

# 非均质地基非线性地震反应的半解析算法

王春玲, 曹彩芹, 黄 义

(西安建筑科技大学 理学院, 陕西 西安 710055)

**摘 要:**运用动态应力-应变关系及其推广的 Masing 加卸载准则,考虑土体在地震等产生的不规则加载条件下的非线性滞回特征,将增量法与相应场地地震线性反应解析相结合,对剪切模量是其深度的某一幂函数的非均质地基,提出了该动力非线性方程的半解析时域算法。算例结果与其相应的线性结果对比,发现最大位移与最大加速度沿深度的变化规律基本相同。

**关键词:**岩土工程;非均质地基;本构关系;非线性;滞变;地震反应;半解析法

**中图分类号:**TU435 **文献标识码:**A

## Seimi-analytic method for nonlinear seismic response of vertically non-homogeneous foundations

WANG Chun-ling, CAO Cai-qin, HUANG Yi

(School of Science, Xi'an University of Architecture and Technology, Xi'an 710055, China)

**Abstract:** Dynamic constitutive relationship, together with the extended Masing's rules, is employed to account for nonlinear hysteretic property of soil material under transient or cyclic loadings. Incremental method and the general solution to linear seismic response of vertically non-homogeneous foundations with power function shear modulus are combined to develop a seimi-analytic calculating technique for dynamic nonlinear problem. The comparison results of the calculation examples indicate that this algorithm is rational and feasible. 2 figs, 6 refs.

**Key words:** geotechnical engineering; non-homogeneous foundations; constitutive relation; non-linear; hysteresis; seismic response; seimi-analytic method

## 0 引 言

震害调查与强震观测结果表明,局部地形条件与土质特性对于场地和建筑物的震害强度及损害程度具有明显的影响,因此合理地预测场地地震反应是结构及地基抗震设计的基本前提。另外,实验研究证实,在地震等瞬时或循环荷载作用下土的应力-应变关系除了对初时应力状态的紧密依赖之外,它呈现出强烈的非线性滞回特性。那么,切合实际的

场地动力分析方法必须能够有效地考虑土料如此复杂的本构性态。目前广泛流行的等价线性化法<sup>[1,2]</sup>无法准确地展现土壤非线性滞回性质对场地地震效应的实际影响。因此,基于动力应力-应变非线性滞回模型的所谓真非线性分析方法已逐步受到重视。

本文采用文献[1]所建议的改进非线性本构模型及其不规则受力情况的加卸准则<sup>[3]</sup>,把反应的时程划分为一些短时间增量区段,同时假定在每个增量区段内地基土的性质保持不变,对每个时段按线



性体系来计算其反应,这个线性体系的特性是时段开始时刻限定的特性,时段结束时的特性要按照那时体系的变形和应力状态来修正。利用时段结束时的特性作为下一个计算时间区间的特性及初始条件,从而可得到整个反应,再结合相应场地地震线性反应解析解,建立了求解土体动力非线性体系的半解析时域算法。

## 1 土料动力非线性滞回本构模型

### 1.1 规则加载情形

剪切动载作用下土料呈现出强烈的非线性滞回性质,随着应变幅值的增大,剪切刚度不断降低而阻尼比逐渐增高,目前常规动态试验直接提供的是动剪切模量  $G$  及等效阻尼比  $\xi_{eq}$  与循环应变  $\gamma$  大小之间的非线性依赖关系。而在实际中广泛应用的动态本构模型主要包括分别从经验与物理机制出发的 Masing 类与 Iwan 类模型<sup>[4]</sup>。但是这些解析模型与试验实测结果往往差异较大,对此许多学者提出了各自的修正方法<sup>[1,5]</sup>。其中文献[1]建议了一种构造实际的非线性滞回模型的半解析半离散方法,该方法即简便可行又符合实际,其主要思想是在某种解析模型中选定或引进 2 个依应变大小而取值的参变数,并由实测的  $G-\gamma$  与  $\xi_{eq}-\gamma$  样本曲线确定这些参数的变化规律,如以双曲线方程为例,骨干曲线方程可写成

$$\tau = G_{\max} \gamma / (\beta_1 + \bar{\beta}_2 |\gamma|) \quad (1)$$

其中,  $\beta_1$ 、 $\bar{\beta}_2$  为所引进的 2 个变动参数,注意此处的  $\bar{\beta}_2$  与文献[1]中  $\beta_2$  之间存在关系  $\bar{\beta}_2 = \beta_2 / \gamma_r$ 。

