

文章编号:1671-8879(2005)02-0073-04

层状边坡岩体结构的后屈曲

杨治林

(西安科技大学 基础课部, 陕西 西安 710054)

摘 要:应用后屈曲能量准则建立的平衡稳定模态幅值方程,研究了不同类型层状边坡在分叉点附近的邻域及其溃屈极限长度,探讨了结构分叉后平衡路径的演化途径。研究发现,临空和临气边坡在确定分叉点附近的邻域时,具有相同的表达式,分叉点附近的邻域与岩体材料、结构几何特征及坡角有关;由坡角确定的剖分因子可剖分出各类边坡模态幅值的计算公式;边坡从初始屈曲到后屈曲的变形过程中,模态幅值与载荷间存在着单值的对应关系。研究结果表明,利用突变理论可从另一角度建立坡脚开裂的判据,也可确定边坡的变形模态;具有与尖点突变模型相同数学特点的状态变量,只有当剖分因子改变正负号时,才会从一个状态突跳至另一个状态。

关键词:岩土工程;后屈曲;分叉点;模态幅值;尖点突变;剖分因子

中图分类号:P583

文献标识码:A

Post-buckling for side slope with stratified rock mass

YANG Zhi-lin

(Department of Basic Courses, Xi'an University of Science and Technology, Xi'an 710054, China)

Abstract: In accordance with deformed specificities of all kinds of bedding rock slope, this paper studied the regions nearby equilibrium bifurcation point, limit lengths of slope buckling failure and evolutions along equilibrium path by using modality amplitude equation of equilibrium stability built on post-buckling energy criterion. It is pointed that for regions nearby bifurcation point, two kinds of bedding rock slope have the same expression, these regions are related to the mass of rock mass, the geometrical properties of side slope and angle of bedding slope; the ripping factor depended on bedding slope angle can give calculation formulas of all kinds of modality amplitude; in the process of side slope deformation from initial buckling to post-buckling, there exists single-valued relation between modality amplitude and load. The results indicate that both catastrophic criterion of crack initiation at bedding rock slope end is derived from another way, and modality of deformation for bedding slope are determined by using catastrophe theory, and the state variate in cusp catastrophe model jumps from one state to the other state only if ripping factor changes its plus-minus.

Key words: geotechnical engineering; post-buckling; bifurcation point; modality amplitude; cusp catastrophe; ripping factor

0 引言

层状边坡岩体结构的不稳定性主要表现为边坡整体的溃屈和坡脚处的剪切滑动^[1]。就时间分布而言,结构在溃屈破坏的前期往往具有以岩板或岩梁的形式发生屈曲的特征。在边坡工程中,研究对象的状态通常由一组离散的或分布的状态变量所刻画,这些状态变量往往依赖于 1 个或多个外在因素参量。当这些参量取某些值时,系统状态变量呈现出不唯一的分叉现象^[2,3],分叉是非线性问题中最重要的特点之一。层状边坡岩体结构在外在条件的变化之下丧失唯一性,问题的本质是 1 个非线性问题。人们所关心的是系统从失稳到失效的演化过程,关注边坡在失稳之后到整体失效之前结构和材料承载能力的开发和储能潜力的发挥,强调不稳定性问题。

随着后屈曲理论的完善化,边坡的稳定性问题也不再只局限于考虑几何扰动,还应研究结构在稳定和不稳定发展的各个阶段上材料性能的演化及可能存在的内部组织的突变。也就是说,在进行力学分析的同时,还应结合材料学科的研究,因为材料属性决定着分叉时的本构行为和加载路径。本文应用后屈曲能量准则建立的平衡稳定模态幅值方程,研究了不同类型层状边坡在分叉点附近的领域及其溃屈极限长度,探讨了结构分叉后平衡路径的演化途径。

1 边坡岩体结构的屈曲性态

1.1 位移增量泛函及其各阶变分

图 1 所示的顺层边坡岩体,在与岩层层面平行的两侧未受约束,边坡的 AB 部分已与下层脱离,是向外鼓出的弯曲段;BC 部分是可在底层岩石上滑动的下滑段;AD 部分还未与底层岩石脱离,仅有沿其结构面滑动的趋势。

