

文章编号:1671-8879(2005)02-0106-05

Esscher-变换与风险测度技术

贺思辉^{1,2}, 李佼瑞^{1,2}, 李家军¹

(1. 西北工业大学 经济研究中心, 陕西 西安 710072; 2. 西安财经学院 统计学院, 陕西 西安 710061)

摘 要:通过研究精算学中 Esscher-变换技术及其对于金融市场中风险资产无套利原则的刻画, 反映其在金融市场风险管理技术中的应用, 证明了无套利原则、等价鞅测度的存在性和 Esscher-变换在所建立的 Hilbert-空间下的一致性, 并建立了在无套利条件下求解鞅性成立的 Esscher-变换下概率测度变换参数的方法。讨论了 Esscher-变换在金融市场风险管理策略的选择问题中的应用, 得到了组合融资最优策略的 Esscher-变换参数的解析式。

关键词:系统学; Esscher-变换; 鞅; 无套利条件(NAC); Riesz 表示

中图分类号:N941 **文献标识码:**A

Esscher-transformation and financial risk measurement techniques

HE Si-hui^{1,2}, LI Jiao-rui^{1,2}, LI Jia-jun¹

(1. Center of Economic Research, Northwest Polytechnical University, Xi'an 710072, China;

2. School of Statistics, Xi'an Finance and Economics University, Xi'an 710061, China)

Abstract: The application of Esscher-transformation technique in actuarial science is discussed by demonstrating its power of explaining the no-arbitrage principle of risk capital in financial markets. The coherency of the no-arbitrage principle, the existence of equivalent martingale measure and Esscher-transformation in Hilbert space are studied. The methods of estimating the parameter of probability measurement transformation with martingale characteristics under Esscher-transformation are analyzed. The technique to select the strategies of risk management in financing markets practice is presented, the analytical formulas of the Esscher-transformation parameter are derived.

Key words: systematic science; Esscher-transformation; martingale; no arbitrage condition (NAC); Riesz-expression

0 引 言

对于 Esscher-变换, 在精算学领域是由 Hans Bülmann, Hans Geber 等精算学专家在 20 多年前就开始研究的风险管理技术, 因为该技术在金融市场风险资产的市场行为刻画上具有特别的意义, 故

而专门加以研究。对于 Esscher-变换的研究, 早期的文献有 Harrison J M 和 Kreps D M(1979)在完备市场多期模型下研究了使用鞅来刻画市场无套利的原则^[1]; 1996 年 Geber H U 和 Shiu E S W 首次深入研究了作为精算学技术的概率测度变换在动态套期和期权定价方面的中介作用^[2]。因为在完备金

收稿日期: 2004-01-14

基金项目: 国家自然科学基金项目(10333020)

作者简介: 贺思辉(1965-), 男, 陕西延川人, 西安财经学院副教授, 西北工业大学博士研究生。

融市场环境下,金融资产交易的公平性即无套利准则正好与适当选择概率空间下资产收益的市场行为的鞅性耦合,所以在金融市场风险管理的技术环节上,寻求金融资产价格行为或收益行为的鞅结构自然成为核心问题,而 Esscher-变换正为该需求提供了技术支持,这也正是本文研究的目的。

1 金融资产的无套利与市场价格行为

本文首先构建金融市场的一个数学模型。假设市场上有 m 种金融资产,在 n 时的价格向量为 $S_n = (S_n^1, \dots, S_n^m)$, 那么对于市场风险的研究,就是对建立在概率空间 (Ω, \mathcal{F}, P) 上的 m -维实值随机向量序列的随机行为进行研究。 $S = (S_0, S_1, \dots, S_N) = (S_n)_{0 \leq n \leq N}$, 其中的 m -维随机实值向量 S_n 是定义在概率空间 (Ω, \mathcal{F}, P) 上的 \mathcal{F}_n -适应的。 $(\mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq N}$ 是 \mathcal{F} 的自然代数流。 \mathcal{F}_0 是由所有空集及其补集构成的 σ -代数。如果资产是生息的,则本文将 S_n^k 看成是包含这些收益的,且认为这些利息收益是在除息价格上的再投资。

定义 1 称下列随机向量序列为交易策略 $v = (v_0, v_1, \dots, v_N) = (v_n)_{0 \leq n \leq N}$, 其中 $v_n = (v_n^1, \dots, v_n^m)$; v_n 是 \mathcal{F}_n -可测的。显然 v_n^k 代表资产 k 在时间区间 $[n, n+1)$ 的单位数。