根据式(1),按照 Masing 准则可推导出割线剪切模量与等效阻尼比  $\xi_{eq}$  的理论算式,其中含有  $\beta_1$  与  $\bar{\beta}_2$ 。然后在同一应变  $\gamma_c$  大小下使  $G$  及  $\xi_{eq}$  的理论值分别与实测值相等,从而可得到与该应变幅  $\gamma_c$  相应的参数瞬时值  $\beta_1(\gamma_c)$  与  $\bar{\beta}_2(\gamma_c)$ ,如对于砂性土,按照 Seed 与 Idriss 所给出的统计平均曲线,等效参数  $G/G_{\max}$ 、 $\xi_{eq}$  与相应的  $\beta_1$ 、 $\bar{\beta}_2$ ,见文献[3]中的表 1。据此按式(1)所定义的解析曲线  $\tau^* = G_{\max} \gamma / [\beta_1(\gamma_c) + \bar{\beta}_2(\gamma_c) |\gamma|]$  称为瞬态虚拟骨干曲线,实际的骨干曲线是实测的  $G-\gamma$  关系按照  $\tau = G\gamma$  直接构造的。在循环应变幅度为  $\gamma_c$  的规则加卸载序列中,卸载与再加载分枝曲线方程分别为

$$\tau \mp \tau_c = (\gamma \mp \gamma_c) / [\beta_1(\gamma_c) + \bar{\beta}_2(\gamma_c) |(\gamma \mp \gamma_c)/2|] \quad (2)$$

### 1.2 不规则加载情形

上述非线性滞回本构模型并不适用于地震等所产生的不规则加载条件,为此必须对其加载准则加

以推广。参考现有的修正方案<sup>[3,4]</sup>,在计算中引入如下基本附加规则:①当卸荷或再加载曲线一旦与实际骨干曲线相遇时,则后继加载将沿着骨干曲线前进,这可谓之为“上骨干曲线”规则;②若卸荷载或再加载曲线一旦与前一个卸载或加载曲线、或者与历史上最大卸荷或加载曲线(即正负两向的外包络分支曲线)相遇,则要转而沿着这些滞回曲线前进,通称之为“上大圈”规则;③自实际骨干曲线上发生卸载或再加载过程时,所遵循的滞回分支曲线,将按照与卸荷或再加载初始时刻的应变  $\gamma_c$  幅值相应的机动参数值  $\beta_1(\gamma_c)$ 、 $\bar{\beta}_2(\gamma_c)$  所决定的虚拟骨干曲线来构造,并且直至加载曲线再次落到实际骨干曲线上时,  $\beta_1$ 、 $\bar{\beta}_2$  值才发生改变,其取值应与新的应变幅值相协调。

## 2 计算模型及算法

假定剪切模量是其深度的某一指数函数,即:  $G(z) = G_b(z/D)^m$ ,  $d \leq z \leq D$ ,其中  $G_b$  为底层土的平均剪切模量;  $m$  为非均匀分布指数,质量密度为  $\rho$ 。基岩面有一水平向地震运动,加速度为  $\ddot{u}(t)$ 。

若  $t_k$  时土层  $x$  向相对位移为  $V$ ,开始时( $t = t_1 = 0$ )各层位移、速度都为 0。 $t = t_k$  时各层阻尼、割线剪切模型增量分别为  $c(t_k)$ 、 $\Delta G(z, t_k)$ ,且  $\Delta G(z, t_k)$  沿层厚与  $G(z)$  有相同的函数形式,即:  $\Delta G(z, t_k) = \Delta G_b(t_k)(z/D)^m$ ,这里  $\Delta G_b$  为底层土的割线剪切模量增量,结合文献[6],得  $t_k \leq \xi \leq t_k + 2\Delta t$  时段内该问题的增量形式的波动方程为

$$\frac{\partial^2(\Delta V^{(k)})}{\partial \xi^2} + \frac{c(t_k)}{\rho} \frac{\partial(\Delta V^{(k)})}{\partial \xi} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \Delta G(z, t_k) \frac{\partial(\Delta V^{(k)})}{\partial z} \right] = -\ddot{u}(\xi) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \Delta G(z, t_k) \frac{\partial V(t_k)}{\partial z} \right] \quad (3)$$