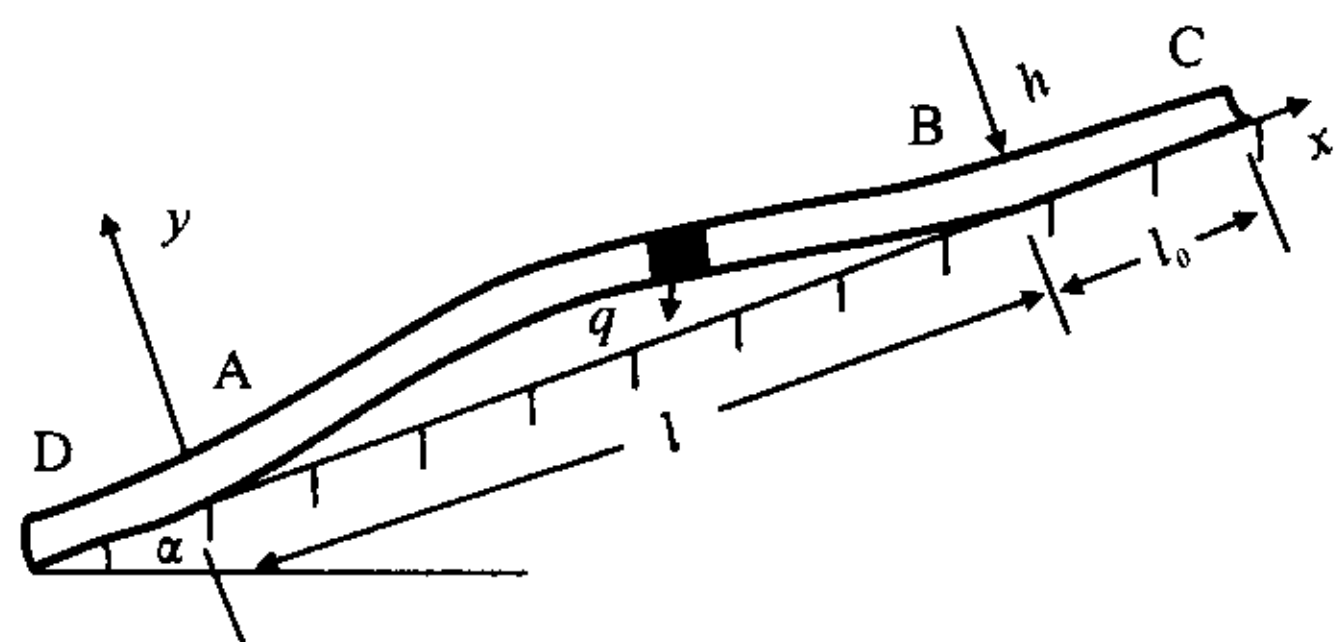


图 1 边坡岩体后屈曲力学模型

根据文献[4]论证的用岩梁代替岩板分析层状边坡岩体结构条件,图 1 所示的整个边坡岩体结构从未挠曲的基本状态过渡到挠曲了的后屈曲状态,其位能增量可用下列泛函表示

$$\Pi = \frac{EI}{2(1-\mu^2)} \int_0^l \frac{y''^2}{1-y'^2} dx + q \cos \alpha \int_0^l y dx -$$

$$q \sin \alpha \int_0^l (l-x)[1-(1-y'^2)^{1/2}] dx - P \int_0^l [1-(1-y'^2)^{1/2}] dx \quad (1)$$

式中: $q = \gamma h$ 为层状岩体单宽分布载荷, γ 为岩石容重, h 为滑动深度; P 为单宽下滑力, $P = (\gamma h \sin \alpha - \gamma h \cos \alpha \tan \varphi - C) l_0$, α 为坡角, φ 为层间摩擦角, C 为粘着力, l_0 为滑动段长度。

将式(1)无量纲化,得

$$\Pi = \int_0^l \frac{w''^2}{1-w'^2} d\xi + \beta_1 \int_0^l w d\xi - \beta_2 \int_0^l (1-\xi)[1-(1-w'^2)^{1/2}] d\xi - \lambda \beta_3 \int_0^l [1-(1-w'^2)^{1/2}] d\xi \quad (2)$$