因为本文讨论的时间界限在 N , 所以 $v_N \equiv 0$ 。称随机变量序列 $\delta^v = (\delta_n^v)_{0 \leq n \leq N}$ 为由交易策略产生的支付流, 其中 $\delta_n^v = (v_{n-1} - v_n)' S_n$; $v_{-1} \equiv 0$ 。如果本文假设贴现因子为 D_0, D_1, \dots, D_{N-1} , 且 D_n 为 \mathcal{F}_n -适应过程, 则贴现收益流为 $v_{n-1} (D_{n-1} S_n - S_{n-1})$; $n=1, 2, \dots, N$, 这时每一个策略可理解为 1 个 Itô-积分。为了讨论的方便, 记

$M := \{\delta^v; v \text{ 是交易策略}\}$ 表示由交易策略产生的所有支付流集合; $K := \{X; X \geq 0\}$ 表示所有非负随机支付流集合; O : 表示所有空集支付流及等价支付流。

定义 2 交易策略 v 提供了 1 个套利机会, 如果 $\delta^v = (\delta_0^v, \delta_1^v, \dots, \delta_N^v) \geq 0$, 且有不等于 0 的的概率存在, 则无套利机会就意味着有 $M \cap K = \{0\}$ 。称其为无套利条件, 记为 (NAC)。

显然, 这就给出了基于定义 $\delta_n^v := (v_{n-1} - v_n) S_n$ 的无套利定义, 也就是说 δ_n^v 是支付流的第 n 个分量。如果对于可预测的贴现因子 D_{n-1} ; $n=1, 2, \dots, N$ 。本文使用辅助定义

$$\delta_n^v := v_{n-1} (D_{n-1} S_n - S_{n-1})$$

即 δ_n^v 为贴现收益流, 则条件 $M \cap K = \{0\}$ 被称为辅助无套利条件 (ANAC)。而在自融资策略下, 传统

的正的终极值定义的无套利条件与其是等价的, 证明从略。

在整个金融理论的未定权益资产的定价研究中, 一个核心的思路就是构建 1 个线性泛函 P , 将获得的支付流从交易策略中分离出来, 这就是以下定理。

定理 1 存在正的线性泛函 Q , 使得对于所有 M 中的元素在 Q 下取值为 0 的充分必要条件为 NAC 成立^[3,4]。这就是著名的金融资产定价基本定理。为证明该定理, 本文先作一些准备。

令 $L^p(P, \mathcal{R}^m, \mathcal{F})$ 为关于概率测度 P 为 p -范数可积, \mathcal{F} -可测的取值于 \mathcal{R}^m 的 m -维实值随机向量构成的空间, 现在假设

$$C1. v_n \in L^2(P, \mathcal{R}^m, \mathcal{F}_n) \quad 0 \leq n \leq N$$

$$C2. S_n \in L^\infty(P, \mathcal{R}^m, \mathcal{F}_n) \quad 0 \leq n \leq N$$

在以下的证明中, 会看到这种约束的合理性。在这个假设下, 支付流 δ^v 成为 $L^2(P, \mathcal{R}^{N+1}, \mathcal{F}_N)$ 的元素, 简记为 L_{N+1}^2 。这表示所有分量具有二阶矩的随机 $N+1$ -维向量空间。现在定义 L_{N+1}^2 中的内积使其构成 Hilbert-空间

$$(X, Y) = E\left[\sum_{k=0}^N X_k Y_k\right] \quad (1)$$

证明: 事实上, 定理的必要性是显然的, 如果存在 Q , 且 $\delta^v \geq 0$ 以正的概率不等于 0, 则 $Q(\delta^v) > 0$, 这与 Q 在 M 上为 0 矛盾, 所以 $M \cap K = \{0\}$ 是必要的。

对于其充分性, Schachermayer M(1992) 证明了 1 个引理: 若 $M \cap K = \{0\}$, 则有 $\overline{M-K} \cap K = \{0\}$, 其中闭包特性是关于 L^2 极限考虑的^[3]。事实上, 如果后者的交非空, 就是说对于 $0 \leq n \leq N$, 有 $(v_{n-1}' - v_n') S_n - K_n^r \xrightarrow{L^2} Y_n \geq 0$ 。又因为对于所有 n , $r, K_n^r \geq 0$, 则可以寻求交易策略 $v' \in L_{N+1}^2$ 满足 $Y_n \leq (v_{n-1}' - v_n') S_n$; 对于所有 $n, 0 \leq n \leq N$ 成立, 这时如果 $Y = (Y_0, Y_1, \dots, Y_N) \neq 0$, 则交易策略 v' 将允许套利存在。下面利用该引理证明其充分性。

