

文章编号:1671-8879(2006)01-0108-03

矩阵指数函数的一种计算

张俊祖, 姜根明, 冯复科

(长安大学 理学院, 西安 710064)

摘 要:将矩阵指数函数的幂级数展开式表示为一个矩阵多项式形式,给出矩阵指数函数的一个有限展开式,通过矩阵特征值及矩阵指数函数的有限展开式的各阶导数,构造出一个线性方程组,用解线性方程组的方法给出该矩阵多项式的系数计算。从而给出了用求解线性方程组的方法计算矩阵指数函数 e^A 及 e^{At} 。

关键词:矩阵指数函数; 矩阵序列; 矩阵幂级数; 特征值

中图分类号:O151.21

文献标识码:A

A Computation Method of Matrix Exponent Function

ZHANG Jun-zu, JIANG Gen-ming, FENG Fu-ke

(School of Science, Chang'an University, Xi'an 710064, China)

Abstract: This paper expresses an expansion formula of exponential progression of matrix exponent function as a form of matrix polynomial, and gives a finite expansion formula of matrix exponent function. The linear equations are constructed with eigenvalue of matrix and various rank differential coefficient of finite expansion formula of matrix exponent function. The coefficient calculation of the matrix polynomial is presented by using the method of solving linear equations. A method of solving linear equations is put forward to compute such matrix exponent function as e^A and e^{At} . 6 refs.

Key words: exponent function of matrix; sequence of matrix; power series of matrix; eigenvalue

0 引言

在矩阵理论中,矩阵指数函数 e^A, e^{At} 是一类重要的矩阵函数。计算 e^A, e^{At} 的一般方法是用 Lagrange-Sylvester 定理及 Laplace 变换^[1-2], 这些方法计算较为繁琐。文献[3]给出了矩阵指数函数的一些重要性质;文献[4]将矩阵指数函数 e^A 表示为微分方程组的解,进而给出矩阵指数函数计算的微分方程法;文献[5]给出了矩阵指数函数计算的精细积分方法;文献[6]对该方法进行了进一步改进。本

文首先给出 e^A 及 e^{At} 的一种有限表示形式,进而给出表示式系数的一种简便计算,即用解线性方程组的方法计算 e^A 及 e^{At} 。

1 矩阵指数函数的有关概念

定义 1 设 $\{A_k\}$ 是矩阵空间 $C^{n \times n}$ 中的无穷矩阵序列, $a_{ij}^{(k)}$ 表示矩阵 A_k 的元素,如果存在矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 使得 $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{ij}^{(k)} = a_{ij} (i, j = 1, 2, \dots, n)$, 则称矩阵序列 $\{A_k\}$ 收敛于矩阵 A ^[1]。

定义 2 设 $\{A_k\}$ 是矩阵空间 $C^{n \times n}$ 中的无穷矩

收稿日期:2005-03-05

基金项目:国家自然科学基金项目(40201033)

作者简介:张俊祖(1961-),男,陕西户县人,副教授。

阵序列,则称 $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$ 为由 $\{A_k\}$ 生成的无穷级数。记

$\sum_{k=0}^m A_k = S_m$,若矩阵序列 $\{S_m\}$ 收敛,则称矩阵级数 $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$ 收敛,否则称之为发散^[1]。

定义3 设 $A \in C^{n \times n}$,则称 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$ 为矩阵 A 的幂级数^[1]。

引理1 设 $A \in C^{n \times n}$,则含有参数 t 的矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$ 收敛^[1]。记 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = e^{At}$,特别当 $t = 1$ 时, $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = e^A$ 。

引理2 设 $A \in C^{n \times n}$,则有 $A^k = a_0^{(k)} E + a_1^{(k)} A + a_2^{(k)} A^2 + \cdots + a_{n-1}^{(k)} A^{n-1}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$),其中 $a_0^{(k)}, a_1^{(k)}, \dots, a_{n-1}^{(k)}$ 是由矩阵 A 及数 k 所确定的^[2]。

证明 设 n 阶方阵 A 的特征多项式为 $f(\lambda) = b_0 + b_1 \lambda + b_2 \lambda^2 + \cdots + b_{n-1} \lambda^{n-1} + b_n \lambda^n$,由带余除法得 $\lambda^k = f(\lambda) p(\lambda) + r_k(\lambda)$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$)

(1)

记 $r_k(\lambda) = a_0^{(k)} + a_1^{(k)} \lambda + a_2^{(k)} \lambda^2 + \cdots + a_{n-1}^{(k)} \lambda^{n-1}$ (2) 当 $k < n$ 时, $p(\lambda) = 0$; 当 $k \geq n$ 时, $r_k(\lambda)$ 是次数低于 n 的多项式。

由 Hamilton-Cayley 定理^[1] $f(A) = 0$, 所以

$$A^k = r_k(A) = a_0^{(k)} E + a_1^{(k)} A + a_2^{(k)} A^2 + \cdots + a_{n-1}^{(k)} A^{n-1} \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (3)$$