式中: $w = y/l$; $\xi = x/l$; $\lambda = P/P_k$; $P_k = 8P_i \pi^2 - l g \sin \alpha / a$; $P_i = EI / 2l^2 (1-\mu^2)$; $\beta_1 = l g \cos \alpha / P_i$; $\beta_2 = l g \sin \alpha / P_i$; $\beta_3 = P_k / P_i$ 。

由于后屈曲阶段的性态完全取决于临界载荷下平衡的稳定或不稳定,而临界点处位能的二阶变分半正定,因此为了确定上述屈曲性态,必须研究泛函的高阶变分。为此,将式(2)中各被积函数按级数展开,整理并略去 w 四次方以上各项,则得位能增量泛函

$$\Pi = \Pi_2 + \Pi_4 + \Pi_m \quad (3)$$

其中,

$$\Pi_2 = \int_0^l \left[w''^2 - \frac{1}{2}(\beta_2 + \lambda \beta_3) w'^2 + \frac{1}{2} \beta_2 \xi w'^2 \right] d\xi$$

$$\Pi_4 = \int_0^l \left[w''^2 w'^2 - \frac{1}{8}(\beta_2 + \lambda \beta_3) w'^4 + \frac{1}{8} \beta_2 \xi w'^4 \right] d\xi$$

$$\Pi_m = \beta_1 \int_0^l w d\xi$$

分别为泛函 Π 的二阶变分、四阶变分和 m 阶次项的余项。

1.2 临界载荷及屈曲路径性态

对于图 1 所示的顺层边坡岩体结构力学模型,取符合其几何边界条件的变形模态为

$$w_1 = \frac{1}{2} \frac{a_m}{l} (1 - \cos 2\pi \xi) \quad (4)$$

式中: a_m 为变形模态幅值。

当边坡处于临界平衡状态时,对于任意的 a_m 值,泛函的二阶变分应为 0,即

$$\Pi_2 = 0 \quad (5)$$

则由式(3)、(4)可得临界载荷为

$$P_{ij} = P_k = \frac{4\pi^2 EI}{l^2 (1-\mu^2)} - \frac{l}{2} q \sin \alpha \quad (6)$$

由于式(3)中没有三阶变分项,因此由确定临界状态稳定性的 Π_4 恒大于0可知,在给定的变形模态下屈曲路径平衡稳定。

1.3 变形模态幅值及后屈曲性态

在对结构进行后屈曲性态分析时,需将位能增量泛函 Π 及其展开式中的每一项都视为与载荷因子 λ 有关的项。对于一级近似,仅在能量的二次变分中考虑与 λ 有关的项是充分的^[5]。于是,对于任意位移场,考虑 Π_m 影响时的屈曲模态可表示为幅值 a_m 的简单代数函数

$$F(a_m, \lambda) = (\lambda - \lambda_1)F'_2(a_m) + \Pi_4 + \Pi_m \quad (7)$$

其中, λ_1 为临界载荷因子, $F'_2(a_m) = \partial \Pi_2(w_1, \lambda) / \partial \lambda$ 。式(7)是近似的,但它是分叉点附近能量渐近展开式中的主要项。由 $F'_2(a_m)$ 的表达式及式(3)、式(4)可得

$$F(a_m, \lambda) = \frac{\pi^6 a_m^4}{8l^4} - (\lambda - \lambda_1)P_k \frac{\pi^2(1 - \mu^2)}{2EI} a_m^2 + \frac{l^2 q \cos \alpha (1 - \mu^2)}{EI} a_m \quad (8)$$

