结构(PCC-AC)的设计计算方法,通过建立层状弹性地基上多层复合路面的统一计算模型,采用弹性地基上的多层薄板理论,得出了分离式路面和结合式路面的求解方法。并应用该方法对圆形均布荷载作用下双层地基上的沥青-混凝土复合路面进行了分析,其混凝土板底弯沉值及应力值与 ANSYS 有限元分析结果及规范方法吻合较好,表明用该方法计算 PCC-AC 结构水泥混凝土板荷载应力具有足够精度。

**关键词:**道路工程;多层薄板理论;复合路面;层状弹性地基

**中图分类号:**U416.216

**文献标志码:**A

### Mechanic analysis of composite pavement on elastic foundation

ZHU Hai-yan<sup>1,2</sup>, WANG Xuan-cang<sup>1</sup>, CAO Bao-gui<sup>2</sup>

(1. School of Highway, Chang'an University, Xi'an 710064, Shaanxi, China;

2. School of Transportation, Jilin University, Changchun 130025, Jilin, China)

**Abstract:** In order to study the design and calculation method of PCC-AC composite pavement, a uniform analysis model of multi-layer composite pavement on double composite foundation is established. The theory of multi-layer thin-walled plates on elastic foundation is adopted to solve the bonded and unbonded composite pavements. As an example, the asphalt and concrete two-layer composite pavement on a double composite foundation under uniform circular load is analyzed by this method. The calculated deflection and stress beneath of concrete slab have a good agreement with the ones of the ANSYS finite element analysis and the *Specification of Cement Concrete Pavement Design for Highway*. This result indicates that the stress of cement concrete plate of PCC-AC pavement can be calculated by this method with high accurate. 4 tabs, 3 figs, 8 refs.

**Key words:** road engineering; multi-layer thin-walled plate theory; composite pavement; layered elastic foundation

## 0 引言

目前,中国许多公路已逐渐进入维修和改建阶段,在已有路面(包括旧沥青混凝土路面和旧水泥混

凝土路面)上加铺沥青混凝土已成为高等级公路养护维修的主要措施之一。加铺层路面结构设计时,旧沥青混凝土+沥青混凝土路面一般多采用弹性层状理论计算,而规范对旧水泥混凝土路面+沥青混

收稿日期:2007-06-10

基金项目:国家西部交通建设科技项目(200531881213)

作者简介:祝海燕(1971-),女,吉林安图人,吉林大学副教授,长安大学博士,E-mail:zhuhaiyan\_e@163.com

凝土结构主要通过三维有限元分析<sup>[1]</sup>,考虑沥青上层面对混凝土板的应力影响,得出了修正公式。但由于对该类路面各层间相互作用的机理研究并不充分,其承载力及强度计算方法尚需进一步完善。因此,对沥青混凝土加铺层及加铺后复合路面结构的研究一直是国内外公路界的热点问题<sup>[2-3]</sup>。本文采用弹性地基上的多层薄板理论,对旧混凝土路面上加铺沥青混凝土后的路面结构进行内力分析,各层薄板均根据相应结构层的材料特性来进行计算。

## 1 计算模型

支承于双层地基上的多层路面结构见图1。图中 $a$ 为路面上等效圆形均布荷载半径; $q$ 为均布荷载值; $E_i, h_i, \mu_i$ 分别为面层的弹性模量、层厚和泊松比; $p_1(r) \cdots p_{i+1}(r)$ 为层间接触反力; $p_b(r)$ 为基层与土基层间接触反力; $k$ 为基床系数。各面层及基层和土基的相关参数见图1。为方便求解,整体坐标系采用柱坐标。根据层状弹性地基上的板及弹性地基上的双层板理论<sup>[4-6]</sup>,可认为层状地基整体连续,而层状路面之间的接触按分离式和结合式两种情况分析。