任取严格正的线性泛函 L , 对于 $\forall \epsilon > 0$, 令

$$K_\epsilon = K \cap \{X \in L_{N+1}^2; L(X) \geq \epsilon, ||X|| \leq \frac{1}{\epsilon}\}$$

显然, K_ϵ 是弱列紧的, 不包含 0。因此可以将 $\overline{M-K}$ 与 K_ϵ 严格加以分离。即可以选择连续线性泛函, $Q_\epsilon: L_{N+1}^2 \rightarrow \mathcal{R}$, 满足对于所有 $Y \in \overline{M-K}; X \in K_\epsilon$, 有 $Q_\epsilon(Y) < Q_\epsilon(X)$ 。因为 $\overline{M-K}$ 为一锥面, 则必有 $Q_\epsilon(Y) \leq 0$ 。所以, 对于所有 $X \in K, \delta^v \in M$, 有 $Q_\epsilon(\delta^v) - Q_\epsilon(X) \leq 0$, 即 $Q_\epsilon(\delta^v) = 0$, 因此

$$\begin{cases} Q_{\varepsilon_k}(X) \geq 0 & \forall X \in K \\ Q_{\varepsilon_k}(X) > 0 & \forall X \in K_{\varepsilon_k} \end{cases}$$

现在令 $a_k > 0, \varepsilon_k \downarrow 0$, 则 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k ||Q_{\varepsilon_k}(X)|| < \infty$, 可以定义 $Q(X) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k Q_{\varepsilon_k}(X)$, 则有

$$\begin{cases} Q(\delta^v) = 0 & \forall \delta^v \in M \\ Q(X) > 0 & \forall X(\neq 0) \in K \end{cases}$$

对于 Hilbert-空间上的线性泛函, 有以下定理表述的一般结果。

定理 2 令 Q 是 L_{N+1}^2 上的严格正的线性泛函, 则

(1) (Riesz-表示定理) 对于任意 $X \in L_{N+1}^2$ 存在唯一的 $\varphi \in L_{N+1}^2$ 使得

$$Q(X) = \langle \varphi, X \rangle = E\left[\sum_{k=0}^N \varphi_k X_k\right] \quad (2)$$

(2) 对于所有 $k(k=0, 1, \dots, N)$, 有 $\varphi_k > 0$ 。

(3) 对于 Q 被限定在与 $X \in L_{N+1}^2$ 适应的分量子空间中, 存在相应的 1 个适应元 (等价于说对于 $\forall 0 \leq n \leq N, \varphi_n$ 是 \mathcal{F} -可测的) 记为 $\varphi^{(s)}$ 。对于 L_{N+1}^2 中所有适应的向量 X 有

$$Q(X) = \langle \varphi^{(s)}, X \rangle = E\left[\sum_{k=0}^N \varphi_k^{(s)} X_k\right] \quad (3)$$

并且, 当 Q 给定时, $\varphi^{(s)}$ 是唯一的。其中称 φ 为缩减因子, $\varphi^{(s)}$ 为标准缩减因子。

证明: (1) 是著名的 Riesz-表示定理, 因为 L_{N+1}^2 赋予内积式 (1) 后形成 Hilbert-空间。

(2) 因为 Q 为严格正的线性泛函。

(3) 定义 $\varphi^{(s)} := E[\varphi_k | \mathcal{F}_k]$, 则对于 \mathcal{F}_k -可测的 X_k , 有

$$E[\varphi_k X_k] = E[E[\varphi_k X_k | \mathcal{F}_k]] = E[\varphi_k^{(s)} X_k]$$

如果有 2 个标准缩减因子 $\varphi^{(s)}$ 与 $\varphi^{(s')}$, 则可定义 $\Delta_k = \varphi_k^{(s)} - \varphi_k^{(s')}$, 显然它是 \mathcal{F}_k -可测的, 则对于所有 $0 \leq n \leq N, E[\varphi_n^{(s)} \Delta_n] = E[\varphi_n^{(s')} \Delta_n] \Rightarrow E[\Delta_n^2] = 0 \Rightarrow \varphi^{(s)} = \varphi^{(s')}$ 。概率 1 成立。