于是,在分叉点附近邻域内的平衡构形由作为幅值 a_m 的函数 $F(a_m, \lambda)$ 的驻值所确定,当且仅当这些驻值为本征最小时,平衡构形才是稳定的。利用驻值定理 $\partial F(a_m, \lambda) / \partial a_m = 0$,得到平衡稳定模态幅值 a_m 的方程

$$a_m^3 + D_1 a_m + D_2 = 0 \quad (9)$$

$$\text{式中 } D_1 = \frac{2l^4(1 - \mu^2)}{\pi^4 EI} (\lambda_1 P_k - P)$$

$$D_2 = \frac{2l^6 q \cos \alpha (1 - \mu^2)}{\pi^6 EI}$$

当 $P < P_k$ 时, D_1 恒为一虚值,岩体结构保持正直的基本状态;当 $P > P_k$ 时, D_1 恒为负值。式(9)亦表示了模态幅值 a_m 与载荷 P 、 P_k 及边坡已脱离底层长度 l 间的关系。当 $\lambda = \lambda_1$ 时,使幅值 a_m 减少为0的变形路径是真正的后屈曲平衡路径。

2 边坡岩体的后屈曲模态幅值

2.1 平衡分叉点附近的邻域及后屈曲模态幅值

岩土工程中的边坡屈曲并不意味着其承载能力的丧失,而只是岩体结构稳定性发生改变的分叉特征,通常结构屈曲后其仍有一定的承载能力。根据式(9)可得以平衡稳定模态幅值 a_m 为状态变量,以正则因子(canonical factor) D_1 和剖分因子(ripping factor) D_2 为控制变量的尖点突变模型的分叉集方程

$$4D_1^3 + 27D_2^2 = 0 \quad (10)$$

将 D_1 、 D_2 代入式(10),得跨越分叉点后的载荷增量

$$P - \lambda_1 P_k = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{q^2 \cos^2 \alpha EI}{1 - \mu^2}} \quad (11)$$

式(11)以载荷的形式给出了分叉点附近的邻域。

针对边坡的不同类型,由式(9)、式(11)可得单面约束下符合边坡实际情形的后屈曲模态幅值

$$a_{m1} = (-D_1/3)^{1/2} \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}\right) \quad (12)$$

$$a_{m2} = 2(-D_1/3)^{1/2} \quad \left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}\right) \quad (13)$$

当 $P - \lambda_1 P_k > \frac{3}{2} \sqrt{\frac{q^2 \cos^2 \alpha EI}{1 - \mu^2}}$ 时,由式(9)可得

$$a_{m1} < (-D_1/3)^{1/2} \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}\right) \quad (14)$$

$$a_{m2} < 2(-D_1/3)^{1/2} \quad \left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}\right) \quad (15)$$

式(14)、(15)表明,随着边坡的应力调整及应力分异作用,坡脚附近的最大剪应力显著增大,坡体沿着早期发育的结构面开裂,边坡脱离底层的长度由于坡脚处开裂长度的增加而增加,致使变形模态幅值 a_m 减小。因此,式(11)既表示了平衡构形附近的邻域,亦是层状边坡坡脚开裂的判据。

