

文章编号:1671-8879(2005)01-0033-05

# 时间差分格式对路基 Biot 固结有限元分析的影响

丁洲祥<sup>1</sup>, 谢永利<sup>2</sup>, 龚晓南<sup>1</sup>, 俞建霖<sup>1</sup>

(1. 浙江大学 土木工程系, 浙江 杭州 310027; 2. 长安大学 特殊地区  
公路工程教育部重点实验室, 陕西 西安 710064)

**摘 要:**应用虚功原理和线性差分法导出经过时空离散的 Biot 固结有限元方程,研究了路堤荷载作用下地基变形和孔压发展规律。采用有限元法,分析了基于常见的中心差分、Galerkin 差分 and 全隐式差分等 3 种格式的结果及其相对偏差在空间和时间域的变化规律。结果表明:3 种格式的数值解答基本一致;中心差分和 Galerkin 差分计算的路基中心沉降在固结初期偏小,在后期则稍微偏大,而对侧向位移和超静孔压的规律则刚好相反;不同差分格式对超静孔压和坡脚附近的竖向变形影响较明显,尤其是中心差分格式的偏差较大等。可供地基设计和数值仿真时参考。

**关键词:**道路工程;Biot 固结理论;有限元分析;时间差分;路基沉降

**中图分类号:**U416.1 **文献标识码:**A

## Influence of time difference schemes on Biot's consolidation FEA of roadbed foundation

DING Zhou-xiang<sup>1</sup>, XIE Yong-li<sup>2</sup>, GONG Xiao-nan<sup>1</sup>, YU Jian-lin<sup>1</sup>

(1. Department of Civil Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310027 China; 2. Key Laboratory for Special Area Highway Engineering of Ministry of Education, Chang'an University, Xi'an 710064, China)

**Abstract:** Based on virtual work principle and linear difference method, the finite element equations are formulated after time-spatial discretization. The distributions of deformation and excess pore pressure (EPP) for roadbed under embankment are studied using finite element method. The results and their relative errors for finite element analysis by Crank-Nicholson, Galerkin and fully-implicit time difference schemes (TDS) are compared respectively in time and spatial domain. The results show that basic regularities of numerical solutions by three TDSs remain nearly same; the value of roadbed center settlement by Crank-Nicholson and Galerkin TDSs is underestimated at earlier consolidation process and slightly overestimated later, in reverse of lateral displacement and EPP; the EPP and vertical deformation near slope toe are affected mostly apparently by different TDS, especially for Crank-Nicholson TDS. The following conclusions could be drawn that the relative errors of results by different TDSs relate closely to consolidation process, but the abstract errors keep so small that every TDS could satisfy the need of engineering analysis.

**Key words:** road engineering; Biot's consolidation theory; finite element analysis; time difference scheme; roadbed settlement

收稿日期:2003-12-27

基金项目:国家自然科学基金项目(59879021)

作者简介:丁洲祥(1976-),男,山东胶南人,浙江大学博士研究生。

0 引言

Biot(1941)固结理论<sup>[1]</sup>是当前最完善的固结理论之一,它实现了渗流场和位移场直接耦合,可以揭示 Mandel 效应等复杂的土力学现象,因而受到工程界的青睐。Sandhu, Wilson(1969)<sup>[2]</sup>和沈珠江(1977)<sup>[3]</sup>分别在国外和国内首先研究了 Biot 固结有限元法及其应用。中国在近十几年来随着高等级公路大规模建设的兴起,Biot 固结理论已经广泛用于堆载预压、真空预压等软基处理的分析中,并且可以考虑粘弹塑性甚至大变形等因素的影响。

但工程上在使用 Biot 固结有限元分析时,通常只注意所选时间差分格式的稳定性 and 收敛性。对于满足稳定性和收敛性的不同时间差分格式在预测路基工作性状方面究竟会引起何种偏差以及偏差程度如何等问题,尚未见到有关成果发表。为此,本文针对路堤荷载作用下的软土路基,编制相关程序进行数值分析,探讨了时间差分格式的影响,得到若干有益的结论和建议。