2 矩阵指数函数的有限表示及计算

定理1 设 $A \in C^{n \times n}$,则 A 的指数矩阵可表示为

$$e^A = a_0 E + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_{n-1} A^{n-1} \quad (4)$$

式中: $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ 是由矩阵 A 确定的。

证明 因为 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ 及 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_i^{(k)}}{k!}$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$) 1) 收敛,其和为 e^A 及 a_i ,式(3)两边同乘以 $1/k!$,并相加得

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_0^{(k)}}{k!} \right) E + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_1^{(k)}}{k!} \right) A + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_2^{(k)}}{k!} \right) A^2 + \cdots + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{n-1}^{(k)}}{k!} \right) A^{n-1}$$

所以 $e^A = a_0 E + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_{n-1} A^{n-1}$

定理2 设 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 是 n 阶方阵 A 的 n 个不同的特征值,则式(4)中的 a_0, a_1, \dots, a_{n-1} 可由方程组(5)确定为

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 & \cdots & \lambda_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} \\ e^{\lambda_2} \\ e^{\lambda_3} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n} \end{bmatrix} \quad (5)$$

证明 由于 λ_1 是特征多项式 $f(\lambda)$ 的根,将 λ_1 代入式(1)得

$$\lambda_1^k = r_k(\lambda_1) = a_0^{(k)} + a_1^{(k)} \lambda_1 + a_2^{(k)} \lambda_1^2 + \cdots + a_{n-1}^{(k)} \lambda_1^{n-1} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1) \quad (6)$$

又 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^k}{k!} = e^{\lambda_1}$, $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_i^{(k)}}{k!}$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n-1$) 收敛且和为 a_i ,式(6)两边同乘以 $1/k!$,并相加得

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^k}{k!} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_0^{(k)}}{k!} \right) + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_1^{(k)}}{k!} \right) \lambda_1 + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_2^{(k)}}{k!} \right) \lambda_1^2 + \cdots + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{n-1}^{(k)}}{k!} \right) \lambda_1^{n-1}$$

所以 $e^{\lambda_1} = a_0 + a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_1^2 + \cdots + a_{n-1} \lambda_1^{n-1}$

对于 $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ 可得同样结果,从而可得式(5)。

由于方程组(5)的系数行列式为范德蒙行列式, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 互不相等,所以式(5)的系数行列式不等于0, $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ 有惟一解,证明完毕。

定理3 设 A 为 n 阶方阵, λ_i 是 A 的 s 重特征值,则可得 s 个方程

$$\begin{cases} e^{\lambda_i} = a_0 + a_1 \lambda_i + a_2 \lambda_i^2 + \cdots + a_{n-1} \lambda_i^{n-1} \\ e^{\lambda_i} = a_1 + 2a_2 \lambda_i + 3a_3 \lambda_i^2 + \cdots + (n-1) a_{n-1} \lambda_i^{n-2} \\ e^{\lambda_i} = 2a_2 + 3 \times 2a_3 \lambda_i + 4 \times 3a_4 \lambda_i^2 + \cdots \\ \quad (n-1)(n-2) a_{n-1} \lambda_i^{n-3} \\ \vdots \\ e^{\lambda_i} = (s-1)! a_{n-1} + s(s-1) \cdots 3 \times 2a_2 \lambda_i + \cdots + (n-1)(n-2) \cdots (n-s+1) a_{n-1} \lambda_i^{n-s} \end{cases} \quad (7)$$

式(7)中的后 $s-1$ 个方程是 $e^{\lambda_i} = a_0 + a_1 \lambda_i + a_2 \lambda_i^2 + \cdots + a_{n-1} \lambda_i^{n-1}$,两边对 λ 求 m 阶($m = 1, 2, \dots, s-1$) 导数后,将 λ 用 λ_i 代换所得。对于每个特征值可以得到与它的重数相同个数的方程,这样共可得到 n 个方程,而 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ 是由该方程组确定的。

证明 式(1)两边对 λ 求 m 阶导数($1 \leq m < s$) 当 $k < m$ 时,式(1)两边的 m 阶导数等于0;当 $k \geq m$ 时,由于 λ_i 是 $f(x)$ 的 s 重根,所以 $\lambda = \lambda_i$ 时, $f(\lambda) p(\lambda)$ 的 m 阶导数等于0,从而有

$$\begin{aligned} k(k-1) \cdots (k-m+1) \lambda_i^{k-m} &= m! a_m^{(k)} + \\ (m+1)m \cdots 3 \times 2 a_{m+1}^{(k)} \lambda_i &+ \cdots + \\ (n-2)(n-3) \cdots (n-m-1) a_{n-m}^{(k)} \lambda_i^{n-m-2} &+ \end{aligned}$$

$$(n-1)(n-2)\cdots(n-m)a_{n-1}\lambda_1^{n-m-1}$$

与定理 1 的证明类似可得

$$\sum_{k=m}^{\infty} \frac{k(k-1)\cdots(k-m+1)}{k!} \lambda_1^{k-m} = m! \left(\sum_{k=m}^{\infty} \frac{a_m^{(k)}}{k!} \right) +$$

$$(m+1)m\cdots 3 \times 2 \left(\sum_{k=m}^{\infty} \frac{a_{m+1}^{(k)}}{k!} \right) \lambda_1 + \cdots +$$

$$(n-2)(n-3)\cdots(n-m-1) \left(\sum_{k=m}^{\infty} \frac{a_{n-2}^{(k)}}{k!} \right) \lambda_1^{n-m-2} +$$

$$(n-1)(n-2)\cdots(n-m) \left(\sum_{k=m}^{\infty} \frac{a_{n-1}^{(k)}}{k!} \right) \lambda_1^{n-m-1}$$

