

# 利用加权范数估计机器人抓取系统的吸引域

王凯明<sup>1,2</sup>, 贾双盈<sup>1</sup>, 胡新利<sup>3</sup>

(1. 长安大学 理学院, 陕西 西安 710064; 2. 西安交通大学 理学院, 陕西 西安 710049;  
3. 西安工程大学 理学院, 陕西 西安 710048)

**摘 要:**为了研究多指手机器人抓取系统的动态稳定性,引入了矩阵的加权范数;继而应用抓取矩阵的加权范数及其测度,得出抓取系统的渐近稳定、不稳定的条件,以及渐近稳定时系统平衡点的吸引域估计;最后得到抓取系统弹性矩阵以及减震矩阵正定时,方使抓取系统渐近稳定。

**关键词:**泛函分析; 加权范数; 抓取系统; 动态稳定性; Liapunov 函数; 吸引域

**中图分类号:** TB114. 3; TP24 **文献标志码:** A

## Estimating attraction regions of robotic grasp with weighting-norm

WANG Kai-ming<sup>1,2</sup>, JIA Shuang-ying<sup>1</sup>, HU Xin-li<sup>3</sup>

(1. School of Science, Chang'an University, Xi'an 710064, Shaanxi, China;  
2. School of Science, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, Shaanxi, China;  
3. School of Science, Xi'an Polytechnic University, Xi'an 710048, Shaanxi, China)

**Abstract:** In order to study the dynamic stability of robotic multi-fingered grasping system, the weighting-norm of matrix is introduced. Then the weighting-norm and the measure of grasping matrix is applied to obtain the asymptotic stability condition and the unstable condition, and the attraction regions of the asymptotic stable grasp is estimated. At last, the result of the theorem is applied to the robotic grasping system, which asymptotically stability is obtained when the stiffness and damping matrix is positive definite. 1 fig, 10 refs.

**Key words:** functional analysis; weighting-norm; grasp system; dynamic stability; Liapunov function; attraction region

## 0 引 言

在现有的很多文献中,动态系统的稳定性是通过应用 Liapunov 直接方法<sup>[1-3]</sup>来判定的,但由于直接基于 Liapunov 函数的稳定性的判别法既不能估计系统靠近平衡点的收敛速度,也限制了对平衡点吸引域的估计。为此本文将引入向量的加权范数(或称椭圆范数)<sup>[4-5]</sup>,利用机器人抓取系统<sup>[6-7]</sup>

$$\dot{x} = Ax + F(x) \quad (1)$$

中的非线性项  $F(x)$  所满足的条件  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\|F(x)\|}{\|x\|} = 0$

对系统稳定性的作用,给出机器人抓取系统式(1)的稳定性及抓取平衡点吸引域的估计。式(1)中

$$A = \begin{bmatrix} O_{6 \times 6} & I_{6 \times 6} \\ -M_b^{-1} \tilde{K}_b & -M_b^{-1} \tilde{B}_b \end{bmatrix}, F(x) = \begin{bmatrix} O_{6 \times 1} \\ M_b^{-1} F_2(x) \end{bmatrix},$$
$$F_2 = \begin{bmatrix} O_{3 \times 3} \\ F_1 \end{bmatrix}, x_1 = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \theta \end{bmatrix}, x_2 = \begin{bmatrix} \Delta \dot{x} \\ \Delta \dot{\theta} \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$
$$F_1(x) = \sum_{i=1}^m (C_i x_1 \times \tilde{K}_i x_2 + D_i x_2 \times \tilde{K}_i x_2)。$$

式中:  $A$  为抓取矩阵;  $M_b, \tilde{B}_b, \tilde{K}_b$  分别为机器人抓取系统的惯性矩阵、减震矩阵以及弹性矩阵;  $I$  为单位矩阵;  $C_i$  为弹性矩阵余项;  $D_i$  为减震矩阵余项;  $m$  为抓取手指个数;  $x$  为抓取偏差向量; 乘号  $\times$  为叉乘。

