第 26 卷 第 4 期
2006 年 7 月

长安大学学报(自然科学版)
Journal of Chang'an University(Natural Science Edition)

Vol. 26 No. 4
Jul. 2006

文章编号:1671-8879(2006)04-0008-03

饱和土体串联与并联弹性力学模型

张豫川[1], 刘 旭[2,3]

(1. 兰州大学 土木工程与力学学院,甘肃 兰州 730000; 2. 上海交通大学 船舶海洋与建筑工程学院,上海 200030; 3. 兰州地震研究所,甘肃 兰州 730000)

摘 要:针对饱和土体中的串联与并联弹性力学模型,通过将固体中的应力分解为颗粒间应力和流体与颗粒的相互作用力,并且运用流体与颗粒间的作用力与反作用力相等,以及在不排水条件下土体总应变等于骨架的应变原理,对这两种模型的理论依据进行了证明和阐述。结果表明:饱和土体中的串联与并联弹性力学模型与 Biot-Geerstma 理论是一致的,且分别是该理论中弹性模量在骨架弹性模量为零和颗粒弹性压缩系数为零的两个特例;Terzaghi 有效应力是"粒间应力"的平均值。

关键词:道路工程; 饱和土体; 固体力学; 双相介质; 力学模型; 有效应力

中图分类号:TU435 **文献标识码**:A

Serial and parallel elastic mechanical models of saturated soils

ZHANG Yu-chuan[1], LIU Xu[2,3]

(1. School of Civil Engineering and Mechanics, Lanzhou University, Lanzhou 730000, Gansu, China; 2. School of Naval Architecture, Ocean and Civil Engineering, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200030, China; 3. Seismological Institute of Lanzhou, Lanzhou 730000, Gansu, China)

Abstract: Based on serial and parallel elastic stress-strain models in saturated soils, the stress in solid is decomposed into two parts: one is among granules; the other is between granules and fluid. Under the conditions that the action force of fluid on granules equals the reaction force of granules on fluid, and the total strain equals the strain of skeleton when without drainage reaction in saturated soil, those two models are studied. It is found that both the models are identical with Biot-Geerstma theory, and Terzaghi effective stress should be regarded as the ratio of the stress among granules that are averaged by granules volume. 6 refs.

Key words: road engineering; saturated soils; solid mechanics; two-phase media; mechanical model; effective stress

0 引 言

近年来,不少学者将不同饱和土体中的固体与流体的力学关系归纳为串联、并联或其组合关系,并且根据这些应力-应变关系推导出相应的弹性体积模量[1-3]。据此较容易发现串联或并联模型的体积模量分别是 Biot-Geertsma 理论中不排水体积模量[4]的两个特例。但是,串联或并联模型的理论依据却一直未被清楚地阐述,大都是直接断定固液混合物(悬浮体)属串联模型,孔隙相互连通的饱和土

收稿日期:2005-06-05
基金项目:甘肃省自然科学基金项目(3ZS041-A25-014)
作者简介:张豫川(1963-),女,宁夏银川人,高级工程师,硕士.

体属并联模型。上述观点有很多不明确之处，例如，双相介质均是固液混合物，判定固液混合物是悬浮体应有明确的力学依据或指标；几乎所有饱和土体的孔隙均是相互连通的，是否均属于并联模型？因此，以双相介质的微观力学机制为基础，分析这两种力学模型的来源，将它们统一起来是对此问题的深化。本文仅涉及饱和土体的弹性力学问题，应力-应变关系均是指不排水条件。

1　串联及并联模型与 Biot-Geertsma 理论的关系

饱和土在侧限不排水压缩条件下，固体及流体各相的弹性体积应变符合胡克定理

$$\begin{cases}\varepsilon_b = \sigma_e/(\lambda_b + 2\mu_b)\\ \varepsilon_f = \sigma_f/K_f\end{cases} \tag{1}$$

式中：ε_b、ε_f 分别为固体骨架、孔隙流体的侧限体积应变；σ_e、σ_f 分别为有效应力与流体的平均应力，$\sigma_f = \varphi P_f$，P_f 为孔隙流体压力；λ_b、μ_b、K_f 分别为固体骨架的 Lame 常数、剪切模量和流体体积模量。

文献[2]认为，固液混合物（悬浮体）、孔隙相互连通两种类型的饱和土体的应力-应变关系分别为串联和并联模型。

(1) 固液混合物（悬浮体）。假设饱和土体总应力 σ 与固体颗粒所受的应力 σ_s 及流体所受的应力 σ_f 相等，且总体应变 ε 等于骨架颗粒的体变 ε_s 与流体体积应变相加

$$\begin{cases}\sigma = \sigma_s = \sigma_f\\ \varepsilon = \varepsilon_s + \varepsilon_f\end{cases} \tag{2}$$