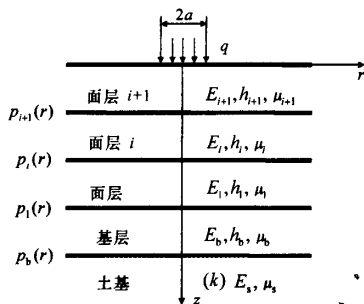


图1 支承于双层地基上的多层路面结构

### 1.1 多层分离式路面情况

对分离式面层,由于各层间光滑接触,其平衡微分方程表达为

$$D_{i+1} \nabla^2 \nabla^2 w(r) = q - p_{i+1}(r) \quad (1)$$

$$D_i \nabla^2 \nabla^2 w(r) = p_{i+1}(r) - p_i(r) \quad (2)$$

$$D_{i-1} \nabla^2 \nabla^2 w(r) = p_i(r) - p_{i-1}(r)$$

⋮

$$D_1 \nabla^2 \nabla^2 w(r) = p_2(r) - p_1(r) \quad (3)$$

式中: $D_1, D_2, \dots, D_{i+1}$ 分别为路面各结构层刚度; $\nabla$ 为拉普拉斯算子; $w(r)$ 为任一位置路面弯沉。

将以上各式合并可得

$$(D_1 + \dots + D_i + D_{i+1}) \nabla^2 \nabla^2 w(r) = q - p_1(r) \quad (4)$$

$$\text{式中: } D_1 = \frac{E_1 h_1^3}{12(1-\mu_1^2)}; D_i = \frac{E_i h_i^3}{12(1-\mu_i^2)}; D_{i+1} =$$

$$\frac{E_{i+1} h_{i+1}^3}{12(1-\mu_{i+1}^2)}; E_i, h_i, \mu_i, E_i, h_i, \mu_i \text{ 见图 1.}$$

$$\text{令等效刚度 } D_e = (D_1 + \dots + D_i + D_{i+1})$$

则式(4)化为

$$D_e \nabla^2 \nabla^2 w(r) = q - p_1(r) \quad (5)$$

应用零阶汉克尔变换,有

$$\bar{p}(\zeta) = \bar{q}(\zeta) - D_e \xi^4 \bar{w}(\zeta) \quad (6)$$

式中: $\bar{p}(\zeta), \bar{q}(\zeta), \bar{w}(\zeta)$ 分别为 $p_1(r), q$ 和 $w(r)$ 的零阶汉克尔变换; $\xi$ 为中间变量。

当板上作用半径 $a$ 的圆面积均布荷载 $q$ 时,有

$$\bar{q}(\zeta) = \frac{a J_1(a \zeta) q}{\zeta} \quad (7)$$

式中: $J_1$ 为第一类一阶贝赛尔函数; $\zeta$ 为变量。

若基层与土基完全连续,其路面弯沉可表达为

$$w(r) = \frac{2(1-\mu_b^2)}{E_b} \int_0^\infty \bar{q}(\zeta) J_0(r \zeta) f(\zeta) d\zeta \quad (8)$$

式中: $w(r)$ 为路面弯沉; $J_0$ 为第一类零阶贝赛尔函数; $r$ 为加荷板的影响半径。若令系数 $\eta, \lambda$ 分别为

$$\eta = k_1 k_2 e^{-4\eta_b} - 4\zeta h_b k_2 e^{-2\eta_b} - 1$$

$$\lambda = 4\zeta^2 h_b^2 k_2 e^{-2\eta_b} - (1 - k_1 e^{-2\eta_b})(1 - k_2 e^{-2\eta_b}) + l^3 \zeta^3 \eta$$

则 $f(\zeta)$ 可表示为

$$f(\zeta) = \eta / \lambda \quad (9)$$

式中: $E_b, h_b, \mu_b$ 见图1; $k_1, k_2$ 为基床系数,可定义为

$$k_1 = \frac{3 - 4\mu_s - c(3 - 4\mu_b)}{3 - 4\mu_s + c},$$

$$k_2 = \frac{1 - c}{1 + c(3 - 4\mu_b)}, c = \frac{(1 + \mu_b)E_s}{(1 + \mu_s)E_b}.$$