## 1 定义及引理

**定义 1** 对正定矩阵  $G$ , 定义向量的加权范数或  $G$ -范数为

$$\|x\|_G = \sqrt{\langle Gx, x \rangle}$$

特别的, 当  $G$  为单位矩阵时  $\|x\|_G = \|x\|_2$ 。

**引理 1** 若矩阵  $A$  的特征值  $\lambda_i$  均满足  $\lambda_i + \lambda_j \neq 0 (i, j=1, 2, \dots, n)$ , 则对任意实对称矩阵  $C$ , 都有唯一实对称矩阵  $B$  满足  $C = A^T B + BA$  [8]。

## 2 定理及证明

**定理 1** 当  $\tilde{K}_b, \tilde{B}_b$  正定时, 系统式(1)的平衡点  $x=0$  渐近稳定, 且平衡点的吸引域  $\Gamma$  为以平衡点  $x=$

0 为中心, 以  $r = \frac{\alpha \|\tilde{B}_b\|_2 \sqrt{-\mu_2(-\tilde{A})}}{2N}, 0 < \alpha < 1$  为

半径的  $\tilde{A}$ -范数下的开球, 这里  $\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{K}_b & O_{6 \times 6} \\ O_{6 \times 6} & M_b \end{bmatrix}$ ,

$\mu_2(-\tilde{A})$  为矩阵  $\tilde{A}$  在  $l^2$ -范数下的测度, 即

$$\mu_2(-\tilde{A}) = \max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i \left( \frac{\tilde{A} + \tilde{A}^H}{2} \right)$$

**证明** 由  $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{K}_b & O_{6 \times 6} \\ O_{6 \times 6} & M_b \end{bmatrix}$  并且  $\tilde{K}_b,$

$M_b$  正定可知,  $\tilde{A}$  正定, 所以可引入向量  $x$  的加权范数:  $\tilde{A}$ -范数为

$$\|x\|_{\tilde{A}} = \sqrt{\|x_1\|_{\tilde{K}_b}^2 + \|x_2\|_{M_b}^2},$$

$$\|x_1\|_{\tilde{K}_b} = \sqrt{x_1^T \tilde{K}_b x_1} = \sqrt{\langle \tilde{K}_b x_1, x_1 \rangle},$$

$$\|x_2\|_{M_b} = \sqrt{x_2^T M_b x_2} = \sqrt{\langle M_b x_2, x_2 \rangle}.$$

由此  $x$  的  $\tilde{A}$ -范数沿系统式(1)解轨线满足

$$\begin{aligned} \frac{d(\|x(t)\|_{\tilde{A}}^2)}{dt} &= \frac{d(x_2^T M_b x_2 + x_1^T \tilde{K}_b x_1)}{dt} = \\ &-2\|x_2\|_{M_b}^2 + 2x_2^T F_2(x) \end{aligned}$$

显然  $F_1(x)$  满足不等式  $\|F_1(x)\|_2 \leq N(\|x_1\|_2 \cdot$

$\|x_2\|_2 + \|x_2\|_2^2)(N$  是某一固定常数), 所以,

$F_2(x)$  满足估计式  $\|x_2^T F_2(x)\|_2 \leq 2N\|x_2\|_2^2 \cdot$

$\|x\|_2$ , 所以当  $\|x\|_2 < \frac{\alpha \|\tilde{B}_b\|_2}{2N}, 0 < \alpha < 1$  时,

$\frac{d(\|x(t)\|_{\tilde{A}}^2)}{dt} \leq -2(1-\alpha)\|x_2\|_{M_b}^2 \leq 0$ , 同时可以

验证  $M = \{x: \frac{d\|x\|_{\tilde{A}}^2}{dt} = 0\}$  不包含式(1)非平凡轨线。即当且仅当  $x=0, \frac{d\|x\|_{\tilde{A}}^2}{dt} = 0$ , 此时  $\frac{d\|x\|_{\tilde{A}}^2}{dt}$  负定。所以系统式(1)的平衡点  $x=0$  渐近稳定。