下面讨论关于无套利的所谓等价鞅测度的数理机理。

对于资产 k 的价格过程 $S^k = (S_0^k, \dots, S_N^k)$ 有如下描述。

定理 3 给定 1 个严格正的线性范函 Q 满足定理 2(3), 且有 Riesz-表示中的缩减因子 $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N)$, 则有

(1) 对于所有 $k=1, 2, \dots, m$ 关于初始概率空间中的概率测度 $P, (\varphi_n S_n^k)_{0 \leq n \leq N}$ 为鞅。

(2) 相反的对于任意的严格正的 φ 满足 (1) 时, 则由式 (2) 定义的线性泛函 Q 满足定理 2 中的 (3)。

证明: (1) 假设存在定理 2 中的 (3) 所述的泛函 Q , 和相应的缩减因子 φ , 对于固定的 k , 令

$$\begin{cases} v_{k-1}^l = I_{F_{k-1}} & \text{某些 } F_{k-1} \in \mathcal{F}_{k-1}, l, k \text{ 固定} \\ v_j^h = 0 & \text{其他 } j, h \end{cases}$$

这一定义在市场上表现为这样 1 个策略, 当 F_{k-1} 发生时, 在 $k-1$ 时购买 1 个单位的资产 l , 在时刻 k 时售出。则 $\delta_{k-1}^v = -S_{k-1}^l I_{F_{k-1}}, \delta_k^v = S_k^l I_{F_{k-1}}$ 是唯一的 δ^v 不为 0 的分量。按定理的描述 $Q(\delta^v) = 0$, 即

$$-\int_{F_{k-1}} \varphi_{k-1} S_{k-1}^l dP + \int_{F_{k-1}} \varphi_k S_k^l dP = 0 \quad (4)$$

因为对于所有的 $F_{k-1} \in \mathcal{F}_{k-1}$, 式 (4) 是成立的, 且 $\varphi_{k-1} S_{k-1}^l$ 是 \mathcal{F}_{k-1} -可测的。故必然有

$$\varphi_{k-1} S_{k-1}^l = E[\varphi_k S_k^l | \mathcal{F}_{k-1}] \quad 1 \leq k \leq N \quad (5)$$

可见, 按照鞅的定义 $(\varphi_n S_n^l)_{0 \leq n \leq N}$ 关于代数流 $(\mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq N}$ 构成鞅。

(2) 对于相反的问题, 如果有 $Q(X) = E\left[\sum_{k=1}^N \varphi_k X_k\right]$, 是否有对于 $\forall \delta^v \in M, Q(\delta^v) = 0$, 即

$$Q(\delta^v) = E\left[\sum_{k=0}^N \varphi_k (v_{k-1} - v_k) S_k\right] = E\left[\sum_{j=1}^N v_{j-1} (\varphi_j S_j - \varphi_{j-1} S_{j-1})\right] \quad (6)$$

而第二个等式后的表达式反映了 m -维鞅的增量, 故必然有 $Q(\delta^v) = 0$ 成立。

在这里有两点需要说明, 一是缩减因子是一般的、普遍的, 其功能就是将所有的资产价格过程变换为鞅过程。二是在缩减因子或标准缩减因子 φ_k 是 \mathcal{F}_k -可测的, 但是不是 \mathcal{F}_{k-1} -可测, 也就是说在时间 $k-1$ 是不可观测, 因而构成市场认知的障碍, 解决的办法就是改变测度。解决好缩减因子及其概率分布以及代数流 $(\mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq N}$ 是这类金融市场建模的核心, 如何合理的选择集中体现了对于金融市场的深刻理解和概括。这里的基本问题就是在已知刻画金融市场的资产价格过程的随机向量流 $S = (S_0, S_1, \dots, S_N)$, 其中 $S_n = (S_n^1, \dots, S_n^m)$ 的概率规律 P 的条件下, 如何寻求缩减因子 $\varphi = (\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_N)$, 使得对于任何资产 $l(l=1, 2, \dots, m)$, 都有 $(\varphi_n S_n^l)_{0 \leq n \leq N}$ 成为鞅过程。