将式(9)代入式(8),则有

$$w(r) = \frac{2(1-\mu_b^2)qa}{E_b} \int_0^\infty \frac{J_0(\pi/l) J_1(at/l)}{t[g(h_b t/l) + t^3]} dt \quad (10)$$

式中: $t$ 为变量; $E_s, \mu_s$ 见图1; $l = \left[ \frac{2D_e(1-\mu_b^2)}{E_b} \right]^{1/3};$

$$g\left(\frac{h_b}{l}t\right) = \frac{4(h_b^2/l^2)t^2 k_2 e^{-2\eta_b} - (1 - k_1 e^{-2\eta_b})(1 - k_2 e^{-2\eta_b})}{k_1 k_2 e^{-4\eta_b} - 4(h_b/l)k_2 e^{-2\eta_b} - 1}.$$

弹性双层连续地基上面板 $i$ 的径向弯矩 $M_{ri}$ 与切向弯矩 $M_{ti}$ 分别为

$$M_{ri} = l_i^3 qa \int_0^\infty J_1(\zeta a) \left[ \mathcal{J}_0(\zeta r) - \frac{1-\mu_i}{r} J_1(\zeta r) \right] \frac{\eta}{\lambda} d\zeta$$

$$M_{ti} = l_i^3 qa \int_0^\infty J_1(\zeta a) \left[ \mu_i \mathcal{J}_0(\zeta r) + \frac{1-\mu_i}{r} J_1(\zeta r) \right] \frac{\eta}{\lambda} d\zeta$$

此时,面板 $i$ 在局部坐标系上任一位置 $z$ 处的径向应力 $\sigma_{ri}$ 与切向应力 $\sigma_{ti}$ 分别为

$$\sigma_{ri} = \frac{12M_{ri}z}{Eh_i^3}, \quad \sigma_{ti} = \frac{12M_{ti}z}{Eh_i^3}.$$

### 1.2 多层结合式路面情况

对结合式面层,各层间连续接触,不发生相对滑

动。此时,可认为其多层面板的受力性能与一块面板相同。若将该多层面板看作是各向同性、材料性能均匀的一块板,这时的等效刚度<sup>[7]</sup>为

$$D_e = (AC - B^2/A) \quad (11)$$

$$\text{式中: } A = \sum \frac{E_i h_i}{1 - \mu_i^2};$$

$$B = \sum \frac{E_i [(\sum h_i)^2 - (\sum h_{i-1})^2]}{2(1 - \mu_i^2)};$$

$$C = \sum \frac{E_i [(\sum h_i)^3 - (\sum h_{i-1})^3]}{3(1 - \mu_i^2)}.$$

将式(11)代入式(6)~式(10),可得  $w(r)$ ,同时求得其总弯矩为

$$M_r = l^3 q a \int_0^\infty J_1(\zeta a) \left[ \zeta J_0(\zeta r) - \frac{1-\mu}{r} J_1(\zeta r) \right] \frac{\eta}{\lambda} d\zeta$$

$$M_t = l^3 q a \int_0^\infty J_1(\zeta a) \left[ \mu \zeta J_0(\zeta r) + \frac{1-\mu}{r} J_1(\zeta r) \right] \frac{\eta}{\lambda} d\zeta$$

式中: $\mu$ 为刚度换算后的泊松比; $M_r$ 、 $M_t$ 分别为径向、切向总弯矩。

令  $h = \sum h_i$ , 中性轴  $h/2$  位置的横坐标为  $r$ , 纵坐标为  $y$ , 则该单块板上、下表面位置处的应力为

$$\sigma_{rn} = \frac{12M_{ry}}{h^3} = -\frac{6M_r}{h^2}, \quad \sigma_{tn} = \frac{12M_{ty}}{h^3} = -\frac{6M_t}{h^2},$$

$$\sigma_{rb} = \frac{12M_{ry}}{h^3} = \frac{6M_r}{h^2}, \quad \sigma_{tb} = \frac{12M_{ty}}{h^3} = \frac{6M_t}{h^2}.$$