进而, 由  $\frac{d\|x\|_{\tilde{A}}^2}{dt}$  负定可知  $\|x\|_{\tilde{A}}$  单调减少,

且  $t \geq t_0$  时  $\|x(t)\|_{\tilde{A}} \leq \|x(t_0)\|_{\tilde{A}}$ , 而且由  $\tilde{A}$  正定有  $-\mu_2(-\tilde{A}) > 0$ 。所以当

$$x_0 \in \Gamma = \{x, \|x-0\|_{\tilde{A}} <$$

$$\frac{\alpha \|\tilde{B}_b\|_2 \sqrt{-\mu_2(-\tilde{A})}}{2N}, 0 < \alpha < 1\}$$
 时,

$\|x\|_2 < \frac{\alpha \|\tilde{B}_b\|_2}{2N}$ , 即系统式(1)满足初始条件

$x(t_0) = x_0$  的解  $x(t) \in \Gamma$ 。所以系统(1)的平衡点  $x=0$  渐近稳定, 且平衡点的吸引域为  $\Gamma$ 。证毕。

由定理 1 可以得到微分方程中对线性系统的扰动系统平衡点吸引域更一般的结论。

**考察系统**

$$\frac{dx}{dt} = Ax + F(x, t) \quad (2)$$

其中  $F(x, t)$  在  $x=0$  的邻域内关于  $x$  满足 Lipschitz

条件, 对  $t$  一致的有  $\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{\|F(x, t)\|}{\|x\|} = 0, F(t, 0) = 0$ 。

则由定理 1 可以得到系统式(2)零解的吸引域。

**定理 2** 若矩阵  $A$  的特征值  $\lambda_i (i=1, 2, \dots, n)$  均满足  $\operatorname{Re} \lambda_i < 0 (i=1, 2, \dots, n)$ , 则系统式(2)的平衡点  $x=0$  渐近稳定, 且存在唯一的正定矩阵  $B$ , 使得平衡点的吸引域为

$\Gamma = \{x, \|x-0\|_B < \sqrt{-\mu_2(-B)}\delta_0, 0 < \alpha < 1\}$  (其中  $\delta_0$  为确定的正数,  $\mu_2(-B)$  的定义同定理 1)。

**证明** 对  $C = -I$ , 由引理 1, 存在唯一的正定矩阵  $B$  满足:  $A^T B + BA = -I$ , 所以可定义向量  $x$  的加权范数:  $B$ -范数为  $\|x\|_B = \sqrt{x^T B x}$ , 它沿系统式(2)解轨线满足

$$\frac{d\|x\|_B^2}{dt} = \dot{x}^T B x + x^T B \dot{x} =$$

$$(Ax + F(x, t))^T B x + x^T B (Ax +$$

$$F(x, t)) = x^T (A^T B + BA) x +$$

$$F^T(x, t) B x + x^T B F(x, t) = -x^T x +$$

$$F^T(x, t) B x + x^T B F(x, t)$$

由系统式(2)满足  $\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{\|F(x, t)\|}{\|x\|} = 0$ , 所以  $\forall \epsilon > 0,$

$\exists \delta > 0$ , 当  $\|x\|_2 < \delta$ , 关于  $t$  一致的有  $\|F(x, t)\|_2 \leq \epsilon \cdot \|x\|_2$  成立。有  $\|F^T(x, t) B x + x^T B F(x, t)\|_2 \leq$

$2\varepsilon\|\mathbf{B}\|_2\|\mathbf{x}\|_2^2$ 。取  $\varepsilon=\frac{\alpha}{2\|\mathbf{B}\|_2},0<\alpha<1$  则有  
 $\exists\delta_0>0$ ,当  $\|\mathbf{x}\|_2\leq\delta_0$  时,  
 $\frac{d}{dt}\|\mathbf{x}\|_2^2\leq(\alpha-1)\|\mathbf{x}\|_2^2\leq 0$ ,  
且  $\frac{d}{dt}\|\mathbf{x}\|_2^2=0\Leftrightarrow\mathbf{x}=0$ 。