2 Esscher-变换的机理研究

一般地讲, 对于 1 个确定的随机过程来说, 给出 1 个 Esscher-变换, 无非就是定义了 1 个概率测度

的变换,而对于该随机过程来说,这是1个等价的概率测度。其中所涉及的参数是确定的,因而在新的概率测度下过程变为鞅。

定义3 对于描述确定的金融市场的随机概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, P)$ 来说,称概率测度为等价鞅概率测度,必须满足以下条件:

(1) 当且仅当 $\forall A \in \mathcal{F}, P^*[A] = 0$ 时, 有 $P^*[A] = 0$;

(2) 新的概率测度 P^* 关于原概率测度形成的 Radon-Nikodym 导数 $\frac{dP^*}{dP} \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$;

(3) 描述金融资产价格或收益等的随机过程 $\{X_t\}_{t \in [0, T]}$ 在 P^* 下为鞅, 对于任意的 $0 \leq s \leq t \leq T$, 有 $E^*[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s, P^* - a.s.$

定义4 设 $\{X_t\}_{t \in [0, T]}$ 是1个定义在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, (F_t)_{t \in [0, T]}, P)$ 上的随机过程, h^* 为1个实数, 对于1个 \mathcal{F} -可测函数 $f(\cdot)$, 那么关于等价鞅测度的随机变量 $f(X_t)$ 的期望为^[5]

$$E^*[f(X_t)] = E\left[f(X_t) \frac{e^{h^* X_t}}{E[e^{h^* X_t}]} \right] = \frac{E[f(X_t) e^{h^* X_t}]}{E[e^{h^* X_t}]} \quad (7)$$

式中:过程 $e^{h^* X_t}$ 为鞅, 且满足 $E[e^{h^* X_t}] < \infty$ 。

从以上定义可寻求等价鞅测度的1个一般方法, 事实上给出了1个概率测度变换 $d(P^*) = \frac{e^{h^* X_t}}{E[e^{h^* X_t}]} d(P)$, 或说1个具体的 Radon-Nikodym 导数定义, 使得在给定的参数下, 新的测度下的过程为鞅。而这个变换正是 Esscher-变换。以下结合前面设定的金融市场的风险资产的市场行为, 按市场贴现收益流具体研究其市场功效特点。

Esscher-变换的1个最主要特点是可以找到对于所有资产 $l(l=1, 2, \dots, m)$ 具有鞅性的缩减因子, 本文称其为生成缩减因子(span-deflator)。

定理4 对于所有 k 和 \mathcal{F}_{k-1} -可测的所有 $\alpha_{k-1} = (\alpha_{k-1}^1, \alpha_{k-1}^2, \dots, \alpha_{k-1}^m)$, 不论以概率为1的有 $\alpha_{k-1}(D_{k-1}S_k - S_{k-1})$ 为0, 还是以正的概率非0, 都存在 α_{k-1} 的转换值使得

$$Y_{k-1}^{\alpha_{k-1}} = D_{k-1} \frac{e^{\alpha_{k-1} S_k}}{E[e^{\alpha_{k-1} S_k} | \mathcal{F}_{k-1}]} \quad (8)$$

成为鞅概率, 即对于所有 $l(l=1, 2, \dots, m)$ 有

$$E[Y_{k-1}^{\alpha_{k-1}} S_k^l | \mathcal{F}_{k-1}] = S_{k-1}^l \quad (9)$$

证明: 在证明该定理之前, 本文先研究式(8)、式(9)的数理机理是如何构成的。事实上对于式(7), 可以将其看成是1个概率测度变换

$$dP^{\alpha_{k-1}}\{S_k \leq x | \mathcal{F}_{k-1}\} = \frac{e^{\alpha_{k-1} x}}{E[e^{\alpha_{k-1} S_k} | \mathcal{F}_{k-1}]} \cdot dP\{S_k \leq x | \mathcal{F}_{k-1}\} \quad (10)$$

这是将原概率测度 P 变换为 $P^{\alpha_{k-1}}$ 的过程。而这一转换对于适当的 α_{k-1} , 使得鞅条件

$$D_{k-1} E^{\alpha_{k-1}}[S_k^l | \mathcal{F}_{k-1}] = S_{k-1}^l \quad l = 1, 2, \dots, m \quad (11)$$