式中: $\sigma_{rn}$ 、 $\sigma_{tn}$ 分别为单块板上表面径向、切向应力; $\sigma_{rb}$ 、 $\sigma_{tb}$ 分别为单块板下表面径向、切向应力。

此时,选取一组数值  $E$ 、 $\mu$ , 满足  $\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} =$

$D_e$ , 对于薄板可仅考虑平面应力状态, 其应变为

$$\epsilon_{rn} = (\sigma_{rn} - \mu \sigma_{tn})/E, \quad \epsilon_{tn} = (\sigma_{tn} - \mu \sigma_{rn})/E$$

$$\epsilon_{rb} = (\sigma_{rb} - \mu \sigma_{tb})/E, \quad \epsilon_{tb} = (\sigma_{tb} - \mu \sigma_{rb})/E$$

式中: $\epsilon_{rn}$ 、 $\epsilon_{tn}$ 分别为单块板上表面径向、切向应变;

$\epsilon_{rb}$ 、 $\epsilon_{tb}$ 分别为单块板下表面径向、切向应变。

沿径向、切向的曲率  $K_r$ 、 $K_t$  分别为

$$K_r = \frac{\epsilon_{rb} - \epsilon_{rn}}{h}, \quad K_t = \frac{\epsilon_{tb} - \epsilon_{tn}}{h}.$$

由于组合板的真实中和轴并不与换算后的单块板相同,而是要向刚度较大一侧移动,如图2所示。根据薄板直线假定,若要确定各层板的应变,首先需求出真实的中和轴位置  $x$ 。对于径向应变,在第  $i$  层板的上、下表面径向应变  $\epsilon_{rni}$ 、 $\epsilon_{rbi}$  满足如下关系

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{rni} &= K_r(x - \sum h_i) \\ \epsilon_{rbi} &= K_r(x - \sum h_{i-1}) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

根据截面上力的平衡,有

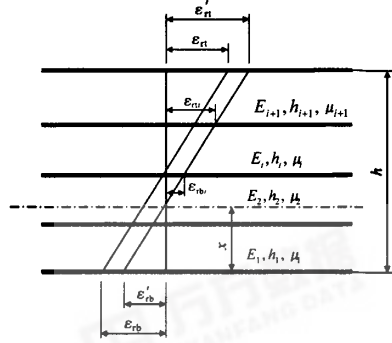


图2 多层复合板的应变分布

$$\sum E_i h_i \frac{\epsilon_{rni} + \epsilon_{rbi}}{2} = 0 \quad (13)$$

将式(12)代入式(13),可求得  $x$  值。于是可得到真正组合板的上、下表面应变  $\epsilon'_{rn}$ 、 $\epsilon'_{rb}$ , 以及各层径向应变  $\epsilon_{rni}$ 、 $\epsilon_{rbi}$ 。同理可求得切向应变  $\epsilon'_{tn}$ 、 $\epsilon'_{tb}$  和各层切向应变  $\epsilon_{tni}$ 、 $\epsilon_{tbi}$ 。沿  $z$  轴任一位置的径向应变  $\epsilon_{rix}$ 、切向应变  $\epsilon_{tiz}$  可表示为

$$\epsilon_{rix} = \epsilon'_{rb} - K_r(h - z)$$

$$\epsilon_{tiz} = \epsilon'_{tb} - K_t(h - z)$$

其实际径向应力  $\sigma_{rix}$  和切向应力  $\sigma_{tiz}$  分别为

$$\sigma_{rix} = \frac{E_i}{1 - \mu_i^2} (\epsilon_{rix} + \mu_i \epsilon_{tiz})$$

$$\sigma_{tiz} = \frac{E_i}{1 - \mu_i^2} (\epsilon_{tiz} + \mu_i \epsilon_{rix})$$