一般地,当 α 在 $0 \sim 2\pi$ 范围内取值时,可得相应边坡的后屈曲模态幅值。图2给出了常见临气边坡和临空边坡的情形。

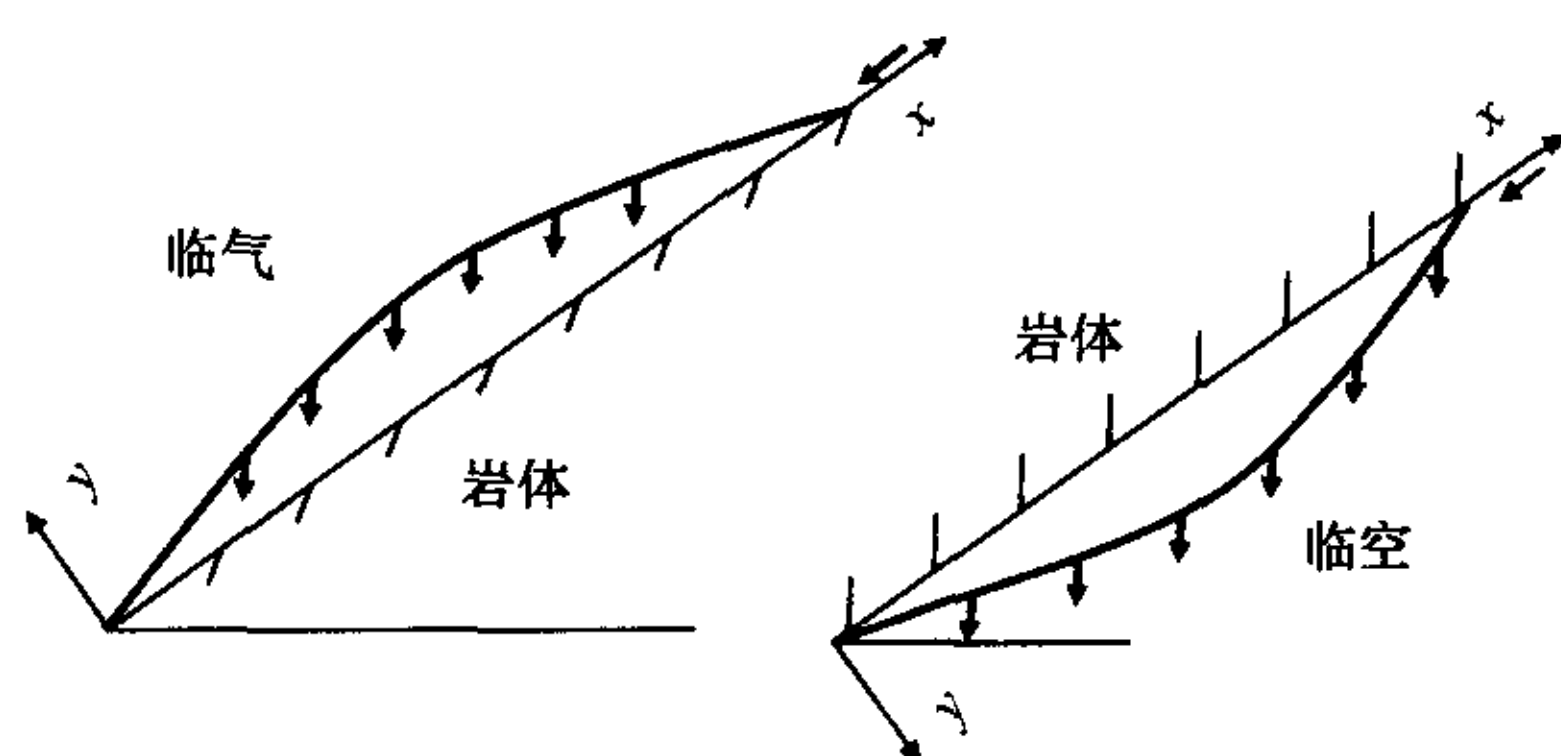


图2 两种状态示意图

2.2 边坡溃屈的极限长度及后屈曲模态幅值极值

根据层状边坡模态幅值的特征及岩体结构渐近性破坏的机理^[6,7],边坡屈曲后,在上部产生滑动位移的同时,亦伴随着坡脚处的开裂,因此变形模态幅值 $a_{mi} = a_{mi}(P, P_k, \Delta l)$ 为 $P(l_0)$ 、 $P_k(l)$ 、 $\Delta(l)$ 和 l 的函数。如果边坡上部滑动段的长度 l_0 给定,并考虑到临界载荷 P_k 及上部移动位移 Δ 与岩层脱离底层长度 l 之间的关系,则 a_{mi} 仅与 l 有关,由式(12)、(13)得

$$a_{mi}^2 + a_i D_1 = 0 \quad (16)$$

其中, a_{mi} 、 a_i 分别为不同类型边坡的模态幅值和模态

系数。当 $D_1 > 0$ 时,系统为空状态;当 $D_1 < 0$ 时,分叉后的平衡路径根据 D_2 为一条有极值的曲线。由

$$\frac{\partial a_{mi}}{\partial l} = \frac{\partial a_{mi}}{\partial D_1} \frac{\partial D_1}{\partial l} = 0, \text{得}$$

$$al^4 + bl^3 - cl = 0 \quad (17)$$

式中

$$a = \frac{5q\sin\alpha(1-\mu^2)}{\pi^4 EI}; b = \frac{8P(1-\mu^2)}{\pi^4 EI}; c = \frac{16}{\pi^2}$$