1 Biot 固结有限元方程的形式

Biot 固结有限元方程的推导一般根据变分原理、虚功原理或加权残值法,将平衡条件和连续性条件转化为等效积分形式而得到。但不同文献<sup>[2~5]</sup>推导的形式略有差别,如文献<sup>[4]</sup>给出的固结系数矩阵中显含时间差分系数,而文献<sup>[4,5]</sup>导出的固结系数矩阵中只有渗流子矩阵前面带有负号。出现这种混乱的原因较复杂,这里不予讨论。本文编程中采用文献<sup>[4]</sup>给出的增量形式

$$[K]\{\Delta U\}^e = \{\Delta R\}^e$$

(1)

其中,[K]为单元固结矩阵,其分块形式为

$$[K_{ij}] = \begin{bmatrix} [K'_{ij}] & [K_{dj}] \\ [K_{qi}] & -\theta\Delta t[K_{sj}] \end{bmatrix}$$

(2)

其中,θ为时间差分系数,其余符号见文献<sup>[4]</sup>。

Small 等(1976)<sup>[5]</sup>已证明,当 θ≥1/2 时,任何关于时间函数的积分方法均为无条件稳定收敛。常见的时间差分格式一般有 3 种:①中心差分即 Crank-Nicholson 差分,θ=1/2;②Galerkin 差分,即 θ=2/3;③全隐式差分,即 θ=1。本文即选择这 3 种差分格式进行对比分析。

2 工程算例分析

设计路堤荷载作用下的软基算例为:软基为均匀饱和土体,忽略竖向排水体;材料线弹性,模量 2

MPa,泊松比 0.3;竖向和水平渗透系数分别为 8.64 e<sup>-4</sup> m·d<sup>-1</sup>和 1.728e<sup>-3</sup> m·d<sup>-1</sup>;填土容重取 20 kN·m<sup>-3</sup>;根据对称性取路堤和路基的一半按平面应变问题处理,具体尺寸以及网格划分情况如图 1 所示。纵坐标以竖直向上为正,采用平面 4 节点等参元。