所以,由定理 1 的证明,可以知道系统式(2)的零解渐近稳定。

再者,由矩阵  $\mathbf{B}$  正定,所以矩阵  $\mathbf{B}$  在向量的  $l^2$ -范数下定义的测度满足  $-\mu_2(-\mathbf{B})>0$ 。所以有

$x_0\in\Gamma=\{\mathbf{x},\|\mathbf{x}\|_B<\sqrt{-\mu_2(-\mathbf{B})}\delta_0,0<\alpha<1\}$  时,系统式(2)的满足初始条件的  $\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0$  整个解轨线全落在  $\Gamma$  内。证毕。

显然定理 2 的关键在于求解矩阵  $\mathbf{B}$  及用于估计扰动项的正数  $\delta_0$ ,如果  $\mathbf{B}$  和  $\delta_0$  得到了,那么在得到扰动系统稳定性的同时,还可以确定其吸引域。

推论 1 当  $\tilde{\mathbf{K}}_b$  负定,  $\tilde{\mathbf{B}}_b$  正定时,系统式(1)零解不稳定。

证明:作 Liapunov 函数  $V(\mathbf{x})=\mathbf{x}_2^T\mathbf{M}_b\mathbf{x}_2+\mathbf{x}_1^T\tilde{\mathbf{K}}_b\mathbf{x}_1$ ,则由定理 1,当  $\tilde{\mathbf{K}}_b$  负定,  $\tilde{\mathbf{B}}_b$  正定时,  $V(\mathbf{x})$  非正定而  $\dot{V}(\mathbf{x})\leq 0$ 。所以由 Liapunov 稳定性定理,系统式(1)对应的线性系统

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\mathbf{A}\mathbf{x}\tag{3}$$

的零解不稳定。由定理 2 可得到  $\mathbf{A}$  具有正实部特征值,但不具有零实部特征值,所以由定理 1,系统式(1)的零解不稳定。证毕。

### 3 抓取实例

三球形手指对称抓取(物体的接触面近似为球面)如图 1 所示。在平衡状态时,三手指的接触力为  $\mathbf{f}_{1o}^c=(0\ 0\ -f_n)^T,\mathbf{f}_{2o}^c=\mathbf{f}_{3o}^c=(0\ 0\ -\frac{f_n}{2})^T,\{x_{coi},y_{coi},z_{coi}\},i=1,2,3$  为第  $i$  个手指与物体的接触点处的坐标架,  $\{x_o,y_o,z_o\}$  为物体坐标架,  $f_n\in R^+$ ,仍假设各接触点处手指与物体的接触面曲率半径在各接触点处相同,分别为  $\rho_o,\rho_f$ ,其他假设如图 1。

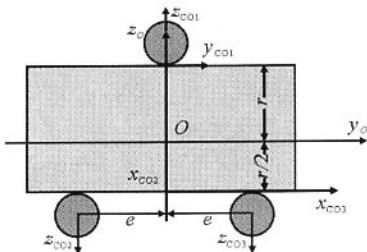


图 1 三球形手指对称抓取示意

这样,由  $\tilde{\mathbf{B}}_b,\tilde{\mathbf{K}}_b,\mathbf{M}_b$  的表达式有

$$\tilde{\mathbf{B}}_b=\begin{bmatrix}3b&0&0&0&0&0\\0&3b&0&0&0&0\\0&0&3b&0&0&0\\0&0&0&\frac{3r^2+4e^2}{2}b&0&0\\0&0&0&0&\frac{3r^2}{2}b&0\\0&0&0&0&0&2e^2b\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_b=\begin{bmatrix}m&0&0&0&0&0\\0&m&0&0&0&0\\0&0&m&0&0&0\\0&0&0&\mathbf{I}_{xx}&0&0\\0&0&0&0&\mathbf{I}_{yy}&0\\0&0&0&0&0&\mathbf{I}_{zz}\end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_b=\begin{bmatrix}3k&0&0&0&0&0\\0&3k&0&0&0&0\\0&0&3k&0&0&0\\0&0&0&\frac{3r^2+4e^2}{2}k+\rho f_n&-\rho f_n&0\\0&0&0&-\rho f_n&\frac{3r^2}{2}k+\rho f_n&0\\0&0&0&0&0&2e^2k\end{bmatrix}$$