边界条件为

$$\Delta V^{(k)} = 0 \quad (z = D), \quad \frac{\partial(\Delta V^{(k)})}{\partial z} = 0 \quad (z = d) \quad (4)$$

初始条件为

$$\xi = t_k, \Delta V^{(k)} = 0, \quad \frac{\partial(\Delta V^{(k)})}{\partial \xi} = \dot{V}(t_k) \quad (5)$$

这里

$$\Delta V^{(k)} = V(\xi) - V(t_k), \quad \Delta \ddot{u}(\xi) = \ddot{u}(\xi) - \ddot{u}(t_k) \quad (6)$$

对于真非线性计算,材料滞回阻尼直接隐含在恢复力一项中,因此方程(3)中的阻尼仅为粘性效应,系采用初始剪切模量  $G_{b\max}$  形成,  $c = 2\eta\omega\rho$ ,  $\eta$  通常约



取为2%,  $\omega$  为  $G_{b\max}$  对应的线性问题的基频。

显然式(3)~式(6)与文献[6]的线性问题类似,因此由文献[6]可设相对位移增量  $\Delta V^{(k)}$  为

$$\Delta V^{(k)}(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n^{(k)} T_n^{(k)}(\xi) \quad (7)$$

而  $v_n^{(k)}$  为与  $t = t_k$  时地基土的性质相应的线性问题的振型函数,即文献[6]

$$v_n^{(k)}(z) = z^{\frac{1-m}{2}} \{A_n^{(k)} J_q[2k_n^{(k)}(1-q)x] + B_n^{(k)} Y_q[2k_n^{(k)}(1-q)x]\}, d \leq z \leq D \quad (8)$$

其中,  $x = z^{1-\frac{m}{2}}$ ,  $q = (1-m)/(2-m)$ ,  $K_n^{(k)} = \omega_n D^{m/2}$ .

$$\sqrt{\frac{\rho}{G_b^{(k)}}}, \lambda = d/D, B_n^{(k)} = -J_q(a_n^{(k)})A_n^{(k)}/Y_q(a_n^{(k)}),$$

$$a_n^{(k)} = 2\omega_n D(1-q) \sqrt{\frac{\rho}{G_b^{(k)}}}, \text{最终由频率方程确定}$$

$$J_{q-1}(a_n^{(k)} \lambda^{1-m/2})Y_q(a_n^{(k)}) - Y_{q-1}(a_n^{(k)} \lambda^{1-m/2})J_q(a_n^{(k)}) = 0$$

那么

$$V(t_k) = V(t_1) + \sum_{i=1}^{k-1} \Delta V^{(i)}(t_{i+1}) = \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{n=1}^{\infty} v_n^{(i)} T_n^{(i)}(t_{i+1}) \quad (9)$$

将式(7)~式(9)代入式(3)得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \ddot{T}_n^{(k)}(\xi) + \frac{c(t_k)}{\rho} \dot{T}_n^{(k)}(\xi) + \omega_n^{2(k)} T_n^{(k)}(\xi) \right] v_n^{(k)} = -\ddot{u}(\xi) + \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{n=1}^{\infty} \Delta G(z, t_k) \frac{\partial^2 v_n^{(i)}}{\partial z^2} T_n^{(i)}(t_{i+1}) \quad (10)$$

给式(10)两边分别乘以  $v_m^{(k)} dz$ , 然后沿厚度积分, 利用  $v_n^{(k)}$  的正交条件<sup>[6]</sup>得

$$\ddot{T}_m^{(k)}(\xi) + \frac{c}{\rho} \dot{T}_m^{(k)}(\xi) + \omega_m^{2(k)} T_m^{(k)}(\xi) = f_m^{(k)}(\xi) \quad (11)$$