边界条件:对称面内无水平位移,底面和外侧为固定边界,地表排水。填土荷载分两级施加,加载历时曲线如图 2 所示。

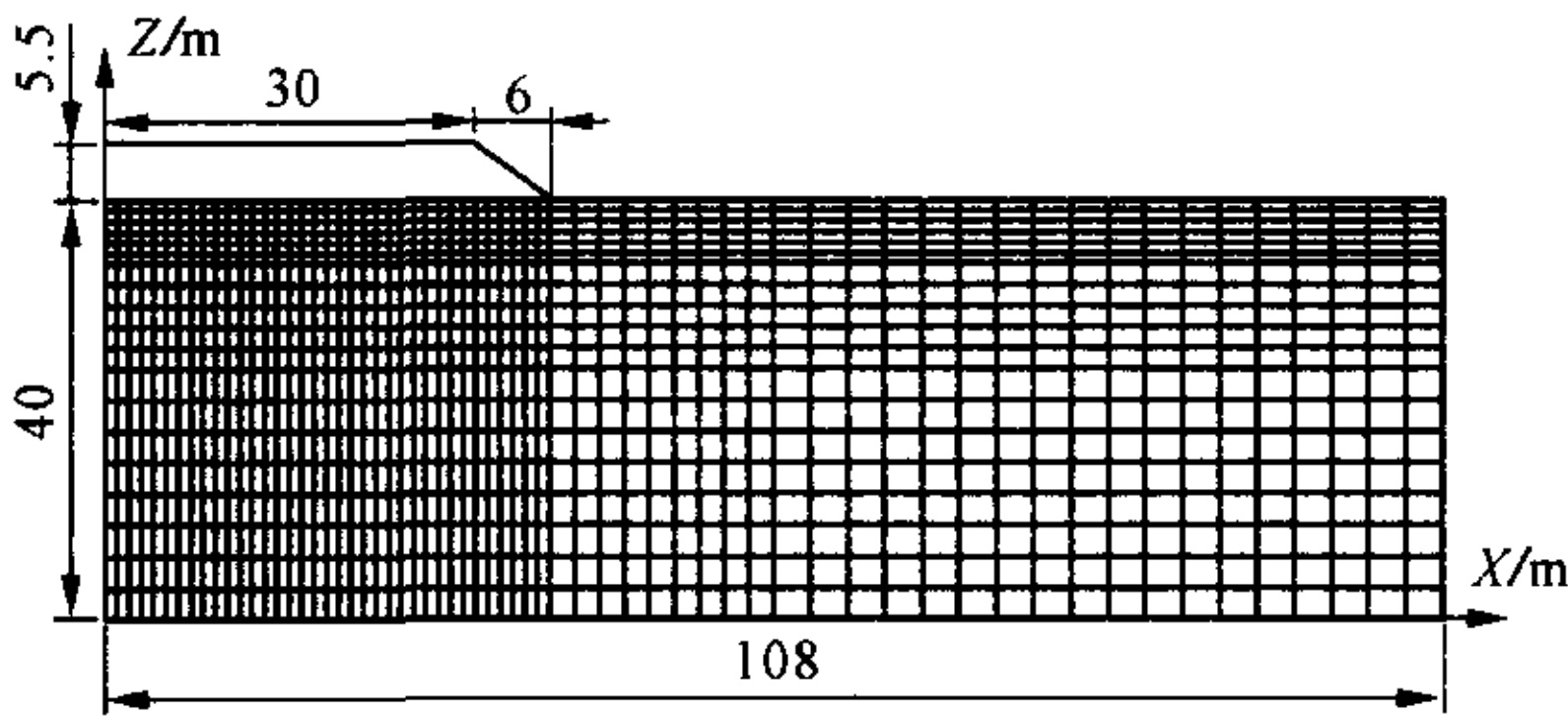


图 1 路堤尺寸及路基有限元网格

某差分格式 A 的相对偏差以全隐式差分 B 的结果为基准,则 A 的相对偏差 RE 按下式计算

$$RE = 1 - A/B$$

(3)

