

一类静态梁方程的非负解与非正解

宋灵宇^{1,2}, 李晓莉²

(1. 西安交通大学 理学院, 陕西 西安 710049; 2. 长安大学 理学院, 陕西 西安 710064)

摘 要:运用 Leray-Schauder 拓扑度理论,证明了带导数项的一端简单支撑另一端滑动的静态梁方程的可解性,得出了非负解与非正解存在的判据,仅要求非线性项 f 在原点的 1 个邻域满足一定的符号条件,突破了以往对非线性项 f 的增长性限制。所获结果对工程设计及相关数值计算具有重要的理论意义和实用价值。

关键词:四阶边值问题;正解;存在性;不动点

中图分类号:O189 **文献标识码:**A

Nonegative and nonpositive solutions of an equation as sociated with an elastic beam

SONG Ling-yu^{1,2}, LI Xiao-li²

(1. School of Science, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China;

2. School of Science, Chang'an University, Xi'an 710064, China)

Abstract: The existence of nonegative and nonpositive solutions for a nonlinear elastic beam equation is discussed with derivative arguments. The existence results without any growth restriction on f are obtained. Here only the condition is required that nonlinear function f satisfies certain sign conditions for a neighborhood of origin of coordinates, which breaks through previous growth restrictions on f . 6 refs.

Key words: fourth-order boundary value problem; positive solution; existence; fixed point

0 引 言

弹性梁是工程建筑的基本构件,关于线性弹性梁方程可解性的研究,是由 Usmani^[1] 首先开始的,此后关于非线性弹性梁方程的可解性及正解的存在性,出现过一些结果^[2~5],但这些结果均依赖于对非线性项 f 的增长性假设,从而在应用上存在很大的局限。本文借鉴文献[6]的方法,在 f 增长不受控制的前提下,给出了一端简单支撑另一端滑动的静态梁方程

$$y^{(4)} = f(x, y, y', y'', y''') \quad x \in [0, 1] \quad (1)$$

$$y(0) = y'(0) = y'(1) = y''(1) = 0 \quad (2)$$

非负解与非正解存在的判据。所获结果对工程设计及相关数值计算具有重要的指导作用。

1 主要结果

我们得到定解问题(1)、(2) 非负解存在的判据为:

定理 1 $b > 0$, 如果假设

$$A_1) \quad f(x, y, z, w, 0) \geq 0, \quad (x, y, z, w) \in [0, 1] \times [0, b] \times [0, b] \times [-b, 0];$$

$$A_2) \quad f(x, y, z, w, -b) \leq 0, \quad (x, y, z, w) \in [0, 1] \times [0, b] \times [0, b] \times [-b, 0].$$

则问题(1)、(2) 有解 y , 满足 $0 \leq y \leq b, 0 \leq y' \leq b, -b \leq y'' \leq 0, -b \leq y''' \leq 0$ 。

定解问题(1)、(2)非正解存在的判据为:

定理 2 $b > 0$, 如果假设

$A_3)$ $f(x, y, z, w, 0) \leq 0, (x, y, z, w) \in [0, 1] \times [-b, 0] \times [-b, 0] \times [0, b];$

$A_4)$ $f(x, y, z, w, b) \geq 0, (x, y, z, w) \in [0, 1] \times [-b, 0] \times [-b, 0] \times [0, b].$

则问题(1)、(2)有解 y , 满足 $-b \leq y \leq 0, -b \leq y' \leq 0, 0 \leq y'' \leq b, 0 \leq y''' \leq b$.

2 定理的证明

要证定理, 需要下面的引理.

引理 设 $\Omega \subset X$ 是有界开集, $0 \in \Omega$. 若 $\lambda \in (0, 1), y \in \bar{\Omega}$ 满足边值问题

$$\begin{aligned} y^{(4)} &= \lambda f(x, y, y', y'', y''') \quad x \in [0, 1] \\ y(0) &= y''(0) = y'(1) = y'''(1) = 0 \end{aligned}$$

时必有 $y \in \Omega$, 则问题(1)、(2)必有解 $y \in \bar{\Omega}$.

它是 Leray-Schauder 拓扑度理论的直接推论.

2.1 定理 1 的证明

设 $X = \{y \in C^3[0, 1] \mid y(0) = y''(0) = y'(1) = y'''(1) = 0\}$, 在 X 中采用范数 $|y|_X = \max\{|y|_0, |y'|_0, |y''|_0, |y'''|_0\}$. 其中 $|\cdot|_0$ 记通常的 sup 范数.

据 Urysohn 引理, 存在 $\varphi \in C(R^4, [-1, 1])$, 使 $\varphi([0, b] \times [0, b] \times [-b, 0] \times \{0\}) = 1$, $\varphi([0, b] \times [0, b] \times [-b, 0] \times \{-b\}) = -1$

令 $f_n(x, y, z, w, s) = f(x, y, z, w, s) + n^{-1}\varphi(y, z, w, s), n = 1, 2, \dots$.