成立。称概率测度 $P^{\alpha_{k-1}}$ 为参数为 α_{k-1} 的概率测度 P 的 Esscher-变换; 由式(7)给出的生成缩减因子 $Y_{k-1}^{\alpha_{k-1}}$ 使得 Esscher-变换获得参数 α_{k-1} ; 一般地说, 对于新获得的基于支付流 $\delta^n = \alpha_{n-1}(D_{n-1}S_n - S_{n-1})$; $n=1, 2, \dots, n$ 的辅助无套利条件正是该定理的前提条件。

现在来证明定理的结论, 令目标函数为

$$T_{k-1}(\alpha) = \ln E[e^{\alpha'(D_{k-1}S_k - S_{k-1})} | \mathcal{F}_{k-1}] \quad \alpha \in \mathcal{R}^m \quad (12)$$

根据定理条件, 假设在 α 的邻域内存在 $T_{k-1}(\alpha)$ 的有限值, 并且在内点 α^* 取得极小值, 令

$$\frac{\partial}{\partial \alpha^l} T_{k-1}(\alpha^*) = \frac{E[e^{\alpha^*(D_{k-1}S_k - S_{k-1})} (D_{k-1}S_k^l - S_{k-1}^l) | \mathcal{F}_{k-1}]}{E[e^{\alpha^*(D_{k-1}S_k - S_{k-1})} | \mathcal{F}_{k-1}]} = 0 \quad (13)$$

$$\text{即 } E[Y_{k-1}^{\alpha^*} S_k^l | \mathcal{F}_{k-1}] = S_{k-1}^l \quad l = 1, 2, \dots, m \quad (14)$$

这正是鞅条件式(9)。

从定理的证明可得, 使用 Esscher-变换, 正是由 $\alpha_{k-1} = \alpha^* D_{k-1}$ 建立了使得价格行为为鞅过程的缩减因子这一基本问题, 这也是该变换在金融风险技术中具有独特意义的原因。

3 Esscher-变换技术的实际应用

在金融市场实践中, 对于随机向量序列 (S_0, S_1, \dots, S_N) , 其中 $S_k = (S_k^1, S_k^2, \dots, S_k^m)$ 表示 m 种资产的市场价格, 在本文记 S_k 为 K 时市场上金融资产价值总和

$$S_k = \sum_{l=1}^m V_{k-1}^l S_k^l \quad (15)$$

其中, V_{k-1}^l 表示资产 l 在 $[k-1, k)$ 时段的数量, 故认为其是常数, 且 \mathcal{F}_{k-1} -可测。则贴现增量

$$W_k = D_{k-1}S_k - S_{k-1} = \sum_{l=1}^m V_{k-1}^l (D_{k-1}S_k^l - S_{k-1}^l) \quad (16)$$

是市场关心的目标。市场行为的最优选择是 Pareto-最优的资产分配。为此, 假设市场上的 M 个投资者的效用为

$$u_j = \frac{1}{\gamma_j}(1 - e^{-\gamma_j x}) \quad j = 1, 2, \dots, M \quad (17)$$

即以指数效用刻画投资者的风险偏好行为, γ_j 表示第 j 个投资者的风险厌恶系数, 或说应该有第 j 个投资者的风险容忍度为 $\frac{1}{\gamma_j}$ 。这时的 Pareto-最优分配

$(W_k^1, W_k^2, \dots, W_k^M)$ 是以一般价格均衡来实现的。令 $\tilde{p}(W_k)$ 为随机变量 W_k 在 $[k-1, k)$ 中标值的价值, 它是 \mathcal{F}_{k-1} -可测的泛函。其市场价格均衡应该满足

$$\begin{cases} E[u_j(W_k^j - \tilde{p}(W_k^j)) | \mathcal{F}_{k-1}] = \max_{W_k^j \in L^2} \\ \sum_{j=1}^M W_k^j = W_k \end{cases} \quad (18)$$

如果利用前面定义的生成缩减因子 Y_k 来解释价格泛函, 即

$$\tilde{p}(W_k^j) = E[Y_k W_k^j | \mathcal{F}_{k-1}] \quad (19)$$

则利用 Borch K(1962) 的结果^[6], Pareto-最优条件亦称为 Borch-条件为

$$u'_j(W_k^j - E[Y_k W_k^j | \mathcal{F}_{k-1}]) = C_j Y_k \quad (20)$$

其中 C_j ($j = 1, 2, \dots, M$) 为 \mathcal{F}_{k-1} -可测的。由指数效用函数的形式 $u'_j(x) = e^{-\gamma_j x}$, 式(19)可写为