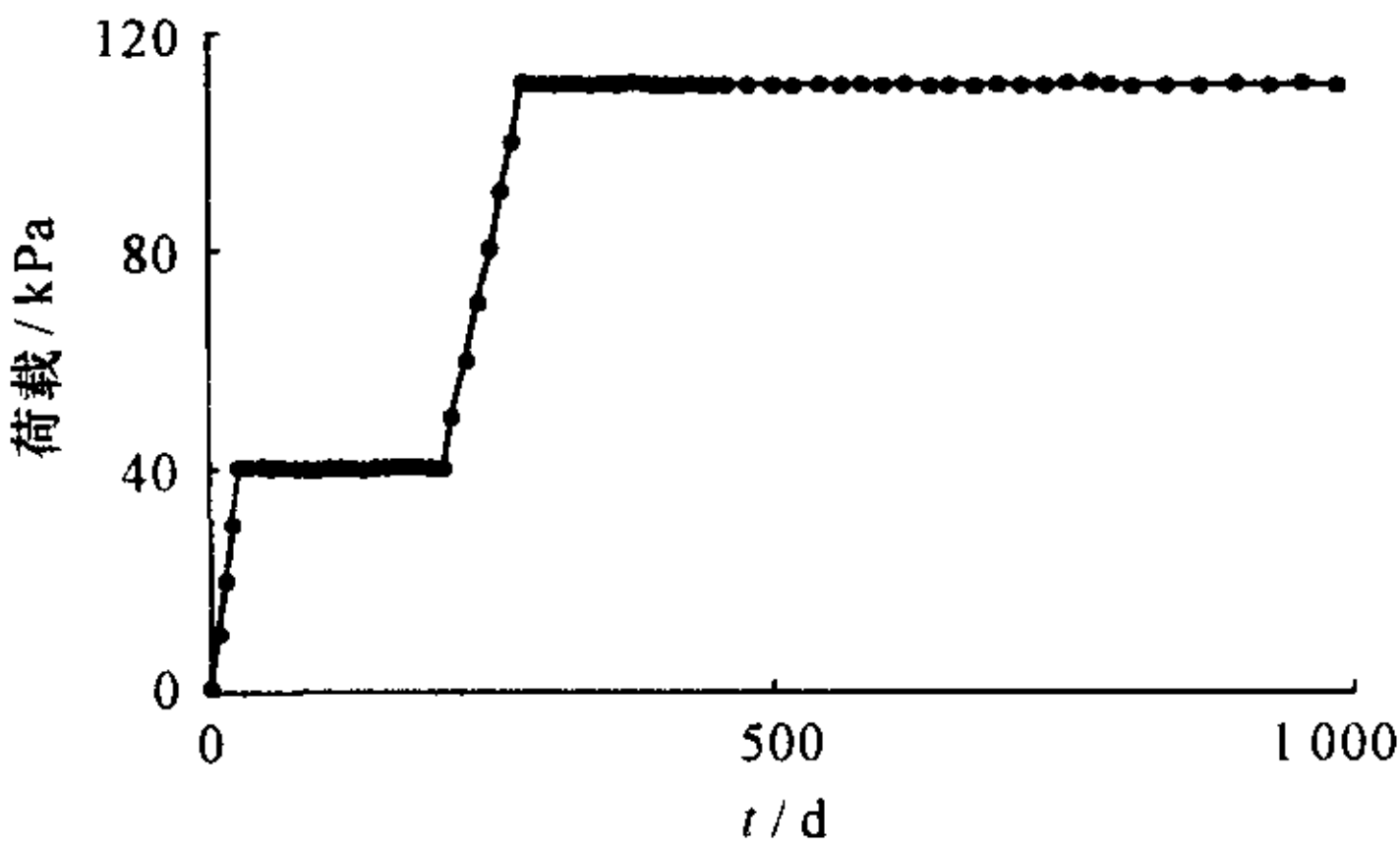


图 2 荷载历时曲线

2.1 地表沉降与偏差分析

5 个典型时刻的地表沉降规律以及不同差分格式之间的相对偏差,分别如图 3(a)和图 3(b)所示。由图 3(a)可见,3 种差分格式的计算结果非常相近。从图 3(b)可以更清楚的看到三者之间相对偏差的变化规律。其中的 1 个特点是 3 种格式在固结初期的相对偏差较大,而在固结后期则偏差较小。

路基表面不同位置处的相对偏差变化范围如表 1 所示。在坡脚处偏差较大,这可能与该处土体发生较大的剪切变形有关。中心差分的偏差程度一般要大于 Galerkin 差分。

表 1 地表沉降量的相对偏差 /%

位置		路堤内侧	坡脚附近	路堤外侧
格 式	θ=1/2	-0.06~0.9	-7.5~10.0	-1.9~0.06
	θ=2/3	-0.04~0.6	-5.0~6.6	-1.2~0.04



以地表中心为典型考察点,分析其在时间域内的沉降发展规律,以及相对偏差的变化规律,如图 4 (a)、(b)所示。由图 4(a)可见,3 种格式反映的沉降-时间的规律基本一致。在每级加荷期,三者的相对偏差较大;而在随后的停荷期,该偏差逐渐减小;图 4(b)清楚地揭示了这一现象。这可能是因为土体在加荷期沉降较快,而在停荷期变形速率有所降低的缘故。从图 4(b)还可以看到,中心差分

kin 差分的相对偏差由固结初期的正值逐渐在固结中后期变为负值,说明两者计算的地基沉降速率在固结前期偏慢,而在固结后期则稍微偏快。

2.2 侧向位移与偏差分析

土体侧移对周围环境的影响较大,这里针对 2 个典型断面(地下 5 m 处的典型水平面和过坡脚的典型竖直面)和 1 个典型点(坡脚点),分析侧移值及其偏差的分布规律,分别如图 5~图 7 所示。