结合条件 $A_1), A_2)$ 知

$$\begin{aligned} f_n(x, y, z, w, 0) &> 0, \\ (x, y, z, w) &\in [0, 1] \times [0, b] \times [0, b] \times [-b, 0] \\ f_n(x, y, z, w, -b) &< 0, \\ (x, y, z, w) &\in [0, 1] \times [0, b] \times [0, b] \times [-b, 0] \end{aligned}$$

取 $\epsilon_n \in (0, 1)$, 使得

$$f_n(x, y, z, w, s) > 0, (x, y, z, w, s) \in [0, 1] \times [-\epsilon_n, b] \times [-\epsilon_n, b] \times [-b, \epsilon_n] \times [0, \epsilon_n] \quad (3)$$

$$f_n(x, y, z, w, -b) < 0, (x, y, z, w) \in [0, 1] \times [-\epsilon_n, b] \times [-\epsilon_n, b] \times [-b, \epsilon_n] \quad (4)$$

令 $\Omega_n = \{y \in X \mid -\epsilon_n < y < b, -\epsilon_n < y' < b, -b < y'' < \epsilon_n, -b < y''' < \epsilon_n\}$

如果能证得方程

$$y^{(4)} = f_n(x, y, y', y'', y'''), x \in [0, 1] \quad (5)$$

有解 $y_n \in \bar{\Omega}_n$ 且 y_n 满足 $y_n(x) \geq 0, y'_n(x) \geq 0, y''_n(x) \leq 0, y'''_n(x) \leq 0 (\forall x \in [0, 1])$, 由 $\{y_n^{(j)} \mid j = 0, 1, 2, 3, 4; n = 1, 2, \dots\}$ 一致有界与 Arzela-Ascoli

定理就能推出, $\{y_n\}$ 有子列在 X 中收敛于某个 y , 这个 y 即为问题(1)、(2)的合乎定理 1 要求的解. 而要证式(5)有解 $y_n \in \bar{\Omega}_n$ 且 $y_n \geq 0, y'_n \geq 0, y''_n \leq 0, y'''_n \leq 0$, 根据引理只需证: 如果 $\lambda \in (0, 1), y \in X$ 满足

$$y^{(4)} = \lambda f_n(x, y, y', y'', y'''), x \in [0, 1] \quad (6)$$

$$\begin{aligned} -\epsilon_n &\leq y \leq b, \quad -\epsilon_n \leq y' \leq b, \\ -b &\leq y'' \leq \epsilon_n, \quad -b \leq y''' \leq \epsilon_n \end{aligned} \quad (7)$$

则有

$$\begin{aligned} 0 &\leq y < b, \quad 0 \leq y' < b, \\ -b &< y'' \leq 0, \quad -b < y''' \leq 0 \end{aligned} \quad (8)$$

即 $y \in \Omega$ 且 $y \geq 0, y' \geq 0, y'' \leq 0, y''' \leq 0$.

取定 1 个满足式(6)、式(7)的 $y \in X$, 下面证 y 满足式(8).

(I) 证 $-b < y''' \leq 0$ 于 $[0, 1]$.

先证 $y''' \leq 0$ 于 $[0, 1]$.

因 $y'''(1) = 0$, 由式(7)、式(6)及式(3)推知 $y^{(4)}(1) > 0$. 再结合 $y'''(1) = 0$ 又可推知: 存在 $d \in [0, 1)$ 使 $y''' < 0$ 于 $(d, 1)$. 设 $(d, 1)$ 为 $(0, 1)$ 中使 $y''' < 0$ 的最右边的那个极大子区间, 下证 $d = 0$. 反设 $d > 0$, 因为 $(d, 1)$ 为极大子区间, 所以 $y'''(d) = 0$. 由式(7)、式(6)及式(3)推知 $y^{(4)}(d) > 0$. 由此推出: 存在 $e \in [0, d)$ 使 $y''' < 0$ 于 (e, d) . 从而 d 是 y''' 的 1 个极大点, 由此推知 $y^{(4)}(d) = 0$ 矛盾! 于是 $y''' < 0$ 于 $(0, 1)$.

再证 $y''' > -b$ 于 $[0, 1]$.

反设存在 $x_0 \in [0, 1]$ 使 $y'''(x_0) = -b$. 由 $y'''(1) = 0$ 知, $x_0 \neq 1$. 结合式(7)、式(6)及式(4)推知 $y^{(4)}(x_0) < 0$. 由此推知: 存在 $\delta > 0$ 使 y''' 在 $(x_0, x_0 + \delta)$ 上严格递减, 进而 $y''' < -b$ 于 $(x_0, x_0 + \delta)$, 与式(7)矛盾.

由上面的推理可知, $-b < y''' \leq 0$ 于 $[0, 1]$.

(II) 证 $-b < y'' \leq 0$ 于 $[0, 1]$.