这是串联模型的力学关系。等效体变模量 K，与固体颗粒的体积模量 K_s 关系式为

$$1/K = (1-\varphi)/K_s + \varphi/K_f \tag{3}$$

(2)孔隙相互连通。应力符合 Terzaghi 有效应力原理，固体与流体的应变相等。

$$\begin{cases}\sigma = \sigma_e + P_f\\ \varepsilon = \varepsilon_b = \varepsilon_f\end{cases} \tag{4}$$

式(4) 是并联模型的力学模型。土体侧限模量（侧限条件下的轴向应力与体应变之比）为

$$\lambda + 2\mu = \sigma/\varepsilon \tag{5}$$

式中：λ、μ 为饱和土体的弹性拉梅系数。

将式(1)、式(4)代入式(5)有

$$\lambda + 2\mu = (\lambda_b + 2\mu_b) + K_f/\varphi \tag{6}$$

其中，$\mu = \mu_b$，$K = \lambda + 2\mu/3$，则有

$$K = \lambda + 2\mu/3 = \lambda_b + 2\mu_b/3 + K_f/\varphi$$

或

$$K = K_b + K_f/\varphi \tag{7}$$

Biot-Geertsma 理论饱和土体不排水体积模量公式为

$$K = \frac{1}{c_b} + \frac{(1-\beta)^2}{(1-\varphi-\beta)c_s + \varphi c_f} \tag{8}$$

式中：$c_b = 1/K_b$，$c_s = 1/K_s$，$\beta = c_s/c_b$，$c_f = 1/K_f$

可以看出式(3)是式(8)中 c_b 为无穷大的特例，而式(7)是式(8)c_s 为 0 的特例。但是串联与并联模型应力-应变关系式(2)、式(4)的建立过程并不十分清楚，需要微观力学分析加以证明和阐述。

2　并联模式与串联模式的理论分析

双相介质中的总应力等于固体材料中的应力平均值加孔隙流体中的应力平均值，见式(9)。

$$\sigma = \sigma_s + \sigma_f \tag{9}$$

Terzaghi 有效应力原理式为

$$\sigma = \sigma_e + P_f \tag{10}$$

对比式(9)与式(10)，可以发现总应力均由固体与流体中的应力两部分组成，但它们的含义完全不同。如果将固体部分与流体部分分别看作两个弹性元件，那么式(2)、式(4)分别被称为串联或并联模式。此两式的应力-应变关系类似于固体力学中的 Rescss 近似（串联模式）或 Voigt 近似（并联模式）。但是，式(2)中固体成分指的是固体材料（颗粒），而式(4)中固体成分指的是固体骨架（包含颗粒与孔隙空间，不包含孔隙流体）。也就是说同一种复合体材料的串联或并联模式中固体元件不同。由文献[4]所讨论的土体应力关系，可对式(10)推论如下：对于颗粒材料，从微观固体颗粒的受力情况来看，σ_e 包括了两部分应力：

(1)由相邻颗粒的支撑力 P_{ss} 传递而来的所谓“粒间应力”σ_{ss}，它的平均值为$(1-\varphi)P_{ss}$，下标 ss 代表相邻颗粒的相互作用，它是真正的可以引起孔隙率变化及土体结构变形的因素，则有

$$P_{ss} = (-K_b\Delta V_b)/V_b$$

或

$$\sigma_{ss} = K_b\varepsilon_b \tag{11}$$

(2) 颗粒受到周围的流体压力 P_{sf}，它的应力平均值 σ_{sf} 为$(1-\varphi)P_{sf}$，下标 sf 代表颗粒与周围流体的相互作用，它只引起孔隙大小的变化，但不引起孔隙率的变化，也不改变土体结构的形状，则有

$$\begin{cases}P_{sf} = (-K_s\Delta V_{sf})/V_s\\ \sigma_{ss} = K_s\varepsilon_{sf}\end{cases} \tag{12}$$

其中，ΔV_{sf} 为流体作用于颗粒引起的颗粒体积变化；又因作用力等于反作用力，P_{sf} 等于孔隙流体压力 P_f。这样重写式(9) 有

$$\begin{cases}\sigma = (1-\varphi)(P_{ss}+P_{sf})+\varphi P_f \\ P_{sf} = P_f\end{cases} \tag{13}$$

或
$$\begin{cases}\sigma = (1-\varphi)P_{ss}+P_f \\ P_{sf} = P_f\end{cases} \tag{14}$$

将式(11)与式(12)代入式(13),得

$$\begin{cases}\sigma = (1-\varphi)\left(-K_b\dfrac{\Delta V_b}{V_b}-K_s\dfrac{\Delta V_{sf}}{V_s}\right)+\varphi P_f \\ P_{sf} = P_f\end{cases} \tag{15}$$