这里

$$f_m^{(k)}(\xi) \equiv -\eta_m^{(k)} \ddot{u}(\xi) + \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{n=1}^{\infty} T_n^{(i)}(t_{i+1}) \cdot$$

$$\int_0^h \Delta G(z, t_k) V_m^{(k)} \frac{\partial^2 v_n^{(i)}}{\partial z^2} dz$$

$$\eta_m^{(k)} = \int_0^h v_m^{(k)} dz / \int_0^h v_m^{2(k)} dz$$

类似地初始条件式(5)变成

$$\xi = t_k, T_m^{(k)}(t_k) = 0,$$

$$\dot{T}_m^{(k)}(t_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{T}_n^{(k-1)}(t_k) \int_0^h v_n^{(k-1)} v_m^{(k)} dz / \int_0^h v_m^{2(k)} dz$$

$$\ddot{T}_m^{(k)}(t_k) = f_m^{(k)}(t_k) - c/\rho \dot{T}_m^{(k)}(t_k)$$

用 Wilson- $\theta$  法求解式(11)得

$$\tilde{k}_m^{(k)} = \rho \omega_m^{2(k)} + a_0 \rho + a_1 c$$

$$\tilde{\Delta P}_m^{(k)} = -\eta_m^{(k)} \rho \Delta \ddot{u}(t_k) + \rho [2a_1 \dot{T}_m^{(k)}(t_k) + 3\ddot{T}_m^{(k)}(t_k)] + c [3\dot{T}_m^{(k)}(t_k) + a_3 \ddot{T}_m^{(k)}(t_k)]$$

$$\Delta T_m^{(k)}(t + \theta \Delta t) = \frac{\tilde{\Delta P}_m^{(k)}}{\tilde{k}_m^{(k)}}$$

$$\Delta \ddot{T}_m^{(k)}(t_{k+1}) = a_4 \Delta T_m^{(k)}(t + \theta \Delta t) + a_5 \dot{T}_m^{(k)}(t_k) + (a_6 - 1) \ddot{T}_m^{(k)}(t_k)$$

$$\Delta \dot{T}_m^{(k)}(t_{k+1}) = a_7 [2\ddot{T}_m^{(k)}(t_k) + \Delta \ddot{T}_m^{(k)}(t_{k+1})]$$

$$\Delta T_m^{(k)}(t_{k+1}) = \Delta t \dot{T}_m^{(k)}(t_k) + a_8 [3\ddot{T}_m^{(k)}(t_k) + \Delta \ddot{T}_m^{(k)}(t_{k+1})]$$

其中

$$a_0 = 6/(\theta \Delta t)^2, a_1 = 3/(\theta \Delta t), a_2 = 2a_1,$$

$$a_3 = \theta \Delta t/2, a_4 = a_0/\theta, a_5 = -a_2/\theta,$$

$$a_6 = 1 - 3/\theta, a_7 = \Delta t/2, a_8 = \Delta t^2/6$$

$$T_m^{(k)}(t_{k+1}) = \Delta T_m^{(k)}(t_{k+1})$$

$$\dot{T}_m^{(k)}(t_{k+1}) = \dot{T}_m^{(k)}(t_k) + \Delta \dot{T}_m^{(k)}(t_{k+1})$$

$$\ddot{T}_m^{(k)}(t_{k+1}) = f_m^{(k)}(t_{k+1}) - c/\rho \dot{T}_m^{(k)}(t_{k+1}) - \omega_m^{2(k)} T_m^{(k)}(t_{k+1})$$

于是剪应变增量  $\Delta \gamma^{(k)}$  为

$$\Delta \gamma^{(k)} = \frac{\partial}{\partial z} [\Delta V^{(k)}(t_{k+1})] = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\partial v_m^{(k)}}{\partial z} T_m^{(k)}(t_{k+1})$$

那么

$$\gamma(t_{k+1}) = \sum_{i=1}^k \Delta \gamma^{(i)}$$

类似地, 相对加速度反应值为

$$\ddot{V}(t_{k+1}) = \sum_{m=1}^{\infty} v_m^{(k)} \ddot{T}_m^{(k)}(t_{k+1}) \quad (\text{小阻尼})$$

根据以往加载历程以及当前估算的增量应变来综合判定  $t_k$  到  $t_{k+1}$  的真实加载路径, 然后结合文献[3]中的表1就可以求出  $t_{k+1}$  时相应的割线剪切模量增量  $\Delta G_b(t_{k+1})$ 。同理以  $t_{k+1}$  为起点, 以  $\Delta G_b(t_{k+1})$  为该时段  $\Delta t$  内的割线剪切模量增量, 又可求出  $t_{k+2} = t_{k+1} + \Delta t$  的反应值。再依次求  $t_{k+3}, t_{k+4}, \dots$ 。

判定真实加载路径, 通常包括以下几种情形:

(1)  $t_k$  时刻的应力、应变状态属于初始加载曲线上, 此时若估算的增量应变  $\Delta \gamma^{(k)}$  与  $t_k$  时刻真实应变  $\gamma_{t_k}$  具有相同符号, 即  $\gamma_{t_k} \Delta \gamma^{(k)} \geq 0$ , 则继续加载认为仍按骨干曲线沿相同方向前进; 反之若  $\gamma_{t_k} \Delta \gamma^{(k)} < 0$ , 则  $t_k$  到  $t_k + \Delta t$  时段内的加载路径将是在近似以  $(\gamma_{t_k}, \tau_{t_k})$  为转折点的卸载曲线上。

(2)  $t_k$  时刻的应力、应变状态属于最近转折点为



$(\gamma_{ct_k}, \tau_{ct_k})$  的卸载分支曲线上, 此时若  $(\gamma_{t_k} - \gamma_{ct_k})\Delta\gamma^{(k)} \geq 0$ , 则将继续沿着与  $t_k$  时刻相同的分支曲线发生卸载; 反之若有  $(\gamma_{t_k} - \gamma_{ct_k})\Delta\gamma^{(k)} < 0$ , 则反向加载发生, 此时所遵循的分支曲线将是  $(\gamma_{t_k}, \tau_{t_k})$  为新的往复点的再加荷方程。

(3)  $t_k$  时刻的应力、应变状态属于再加载曲线上, 继续的加荷路径可按情形(2)的类似方式决定。无论在何种情况, 都还应注意整个过程中不能违背前述准则的全部内容。

### 3 算 例

某地基土,  $\rho = 2 \text{ t} \cdot \text{m}^{-3}$ ,  $m = 1$ ,  $d = 20$ ,  $D = 50 \text{ m}$ ,  $G_b = 200 \text{ MPa}$ , 地基土的厚度  $h = 30 \text{ m}$ , 地基土的阻尼比为  $\eta = 0.02$ , 土料的  $G-\gamma$  与  $\xi_{eq}-\gamma$  关系采用 Seed-Idriss 给出的有关砂土平均曲线<sup>[3]</sup>。

基地输入一人工地震波, 利用上述数据, 算得地基非线性地震反应最大值如图 1 所示。图 2 给出线性情形下最大位移与最大加速度沿深度的变化规律, 对比发现其结果是合理的。