根据岩层屈曲的实际情况,可采用迭代法求出边坡后屈曲性态下使稳定变形模态幅值取极值的极限长度

$$l^* = \sqrt{\frac{c}{al^* + b}} \quad (18)$$

由式(16)、(18)即可求得各类边坡模态幅值的极值 $(a_{mi})_{\max}$ 。边坡屈曲后,只有在脱离底层的极限长度内才可能以溃屈的形式发生破坏。

3 结 语

顺层边坡岩体结构初始屈曲后,在其分叉点附近平衡稳定。边坡上部滑动段的下滑,使屈曲模态幅值在不断增大,岩层处于大变形溃屈状态。在屈曲模态幅值不断增大的同时,满足一定条件下的坡脚处岩体亦沿着早期发育的结构面而扩展,致使边坡脱离底层的长度增加,而模态幅值减小。随着边坡上部滑动段继续下滑,屈曲模态的变化重复上述过程。

分叉点后屈曲是由于变形因素引起的结构几何非稳定性问题,极值点后屈曲是由于坡脚处材料非稳定性引起的结构物理非稳定性问题。顺层边坡岩体结构的后屈曲是 1 个由分叉点后屈曲性态到极值点后屈曲性态的耦合过程。在这个过程中,若 $a_m^2 + a_i D_1 = 0$,则结构处于分叉点后屈曲溃屈状态;若 $a_m^2 + a_i D_1 < 0$,则结构处于极值点后屈曲剪切滑动状态。

参考文献:

References:

- [1] 王芝银,杨志法,李云鹏,等.顺层边坡岩体结构变形分叉突变特性研究[J].西安矿业学院学报,1999,19(3):203-207.
WANG Zhi-yin, YANG Zhi-fa, LI Yun-peng, et al. On bifurcate catastrophic behavior of structural deformation for bedding rock slope[J]. Journal of Xi'an Mining Institute, 1999, 19 (3): 203-207.
- [2] 杨治林.地下水作用下复合介质边坡岩体的位移判据研究[J].岩石力学与工程学报,2003,22(5):820-823.
YANG Zhi-lin. Research on displacement criterion for compound rock mass slope affected by groundwater [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2003, 22 (5): 820-823.
- [3] 邵爱军,彭建萍,刘唐生.矿坑底板突水的突变模型研究[J].岩土工程学报,2001,23(1):38-41.
SHAO Ai-jun, PENG Jian-ping, LIU Tang-sheng. Research on a cusp catastrophic model of water bursting in pit floors [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2001, 23 (1): 38-41.
- [4] 肖 远.用岩层梁代替岩层板分析顺层岩体边坡结构变形破坏的条件[A].第二届全国工程地质力学青年学术讨论会论文集[C].北京:地震出版社,1992.
XIAO Yuan. Conditions replaced rock plate by rock beam for structural deformation and failure of bedding rock slope[A]. In: Proceedings of the 2nd National Youth Academical Conference on Engineering Geology Mechanics[C]. Beijing: Earthquake Press, 1992.
- [5] 范钦珊.初始后屈曲理论及其应用[A].中国力学学会办公室.材料和结构的不稳定性[C].北京:科学出版社,1993.
FAN Qin-shan. Theory of initial post-buckling and its applications in engineering[A]. CSTAM, Unstability of Material and Structure[C]. Beijing: Science Press, 1993.
- [6] 李云鹏,安晓宁,王芝银.考虑不同拉压特性的边坡岩体结构稳定性位移判据[J].西安公路交通大学学报,1999,19(4):15-17.
LI Yun-peng, AN Xiao-ning, WANG Zhi-yin. Displacement criterion of structure stability for rock mass slope by considering different tensile-compressive behavior[J]. Journal of Xi'an Highway University, 1999, 19 (4): 15-17.
- [7] 王芝银,李云鹏.西部岩土工程与岩土力学问题[J].长安大学学报(自然科学版),2003,23(1):11-14.
WANG Zhi-yin, LI Yun-peng. Geotechnical engineering and geomechanics in Chinese western zone [J]. Journal of Chang'an University (Natural Science Edition), 2003, 23(1): 11-14.