对比式(10)与式(14),可见有效应力是指“粒间应力”的平均值。如果说有效应力是指“粒间应力”,那一定是忽略了颗粒的压缩性。这样,双相介质中有效应力的概念是很清楚的。

考虑应变的分配关系时,先考虑骨架应变与总应变的关系,骨架本身包括了固体材料(颗粒)与孔隙空间。如果流体与固体材料没有相对运动,或不排水,那么总的应变等于固体材料的应变与流体的应变之和,而流体的应变大小等于孔隙空间的应变大小。这意味着总应变与骨架的应变是相等的。

$$\begin{cases}\varepsilon = \varepsilon_s+\varepsilon_f \\ \varepsilon = \varepsilon_b\end{cases} \tag{16}$$

式(16)在不排水条件下是普遍成立的。用体积的形式表示式(16)第一式的 ε_s

$$\varepsilon = (1-\varphi)\Delta V_s/V_s+\varepsilon_f \tag{17}$$

由固相材料的胡克定理得

$$\varepsilon = (1-\varphi)(P_{ss}+P_{sf})/(-K_s)+\varepsilon_f \tag{18}$$

以上应力-应变关系是在不排水条件下成立的。如果粒间应力 P_{ss} 为 0(例如,悬液颗粒间传递的应力为 0),根据式(13)得:$\sigma=(1-\varphi)P_{sf}=\varphi P_f$ 或 $\sigma=\sigma_{sf}=\sigma_f$。此时的 σ_{sf} 就是式(2)中的 σ_s。再将 $P_{ss}=0$ 代入式(18),得 $\varepsilon=\varepsilon_s+\varepsilon_f$。这就得到了式(2)的串联模式。如果颗粒是不可压缩的(K_s 无穷大),根据式(18),联合式(16)得:$\varepsilon=\varepsilon_b=\varepsilon_f$,又根据普遍成立的式(10),得到了式(4)的并联模式。

这样由式(10)及式(16)这两个不排水条件下成立的应力-应变表达式,将串联与并联模式统一起来。这说明了为什么串联模式 $K_b=0$(等价于 $P_{ss}=0$)的特例,以及并联模式的体积模量是式(8)中 c_s 为 0 的特例。

3 结　语

(1)饱和土体中的串联与并联弹性力学模型,与 Biot-Geertsma 理论中弹性体积模量的理论是一致的,且分别是该理论中弹性模量在骨架弹性模量为零和颗粒弹性压缩系数为零的两个特例。有效应力的概念虽然复杂,但是对饱和土体而言,仍然比较简单。“粒间应力”概念的意义在于它区分了骨架中的应力(有效应力)、固体材料(或颗粒)中的应力。

(2)土体的弹性参数是地震反应分析计算的基础参数[5-6],因此理论分析土体弹性特性与土工特性之间的关系是非常有意义的。从本文的讨论中可以看出:如果需要对不同的饱和土体选用不同的模式,直接的选择原则是看土体骨架压缩系数与土体颗粒压缩系数的相对大小程度。而文献[2]所提出的用孔隙率的原则是间接的或经验的原则。

参考文献:

References:

[1] 门福录.波在饱含流体的孔隙介质中的传播问题[J].地球物理学报,1981,24(1):65-76.
MEN Fu-lu. Wave propagation in a porous, saturated elastic medium[J]. Chinese Journal of Geophysics, 1981, 24(1): 65-76.

[2] 陈龙珠,吴世明. 海底沉积物结构影响声速的理论探讨[J].海洋学报,1988,10(3):368-373.
CHEN Long-zhu, WU Shi-ming. Discuss of sonic velocity theory about ocean floor deposit structural effects[J]. Acta Oceanologica Sinica, 1988, 10(3): 368-373.

[3] Geertsma J, Smit D C. Some aspects of elastic wave propagation in fluid-saturated porous solids[J]. Geophysics, 1961, 26: 168-181.

[4] 沈珠江.关于固结理论和有效应力的讨论[J]. 岩土工程学报,1995,17(6):118-119.
SHEN Zhu-jiang. Discussion on consolidation theory and effective stress[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1995, 17(6): 118-119.

[5] 王春玲,黄　义,张为民. 指数函数剪切模量的成层土地震反应解析解[J]. 长安大学学报:自然科学版,2003,23(4):15-17.
WANG Chun-ling, HUANG Yi, ZHANG Wei-min. General solution to earthquake response of stratified foundations with exponential function shear modulus [J]. Journal of Chang'an University: Natural Science Edition, 2003, 23(4): 15-17.

[6] 王铁行,赵树德. 非饱和土气态水迁移引起的含水量变化方程[J]. 中国公路学报,2003,16(2):18-21.
WANG Tie-hang, ZHAO Shu-de. Equation for vaporous waterous transfer in unsaturated soil[J]. China Journal of Highway and Transport, 2003, 16(2): 18-21.