$$e^{-\gamma_j W_k^j} = A_j Y_k \quad j = 1, 2, \dots, M \quad (21)$$

其中, A_j 为正的 \mathcal{F}_{k-1} -可测的。取对数后, $-W_k^j = \frac{1}{\gamma_j} \ln A_j + \frac{1}{\gamma_j} \ln Y_k$ 。现在对 j 作和, 令 $\frac{1}{\gamma} = \sum \frac{1}{\gamma_j}$, 有 $-\gamma W_k = \gamma B_k + \ln Y_k$, 其中 B_k, \mathcal{F}_{k-1} -可测。利用条件 $E[Y_k | \mathcal{F}_{k-1}] = D_{k-1}$ 得到

$$Y_k = D_{k-1} \frac{e^{-\gamma W_k}}{E[e^{-\gamma W_k} | \mathcal{F}_{k-1}]} \quad (22)$$

现结合均衡条件, 由式(15)有

$$-\gamma W_k = - \sum_{l=1}^m \gamma V_{k-1}^l (D_{k-1} S_k^l - S_{k-1}^l) \quad (23)$$

Esscher-变换的生成缩减因子为 $Y_k^{(-\gamma D_{k-1} V_{k-1})}$, 其中 $V_{k-1} = (V_{k-1}^1, V_{k-1}^2, \dots, V_{k-1}^m)$, 按前文的说法 Esscher-变换的参数 $\alpha_{k-1} = -\gamma D_{k-1} V_{k-1}$ 。而前文证明 $\alpha_{k-1} = D_{k-1} \alpha^*$, 即有

$$\alpha^* = -\gamma V_{k-1} \quad (24)$$

这正是本文要对市场行为的解释:

(1) 使式(18)达到极小, 也就是给 1 个等价的鞅测度概率所需的 Esscher-变换的参数 α^* , 是与资产的数量向量成比例的。

(2) 这个比例系数对于所有的资产分量是相等的, 为 γ , 而 $\frac{1}{\gamma}$ 正是所有投资者的风险容忍度的和。

参考文献:

References:

- [1] Harrison J M, Kreps D M. Martingales and arbitrage in multiperiod security markets[J]. Journal of Economic Theory, 1979, 20: 381-408.
- [2] Geber H U, Shiu E S W. Actuarial bridgts to dynamic hedging and option priling[J]. Insurance, Mathematics and Economics, 1996, 18: 183-218.
- [3] Schachermayer M A. Hilbert space proof of the fundemental theorem of asset pricing in finite discrete time[J]. Insurance, Mathematics and Economics, 1992, 11: 249-257.
- [4] Bühlmann H, Delbaen F, Embrechts P, Shiryaev A N. No-arbitrage, change of measure and conditional Esscher transforms[J]. CWI Quarterly, 1996, 9(4): 291-317.
- [5] Bühlmann H, Delbaen F, Embrechts P. On Esscher transforms in discrete finance models[J]. ASTIN Bulletin, 1998, 28(2): 171-186.
- [6] Borck K. Equilibrium in a reinsurance market [J]. Econometrica, 1962, 30: 424-444.

《中国公路学报》2005 年征订通知

《中国公路学报》(季刊)是中国公路学会主办的公路交通行业最权威的学术性刊物, 主要刊载道路工程、桥隧工程、交通工程、筑路机械工程、汽车与汽车运用工程、公路运输经济与工程经济等专业应用技术及理论性文章, 并适当报道有关公路交通的新技术、新材料、新工艺以及国内外重大学术活动、工程建设及科技动态信息等。《中国公路学报》网络版——中国公路网延伸了《中国公路学报》的信息传播功能, 为读者提供全方位的公路交通信息服务。中国公路网的网址为: <http://www.highway-china.com>。

《中国公路学报》(大 16 开本)读者对象为: 公路交通界的科研人员、工程技术人员、经济管理人员及大专院校的师生。《中国公路学报》每期定价 15.00 元(含邮寄费), 2004 年 4 期共 60.00 元。

另外, 《中国公路学报》编辑部现有少量 2002 年合订本, 100 元(含邮寄费)/册。欢迎订阅!

收款单位: 长安大学杂志社(西安市南二环路中段)

帐 号: 3700021609014486011

开 户 行: 西安市工商行小寨分理处

邮 编: 710064

联系人: 赵文义

电 话: (029)82334387