由(I)知, $-b < y''' \leq 0$ 于 $[0, 1]$. 利用 $y''(0) = 0$ 有 $y''(x) = \int_0^x y'''(s) ds$. 因此 $-b \leq -bx < y''(x) \leq 0, x \in (0, 1]$.

(III) 证 $0 \leq y' < b$ 于 $[0, 1]$.

由(II)知, $-b < y'' \leq 0$ 于 $[0, 1]$. 利用 $y'(1) = 0$ 有 $y'(x) = \int_1^x y''(s) ds = \int_x^1 -y''(s) ds$. 于是, 当 $x \in [0, 1)$ 时有 $0 \leq y'(x) < b(1-x) \leq b$.

(IV) 证 $0 \leq y < b$ 于 $[0, 1]$.

由(III)知, $0 \leq y' < b$ 于 $[0, 1]$. 利用 $y(0) = 0$

有 $y(x) = \int_0^x y'(s) ds$. 因此 $0 \leq y(x) < bx \leq b, x \in (0, 1]$.

综合 (I) ~ (IV), y 满足式 (8).

2.2 定理 2 的证明

定理 2 的证明同定理 1 的证明.

3 结 语

本文给出了四阶两点边值问题 (1)、(2) 非负解与非正解存在的判据, 我们仅要求非线性项 f 在原点的 1 个邻域满足一定的符号条件, 突破了以往对非线性项 f 的增长性限制, 其结果在建筑工程中具有重要的应用价值.

参考文献:

References:

- [1] USMANI R A. A uniqueness theorem for a boundary

value problems [J]. Proc Amer Math Soc, 1979, 77: 327-335.

- [2] MA Ru-yun. The method of lower and upper solutions for fourth-order two-point boundary value problems [J]. J Math Anal Appl, 1997, 215: 415-422.
- [3] Gupta C P. Existence and uniqueness theorems for some fourth order fully quasilinear boundary value problems [J]. App Anal, 1990, 36: 157-169.
- [4] Gupta C P. Existence and uniqueness theorems for the bending of an elastic beam equation [J]. Appl Anal, 1988, 26: 289-304.
- [5] MA Ru-yun, WANG Hai-yan. On the existence of positive solutions of fourth order ODE [J]. Appl Anal, 1995, 59: 225-231.
- [6] Armando Rodriguez, Antonio Tineo. Existence theorems for the dirichlet problem without growth restrictions [J]. Math Anal Appl, 1988, 135: 1-7.

(上接 123 页)

使得 $(S^\circ, \lambda^\circ, y^\circ)$ 是 (VD) 的可行解. 进一步, 如果 (VP) 和 (VD) 的弱对偶定理成立, 则 $(S^\circ, \lambda^\circ, y^\circ)$ 是 (VD) 的弱有效解.

证明 根据引理 1, 存在 $\lambda^\circ \geq 0, \sum_{i=1}^p \lambda_i^\circ = 1, y^\circ \geq 0$, 使得式 (4)、式 (5) 成立. 因而, $(S^\circ, \lambda^\circ, y^\circ)$ 满足式 (1)、式 (2)、式 (3). 因此, $(S^\circ, \lambda^\circ, y^\circ)$ 是 (VD) 的可行解.

如果 $(S^\circ, \lambda^\circ, y^\circ)$ 不是 (VD) 的弱有效解, 则存在 (VD) 的可行解 (T, λ, y) , 使得 $F(S^\circ) < F(T)$, 这与弱对偶结果 (定理 1 ~ 定理 3) 矛盾. 因此, $(S^\circ, \lambda^\circ, y^\circ)$ 是 (VD) 的弱有效解.

参考文献:

References:

- [1] Morris R J T. Optimal constrained selection of a measurable subset [J]. JMAA, 1979, 70(2): 546-562.
- [2] Zalmai G J. Sufficiency criteria and duality for nonlinear programs involving n-set functions [J]. JMAA,

1990, 149(1): 322-338.

- [3] Bector C R. Efficiency and duality for nonlinear multiobjective programming involving n-set functions [J]. JMMA, 1994, 182(2): 486-500.
- [4] Bector C R, Singh M. Duality for multiobjective b-vex programming involving n-set functions [J]. JMAA, 1996, 202(3): 701-726.
- [5] Gorley H W. Optimization theory for n-set functions [J]. JMAA, 1987, 127(1): 193-205.
- [6] Zalmai G J. Optimality conditions and duality for multiobjective measurable subset selection problems [J]. Optimization, 1991, 2(1): 221-238.
- [7] Vasile P. On duality of multiobjective fractional measurable subset selection problems [J]. JMAA, 1995, 196(2): 514-525.
- [8] 李晓莉. 具有广义凸的多目标规划 [J]. 长安大学学报 (自然科学版), 2003, 23(5): 120-122.
- LI Xiao-li. Multiobjective programming with generalized convexity [J]. Journal of Chang'an University (Natural Science Edition), 2003, 23(5): 120-122.