复合路面各层间既非自由滑动,也不是完全固接,而是介于二者之间,其整体性是靠各层接触面的相互作用力来维持。这种作用力在水平方向上可称为层间剪应力,包括接触面凹凸不平引起的咬合力和摩擦力等。当复合路面层间设有结合层时,其层间水平剪应力则由结合层来承担,并可根据此校核结合层是否满足承载力要求。

## 2 算例验证

设有一复合路面结构形式如图3所示。石灰土基层厚度  $h_b = 35$  cm, 水泥混凝土结构层厚度  $h_c = 22$  cm, 沥青混凝土面层厚度  $h_a = 5$  cm。单圆轮迹半径  $a = 10.65$  cm, 设计均布荷载  $q = 0.7$  MPa。各材料的弹性模量和泊松比分别为: 土基  $E_s = 34$  MPa,  $\mu_s = 0.45$ ; 石灰土基层  $E_b = 500$  MPa,  $\mu_b = 0.35$ ; 混凝土结构层  $E_c = 35\,000$  MPa,  $\mu_c = 0.15$ ; 沥青混凝土面层  $E_a = 1\,500$  MPa,  $\mu_a = 0.25$ 。

将双层面板按分离式和结合式分别进行数值计算, 结果见表1、表2。表中  $r_d$  为计算点至加载中心的距离;  $w$  为复合路面层底的弯沉值;  $\sigma_{1r}$ 、 $\sigma_{1t}$  和  $\sigma_{2r}$ 、 $\sigma_{2t}$

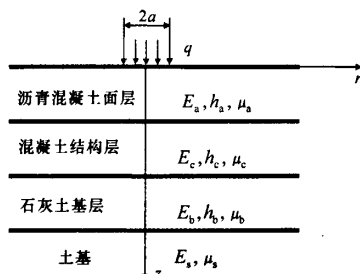


图3 复合路面结构形式

表1 分离式路面计算结果

$r_d /$ cm	$w /$ mm	$\sigma_{1r} /$ MPa	$\sigma_{1t} /$ MPa	$\sigma_{2r} /$ MPa	$\sigma_{2t} /$ MPa
0.00	0.135 4	0.723 5	0.723 5	0.013 9	0.013 9
5.33	0.135 1	0.705 2	0.715 1	0.013 2	0.013 5
10.65	0.134 5	0.656 7	0.691 7	0.011 4	0.012 5

表2 结合式路面计算结果

$r_d /$ cm	$w /$ mm	$\sigma_{1r} /$ MPa	$\sigma_{1t} /$ MPa	$\sigma_{2r} /$ MPa	$\sigma_{2t} /$ MPa
0.00	0.133 5	0.606 1	0.606 1	-0.023 3	-0.023 3
5.33	0.133 2	0.571 2	0.599 6	-0.021 9	-0.023 2
10.65	0.132 6	0.480 2	0.579 3	-0.018 1	-0.022 8

分别为混凝土板底和沥青层底面的柱坐标径向、切向应力值。对比可发现,结合式路面的弯沉值和混凝土板底的应力比分离式的略小,而沥青面层的层底应力比分离式的略大。同时,分离式沥青层底面表现为拉应力,而结合式沥青面层为全截面受压。