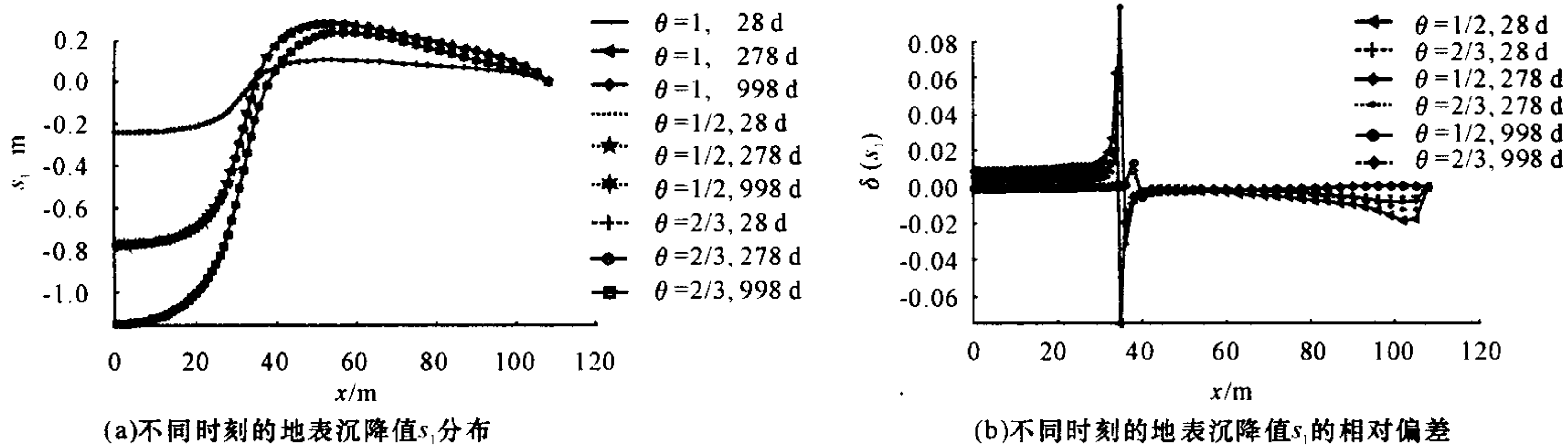


图 3 不同时刻的地表沉降

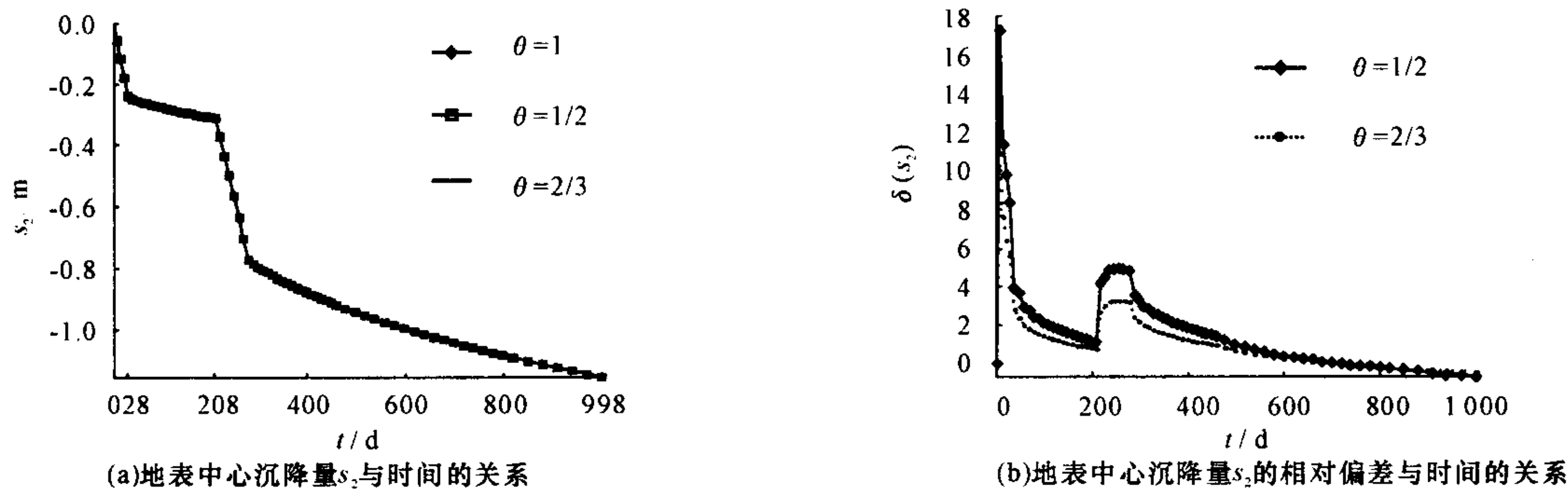


图 4 地表中心沉降量

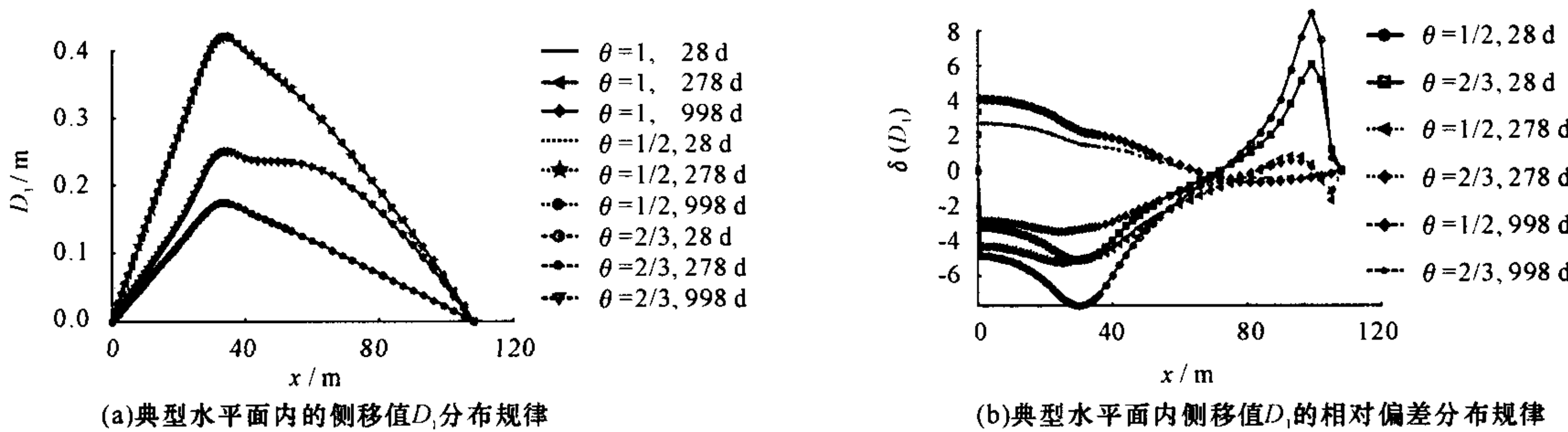


图 5 典型水平面内的侧移

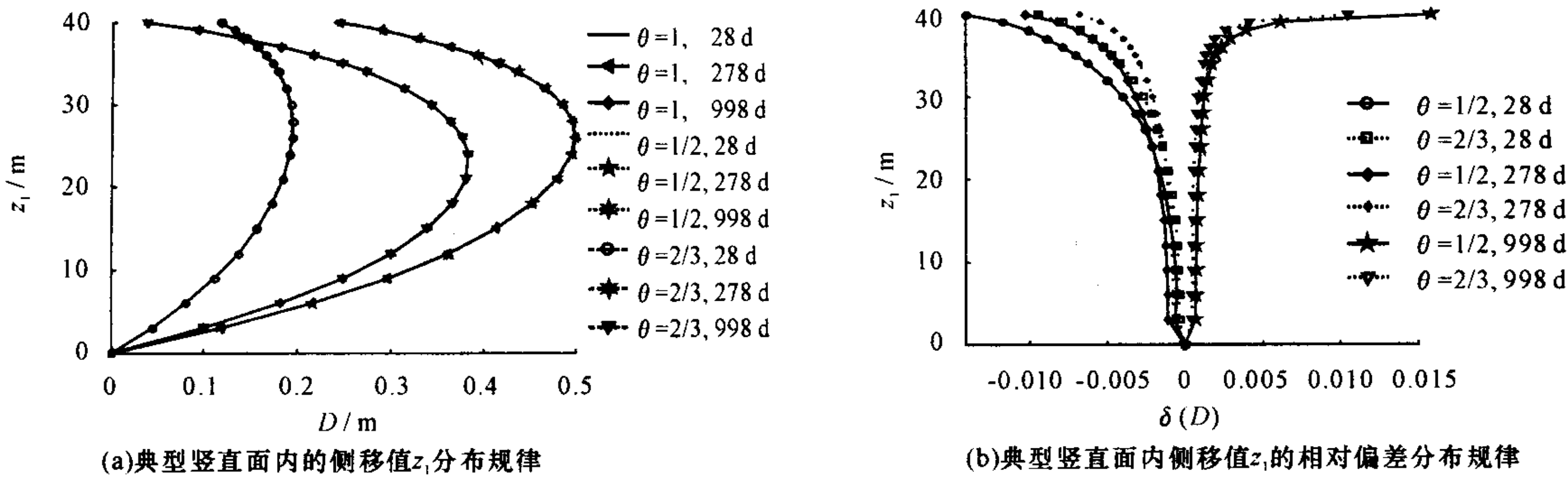


图 6 典型竖直面内的侧移

3 种差分格式计算的侧移规律是一致的,这可从图 5(a)、图 6(a)和图 7(a)中看出。由图 3(b)、图 4(b)和图 5(b)可见:①侧移值的相对偏差与固结过程有关;②中心差分的偏差程度总体上要大于 Galerkin 差分。其中,由图 5(b)可见,在固结初期,从对称中心至外侧约 70 m 以内的范围内,中心差分 and Galerkin 差分的偏差是负值,而在此范围以外则为正值;在固结后期的规律刚好相反。由图 6(b)可见,坡脚竖直面内上部土体的相对偏差较大,而下部土体的相对偏差则较小;随着固结发展,相对偏差将由负值变为正值。