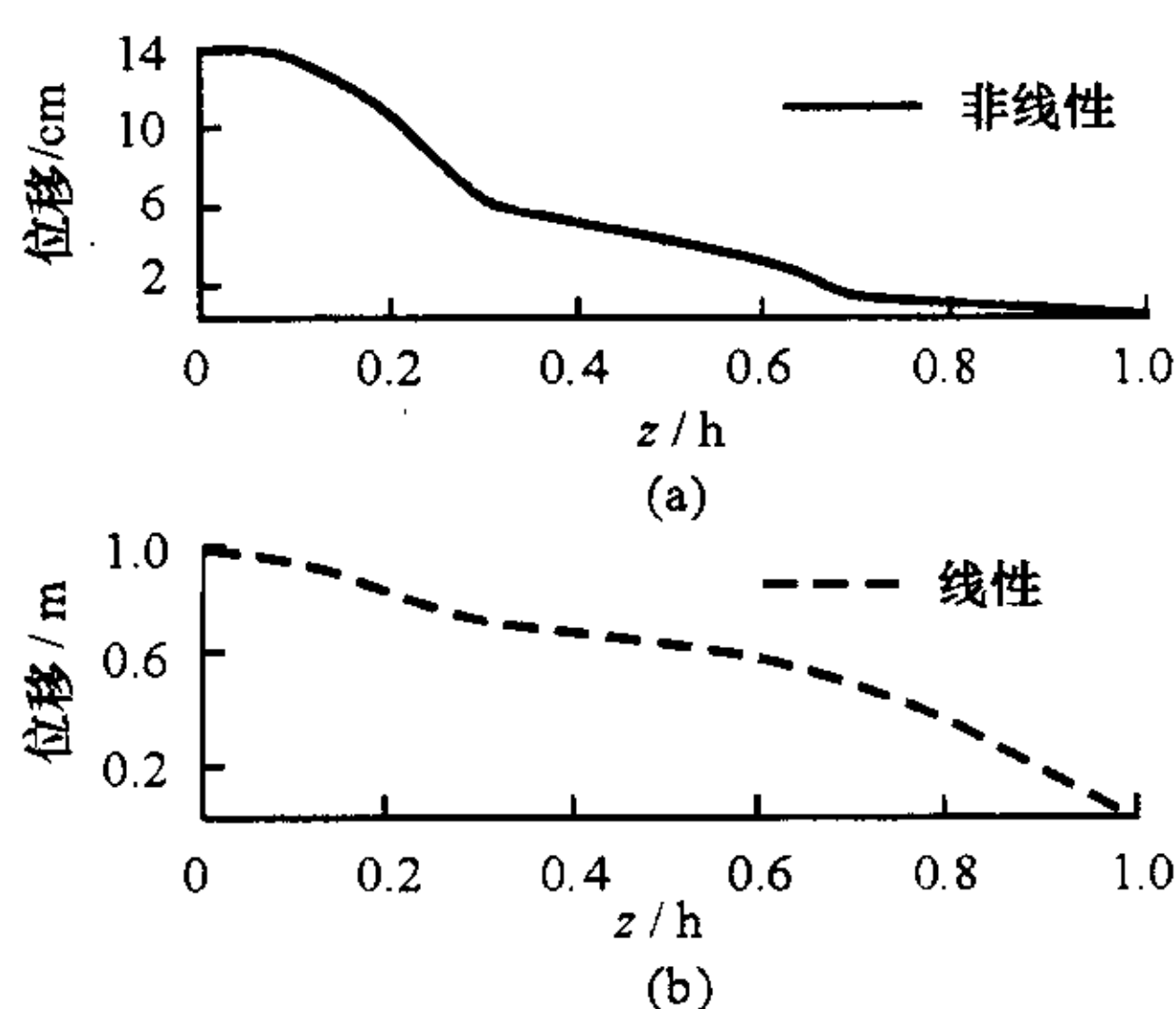


图 1 土层的最大位移反应

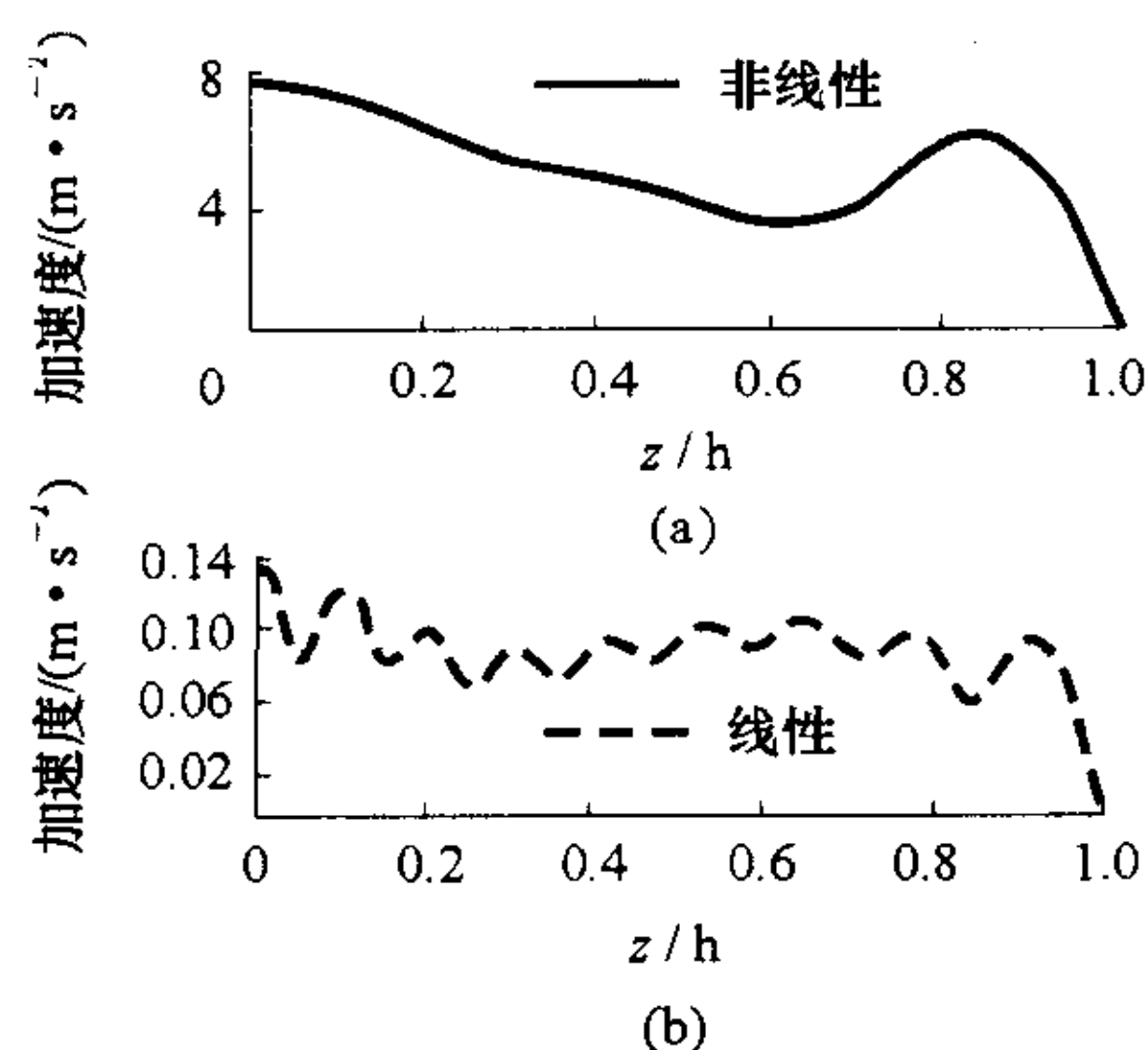


图 2 土层的最大加速度反应

### 4 结 语

本文将文献[1]所建议的土料动力非线性本构模型应用于土体地震反应分析中, 建立了严格遵守

不规则荷载条件下有关加卸载准则, 有效地求解动力非线性方程的半解析时域计算方法。算例分析表明, 本文方法在实际中是可行的, 结果是合理的。

### 参考文献:

### References:

- [1] 栾茂田, 林 皋. 土料非线性滞回本构模型的半解析半离散构造方法[J]. 大连理工大学学报, 1992, 32(6): 694-701.  
LUAN Mao-tian, LIN Gao. Semi-analytical and semi-discrete procedure for constructing nonlinear hysteretic constitutive model of soils[J]. Journal of Dalian University of Technology, 1992, 32(6): 694-701.
- [2] 张洪亮, 胡长顺, 刘保健, 等. 压实石灰黄土力学特性试验[J]. 交通运输工程学报, 2003, 3(4): 13-16.  
ZHANG Hong-liang, HU Chang-shun, LIU Bao-jian, et al. Mechanical properties experiment of compacted loess-lime[J]. Journal of Traffic and Transportation Engineering, 2003, 3(4): 13-16.
- [3] 栾茂田, 林 皋. 场地地震反应非线性分析的有效时域算法[J]. 大连理工大学学报, 1994, 34(2): 228-234.  