由式(1)、式(2)可知,当 $k=0,1,2,\cdots,m-1$ 时,

$$\frac{a_m^{(k)}}{k!}, \frac{a_{m+1}^{(k)}}{k!}, \cdots, \frac{a_{n-2}^{(k)}}{k!}, \frac{a_{n-1}^{(k)}}{k!} \text{ 全为 } 0, \text{ 又 } \sum_{k=m}^{\infty} \frac{a_i^{(k)}}{k!} = a_i,$$

$i=m, m+1, \cdots, n-1$, 所以

$$e^{\lambda_1} = m! a_m + (m+1)m\cdots 3 \times 2 a_{m+1} \lambda_1 + \cdots +$$

$$(n-2)(n-3)\cdots(n-m-1) a_{n-2} \lambda_1^{n-m-2} +$$

$$(n-1)(n-2)\cdots(n-m) a_{n-1} \lambda_1^{n-m-1}$$

上式即为 $e^{\lambda} = a_0 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + \cdots + a_{n-1} \lambda^{n-1}$ 两边对 λ 求 m 阶导数并以 λ_1 代换所得。

当 $m=1, 2, \cdots, s-1$ 时, 可得式(7)的后面 $s-1$ 个方程, 而式(7)的第一个方程已在定理 2 中给出, 证明完毕。

对于每个特征值 λ_i 都有与其重数相同个数的方程, 这样共可得到 n 个方程, 这 n 个方程所组成的方程组系数行列式不为 0, 所以 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$ 有惟一解。

定理 4 当 $t=0$ 时, $e^{At} = E$, 当 $t \neq 0$ 时, 只要将式(5)或式(7)中 A 的特征值 λ_i 用 $t\lambda_i$ 代替即可得到 e^{At} 的表达式,

$$e^{At} = a_0 E + a_1 t A + a_2 t^2 A^2 + \cdots + a_{n-1} t^{n-1} A^{n-1}$$

3 算 例

例 设 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$, 计算 e^{At} 和 e^A

解 A 的特征多项式 $f(\lambda) = -(\lambda-2)^3$, 特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$, 将 $\lambda = 2t$ 代入式(7), 有

$$\begin{cases} e^{2t} = a_0 + a_1 2t + a_2 (2t)^2 \\ e^{2t} = a_1 + 2a_2 2t \\ e^{2t} = 2a_2 \end{cases}$$

$$\text{得 } a_2 = \frac{1}{2} e^{2t}, a_1 = (1-2t)e^{2t}, a_0 = (2t^2 - 2t + 1)e^{2t}$$

$$\text{所以 } e^A = a_0 E + a_1 A + a_2 A^2 = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1-t & t \\ t & -t & 1+t \end{bmatrix}$$

$$e^A = e^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \text{ 与其他算法计算结果一致}$$

4 结 语

本文给出的矩阵指数函数计算的特征值、线性方程组算法, 由于所构造的线性方程组其系数矩阵是满秩的, 从而所构造线性方程组的解是惟一的。该计算方法简便, 可操作性强。

参考文献:

References:

- [1] 王耕群, 史荣昌. 矩阵理论[M]. 北京: 国防工业出版社, 1988.
- [2] 王耕群, 史荣昌. 矩阵理论[M]. 北京: 国防工业出版社, 1988.
- [3] 蒋正新, 施国梁. 矩阵理论及其应用[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 1988.
- [4] 蒋正新, 施国梁. 矩阵理论及其应用[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 1988.
- [5] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [6] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [7] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [8] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [9] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [10] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [11] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [12] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [13] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [14] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [15] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [16] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [17] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [18] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [19] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [20] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [21] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [22] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [23] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [24] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [25] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [26] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [27] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [28] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [29] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [30] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [31] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [32] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [33] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [34] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [35] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [36] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [37] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [38] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [39] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [40] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [41] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [42] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [43] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [44] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [45] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [46] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [47] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [48] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [49] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [50] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [51] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [52] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [53] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [54] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [55] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [56] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [57] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [58] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [59] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [60] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [61] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [62] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [63] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [64] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [65] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [66] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [67] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [68] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [69] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [70] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [71] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [72] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [73] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [74] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [75] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [76] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [77] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [78] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [79] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [80] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [81] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [82] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [83] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [84] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [85] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [86] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [87] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [88] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [89] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [90] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [91] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [92] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [93] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [94] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [95] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [96] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [97] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [98] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [99] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.
- [100] 黄承绪. 矩阵指数函数的一些性质[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2001, 25(2): 147-149.