由于  $\tilde{\mathbf{B}}_b,\tilde{\mathbf{K}}_b$  正定,所以  $\det(\mathbf{M}_b\lambda^2+\tilde{\mathbf{B}}_b\lambda+\tilde{\mathbf{K}}_b)=0$  只有负实部特征值,所以由定理 1 可知抓取系统平衡点渐近稳定,且平衡点的吸引域可取为

$$\Gamma=\{\mathbf{x},\|\mathbf{x}\|_{\tilde{\mathbf{A}}}<\frac{\alpha\|\tilde{\mathbf{B}}_b\|_2\sqrt{-\mu_2(-\tilde{\mathbf{A}})}}{2N},0<\alpha<1\}$$
$$\Gamma=\{\mathbf{x},\|\mathbf{x}\|_{\tilde{\mathbf{A}}}<\frac{\alpha\max[3b,(3r^2+4e^2)b/2]}{2N}\cdot\frac{\sqrt{\min[m,\mathbf{I}_{xx},\mathbf{I}_{yy},\mathbf{I}_{zz},3k,2e^2k,(3r^2k+2\rho f_n)/2]}}{2N},0<\alpha<1\}$$

显然可通过调节参数  $e,k,b,f_n,\alpha$  得到更为具体的吸引域。

### 4 结 语

(1)机器人<sup>[9-10]</sup>抓取系统中的非线性项

$$\mathbf{F}_1((\Delta\mathbf{x}^T\ \Delta\boldsymbol{\theta}^T\ \Delta\dot{\mathbf{x}}^T\ \Delta\dot{\boldsymbol{\theta}}^T)^T)=\sum_{i=1}^m(\mathbf{C}_i\begin{bmatrix}\Delta\mathbf{x}\\\Delta\boldsymbol{\theta}\end{bmatrix}\times\tilde{\mathbf{K}}_i\begin{bmatrix}\Delta\dot{\mathbf{x}}\\\Delta\dot{\boldsymbol{\theta}}\end{bmatrix}+\mathbf{D}_i\begin{bmatrix}\Delta\dot{\mathbf{x}}\\\Delta\dot{\boldsymbol{\theta}}\end{bmatrix}\times\tilde{\mathbf{K}}_i\begin{bmatrix}\Delta\dot{\mathbf{x}}\\\Delta\dot{\boldsymbol{\theta}}\end{bmatrix})$$

包含了抓取系统抓取点的相对位置,手指弹力和减震阻尼的相对分配等信息,改变其中的部分量将会使线性系统式(3)稳定而非线性系统式(1)不稳定。

特别是,当  $\operatorname{Re} \lambda(\mathbf{A}) \leq 0$ , 且  $\exists \lambda_i \in \sigma_p(\mathbf{A}), \operatorname{Re} \lambda_i = 0$  时, 非线性项  $F(x)$  决定了抓取系统的稳定性。

(2) 由于直接基于 Liapunov 函数的稳定性判别法既不能估计系统平衡点的收敛速度, 也限制了对平衡点吸引域的估计, 因而限制了抓取系统的实际应用。利用向量的加权范数则改进了这一缺点。但是求解 Liapunov 方程  $\mathbf{A}^T \mathbf{B} + \mathbf{B} \mathbf{A} = -\mathbf{I}$  及不等式  $\|F(x)\| < \frac{\alpha}{2\|\mathbf{B}\|_2}, 0 < \alpha < 1$  并不容易, 所以这个求解吸引域的方法还有待改进。

#### 参考文献:

#### References:

- [1] Jen F, Shoham M, Longman R W. Liapunov stability of forced-controlled grasps with a multifingered hand[J]. Intl J Robot Res, 1996, 15(2): 137 - 154.
- [2] 廖晓昕. 稳定性的理论方法和应用[M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 1999.
- [3] 黄琳. 稳定性理论[M]. 北京: 北京大学出版社,

1992.