LUAN Mao-tian, LIN Gao. An effective time-domain computational method for nonlinear seismic response analysis of soil deposit[J]. Journal of Dalian University of Technology, 1994, 34(2): 228-234.
- [4] 王春玲, 黄 义, 张为民. 指数函数剪切模量的成层土地震反应解析解[J]. 长安大学学报(自然科学版), 2003, 23(4): 15-17.  
WANG Chun-ling, HUANG Yi, ZHANG Wei-min. General solution to earthquake response of stratified foundations with exponential function shear modulus [J]. Journal of Chang'an University (Natural Science Edition), 2003, 23(4): 15-17.
- [5] 杨人风, 张永新, 赵新荣. 土的冲击压实实验研究[J]. 中国公路学报, 2003, 16(3): 31-34.  
YANG Ren-feng, ZHANG Yong-xin, ZHAO Xin-rong. Research on test impact compaction about soil [J]. China Journal of Highway and Transport, 2003, 16(3): 31-34.
- [6] 栾茂田, 金崇磐, 林 皋. 非均质地基振动特性及地震反应分析[J]. 大连理工大学学报, 1992, 32(1): 81-87.  
LUAN Mao-tian, JIN Chong-pan, LIN Gao. Vibration behaviour and seismic response of vertically non-homogeneous soil deposits[J]. Journal of Dalian University of Technology, 1992, 32(1): 81-87.