同时对两种情况的复合路面采用三维弹性实体单元 Solid64 进行 ANSYS 有限元分析,结果见表 3、表 4。由于采用圆形加载,单元的最小尺寸为 15 mm。取 1/4 模型进行分析,复合路面板平面尺寸为 3 m×3 m,基层及土基平面尺寸为 6 m×6 m,土基深度为 6 m。其分离层间采用平面接触单元进行模拟,摩擦系数取 0。在分离式路面有限元分析中,沥青层上表面最大弯沉为 0.167 742 mm,径向最大压应力为 0.169 MPa;下表面最大弯沉为 0.143 354 mm,径向最大拉应力为 -0.025 449 MPa。由此可看出,沥青面层最大压缩量约为 0.024 mm。混凝土层上表面最大弯沉为 0.143 354 mm,径向最大压应力为 -0.983 853 MPa;下表面最大弯沉为 0.141 047 mm,径向最大拉应力为 0.720 116 MPa。据此可看出,混凝土层最大压缩量约为 0.002 3 mm。而在结合式路面有限元分析中,沥青层上表面最大弯沉为 0.159 93 mm,径向最大压应力为 -0.274 255 MPa;下表面最大弯沉为 0.141 081 mm,径向最大压应力为 -0.264 857

MPa。就此可以看出,沥青面层最大压缩量约为 0.019 mm。混凝土层上表面最大弯沉为 0.141 081 mm,径向最大压应力为 -0.766 13 MPa;下表面最大弯沉为 0.139 118 mm,径向最大拉应力为 0.686 63 MPa。由此可看出,混凝土层最大压缩量约为 0.002 mm。

表3 分离式路面 ANSYS 分析结果

$r_d /$ cm	$w /$ mm	$\sigma_{1r} /$ MPa	$\sigma_{1t} /$ MPa	$\sigma_{2r} /$ MPa	$\sigma_{2t} /$ MPa
0.00	0.141 0	0.720 1	0.726 1	-0.025 4	-0.025 4
5.33	0.140 7	0.708 0	0.717 7	-0.006 3	-0.008 2
10.65	0.139 9	0.628 7	0.682 5	-0.045 3	0.055 2

表4 结合式路面 ANSYS 分析结果

$r_d /$ cm	$w /$ mm	$\sigma_{1r} /$ MPa	$\sigma_{1t} /$ MPa	$\sigma_{2r} /$ MPa	$\sigma_{2t} /$ MPa
0.00	0.139 1	0.686 6	0.689 1	-0.264 9	-0.265 0
5.33	0.138 8	0.662 6	0.666 5	-0.258 8	-0.263 5
10.65	0.138 1	0.590 9	0.595 4	-0.136 5	-0.138 0

文献[1]对加铺层结构设计提出了具体方法,有沥青上面层的混凝土板临界荷位处的荷载应力为

$$\sigma_{psa} = (1 - \eta h_a) \sigma_{ps} \quad (14)$$

式中: $\eta$ 为系数,可从文献[1]查得; $\sigma_{ps}$ 为标准轴载在无沥青上面层的混凝土板临界荷位处的荷载应力(MPa)。

在算例计算中,均取板中位置作用的单圆荷载,为了对比,将无沥青面层混凝土板上单圆荷载下的应力值代入式(14),可得到复合路面混凝土板底应力。按文献[1]方法,无沥青面层混凝土板底应力为 0.727 MPa,代入式(14)求得有沥青上面层的混凝土板底应力为 0.675 MPa。可见,采用文中所述方法的计算结果与按文献[1]公式计算结果基本一致。

### 3 分析与讨论

根据本文算例的分析对比,数值解法与有限元计算弯沉和混凝土层应力结果比较接近。其中两种情况的混凝土板底弯沉与分离式混凝土板底应力最大相差 5%,与结合式混凝土板底应力最大相差 12%左右,而沥青面层的应力有限元分析结果约为数值计算的 10 倍。这是因为有限元分析采用三维实体单元,对荷载下的局部效应计算较为准确,而采用薄板理论则不考虑板沿厚度方向的竖向变形,忽略了荷载局部效应对板的受力影响。计算结果表明,荷载的局部效应对混凝土板影响较小,对沥青层影响较大。因此,对混凝土板底弯沉和应力可采用