- [4] 徐成贤, 徐宗本. 矩阵分析[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1991.
- [5] 王凯明. 多指手机器人抓取的动态稳定性[D]. 西安: 西安交通大学, 2003.
- [6] Xiong C H, Li Y F, Xiong Y L, et al. On the dynamic stability of grasping [J]. International Journal of Robotics Research, 1999, 18(8): 951 - 958.
- [7] 熊蔡华, 熊有伦, 张卫平. 机器人滚动操作时手指的运动分析[J]. 自然科学进展, 1998, 8(6): 748 - 754. XIONG Cai-hua, XIONG You-lun, ZHANG Wei-ping. Kinematics of finger with rolling contact [J]. Progress in Natural Science, 1998, 8(6): 748 - 754.
- [8] 马知恩, 周义仓. 常微分方程定性及稳定性方法[M]. 北京: 科学出版社, 2001.
- [9] 理查德·摩雷, 李泽湘, 夏恩卡·萨思特里. 机器人操作的数学导论[M]. 北京: 机械工业出版社, 1998.
- [10] John J C. Introduction to robotics: mechanics and control[M]. 2nd ed. Boston: Addison-Wesley Publishing Company, 1989.

(上接第 79 页)

化的评价方法加强了公路建设项目之间的可比性, 在公路建设项目方案选择、项目序列遴选、路网规划等领域具有广泛的适用性。

(3) 效用评价体系总体分为 4 大部分, 各部分的子指标可根据对公路建设项目评价目的的不同而进行适当的调整, 取主要特征指标。

(4) 效用评价方法效用函数的建立、各评价指标效用值的求得以及指标效用值的二级合并, 都可以通过编程在计算机上求得, 可以大大简化效用值的计算过程。

#### 参考文献:

#### References:

- [1] 中华人民共和国交通部. 公路建设项目可行性研究报告编制办法(选审稿)[M]. 北京: 人民交通出版社, 1995.
- [2] 张生瑞, 邵春福, 严海. 公路交通可持续发展评价指标及评价方法研究[J]. 中国公路学报, 2005, 18(2): 74 - 78. ZHANG Sheng-rui, SHAO Chun-fu, YAN Hai. Evaluation indices and model of highway transportation sustainable development[J]. China Journal of Highway and Transport, 2005, 18(2): 74 - 78.
- [3] 沈毅, 吴丽娜, 王红瑞, 等. 环境影响后评价的进展及

主要问题[J]. 长安大学学报: 自然科学版, 2005, 25(1): 56 - 59.

SHEN Yi, WU Li-na, WANG Hong-rui, et al. Post-project-analysis in environmental impact: development and main problems[J]. Journal of Chang'an University: Natural Science Edition, 2005, 25(1): 56 - 59.

- [4] 马荣国, 刘艳妮. 公路建设项目综合评价权重确定方法[J]. 交通运输工程学报, 2005, 5(2): 110 - 112. MA Rong-guo, LIU Yan-ni. Weight value determination method of highway construction comprehensive evaluation[J]. Journal of Traffic and Transportation Engineering, 2005, 5(2): 110 - 112.
- [5] 成盛超. 决策效用理论中的若干问题[D]. 上海: 上海交通大学, 1993.
- [6] 陈珽. 决策分析[M]. 北京: 科学出版社, 1987.
- [7] 萨蒂 T L, 许树柏. 层次分析法——在资源分配、管理和冲突分析中的应用[M]. 北京: 煤炭工业出版社, 1988.
- [8] 汪应洛. 系统工程[M]. 北京: 机械工业出版社, 2001.
- [9] 毛义华. 效用方法评价施工企业综合经济效益[J]. 浙江大学学报: 自然科学版, 1997, 31(5): 592 - 599. MAO Yi-hua. Applying utility theory to the synthetic assessment of economic benefiton construction enterprises[J]. Journal of Zhejiang University: Natural Science Edition, 1997, 31(5): 592 - 599.