弹性地基上的多层薄板理论计算;而对沥青上面层可考虑局部荷载下多层板接触效应,对荷载作用区域采用接触力学的方法单独进行分析,并同时考虑沥青材料的粘弹塑性影响<sup>[8]</sup>,关于这部分计算将另行撰文讨论。

设计和实践表明,无论是新建复合式路面,还是旧混凝土路面上加铺沥青面层,均以混凝土板底的应力作为控制指标。而沥青加铺层对降低旧混凝土板荷载应力的效果很有限,加铺层下的旧混凝土板的应力和混凝土的弯拉强度在设计中起控制作用。

对于在相邻层间设结合层的情况,其层间剪力由结合层来承担。若结合层与上下层为绝对光滑接触,则水平剪应力为0;若接触面上有摩擦力,则结合层上下表面的摩擦(粘结力)合力即为其所承受的剪应力。一般情况下,结合层厚度较小,可从多层路面结构中分离出来单独进行考虑(若厚度较大,也可在复合路面体系中计算),可通过分离式路面层间的水平变形差值,推算出结合层所受的最大水平剪切应变,从而求出其最大的水平应力值,确定出所需结合层材料的最小强度。

## 4 结 语

(1)采用弹性地基上的多层薄板理论,计算复合路面混凝土板底的弯沉和应力,其结果与有限元分析结果吻合较好。但在数值上,前者比后者略小。

(2)由于多层薄板理论忽略了各层路面在板厚度方向的变形,故不能考虑荷载的局部效应影响。而有限元分析采用实体单元,其荷载作用位置的变形和应力比薄板理论计算值略大,尤其是沥青上面层的应力差别最大。故而,需对有沥青上面层复合路面板的荷载局部效应进行单独分析。

(3)算例结果表明,按文献<sup>[1]</sup>计算有沥青上面层的混凝土板应力,其结果介于多层薄板理论的分离式与结合式情况之间,与实际情况较为一致。复合路面各层间既非完全分离,也非完全固接,若要进行更准确的定量分析,尚需考查各层间的粘结力性能。

## 参考文献:

## References:

- [1] JTG D40-2002,公路水泥混凝土路面设计规范[S].
- [2] 关宏信,张起森,郑健龙.旧水泥混凝土路面搭板罩面的应力[J].长安大学学报:自然科学版,2005,25(6):25-28.  
GUAN Hong-xin, ZHANG Qi-sen, ZHENG Jian-long. Stress of asphalt overlay laying on cracked concrete pavement repaired with bridging slab[J]. Journal of Chang'an University: Natural Science Edition, 2005, 25(6): 25-28.
- [3] 易伟建,周云,张望喜.弹性地基板模态试验及地基动参数识别[J].中国公路学报,2007,20(2):1-6.  
YI Wei-jian, ZHOU Yun, ZHANG Wang-xi. Modal experiment on elastic foundation slab and identification of dynamic foundation parameters[J]. China Journal of Highway and Transport, 2007, 20(2): 1-6.
- [4] 朱照宏,王秉纲,郭大智.路面力学计算[M].北京:人民交通出版社,1985.
- [5] Li S, Fwa T F, Tan K H. Parameter back-calculation for concrete with two slab layers[J]. Journal of Transportation Engineering, 1998, 124(6): 567-572.
- [6] Li S, Fwa T F, Tan K H. Back-calculation of parameters for slab on two-layer foundation system[J]. Journal of Transportation Engineering, 1997, 123(6): 484-488.
- [7] Szilard R.板的理论和分析经典法和数值法[M].陈太平,译.北京:中国铁道出版社,1984.
- [8] 倪富健,卢杨,顾兴宇,等.沥青混凝土与连续配筋混凝土复合式路面承载力分析[J].交通运输工程学报,2007,7(1):43-48.  
NI Fu-jian, LU Yang, GU Xing-yu, et al. Carrying capacity analysis of asphalt concrete and continuously reinforced concrete composite pavement[J]. Journal of Traffic and Transportation Engineering, 2007, 7(1): 43-48.