由图 7(a)可见,坡脚的侧移在加荷期上升较快,而在停荷期则有所降低,说明延长停荷期利于地基稳定。从图 7(b)可见,相对偏差在初始时刻最大,随着固结过程而降低;在第二级加荷期间,相对偏差有所增大,然后逐渐变小;在固结后期,三者的相对偏差由负值变成正值,并有逐渐增大的趋势。

不同差分格式计算的侧移值的相对偏差范围如表 2 所示。

表 2 侧向位移的相对偏差					/%	
位置		内侧	外侧	上部	下部	
格 式	$\theta=1/2$	-0.8~0.4	-0.2~0.9	-1.4~1.5	-0.5~0.13	
	$\theta=2/3$	-0.5~0.3	-0.1~0.6	-0.9~1.0	-0.3~0.09	

2.3 超静孔压及其相对偏差分析

选择路基中心对称面和该面内地下 5 m 处的典型点来考察超静孔压在空间和时间域的变化规律。

由图 8(a)、图 9(a)可见,不同格式计算的超静孔压在空间和时间域内的变化规律基本一致。由图 8(b)、图 9(b)看出:①相对偏差随固结过程而变化;②中心差分的偏差程度总体上大于 Galerkin 差分;③上部土体的相对偏差较大,而下部土体较小;④典型点在加荷期的相对偏差为负值,而在停荷期的相对偏差为正值。

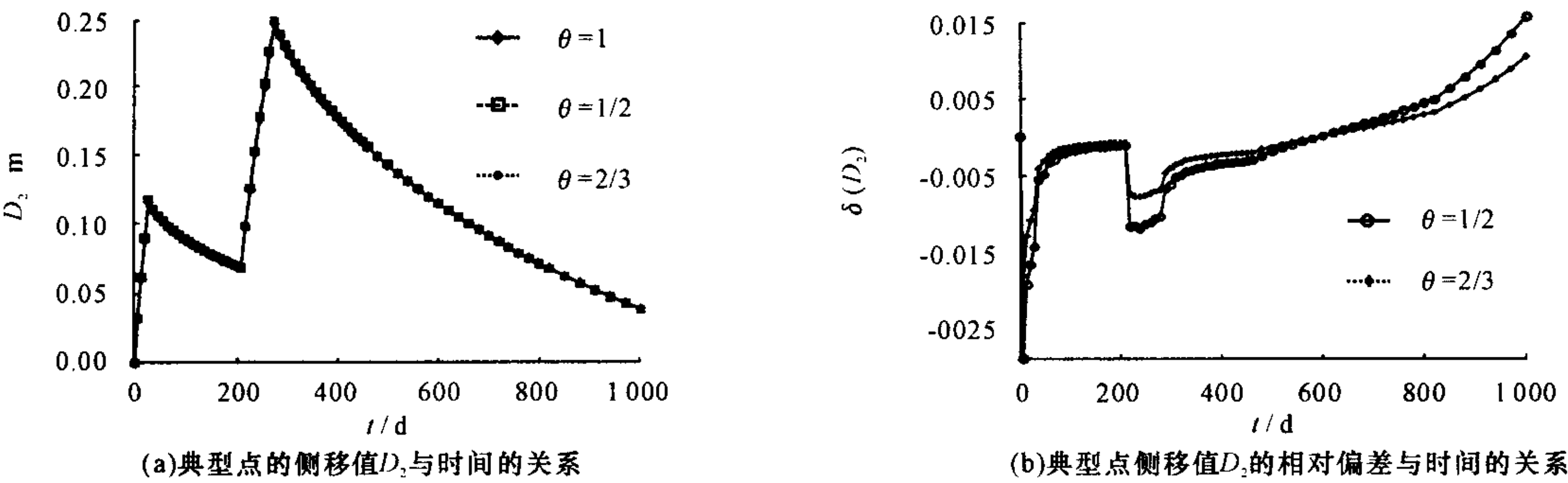


图 7 典型点的侧移

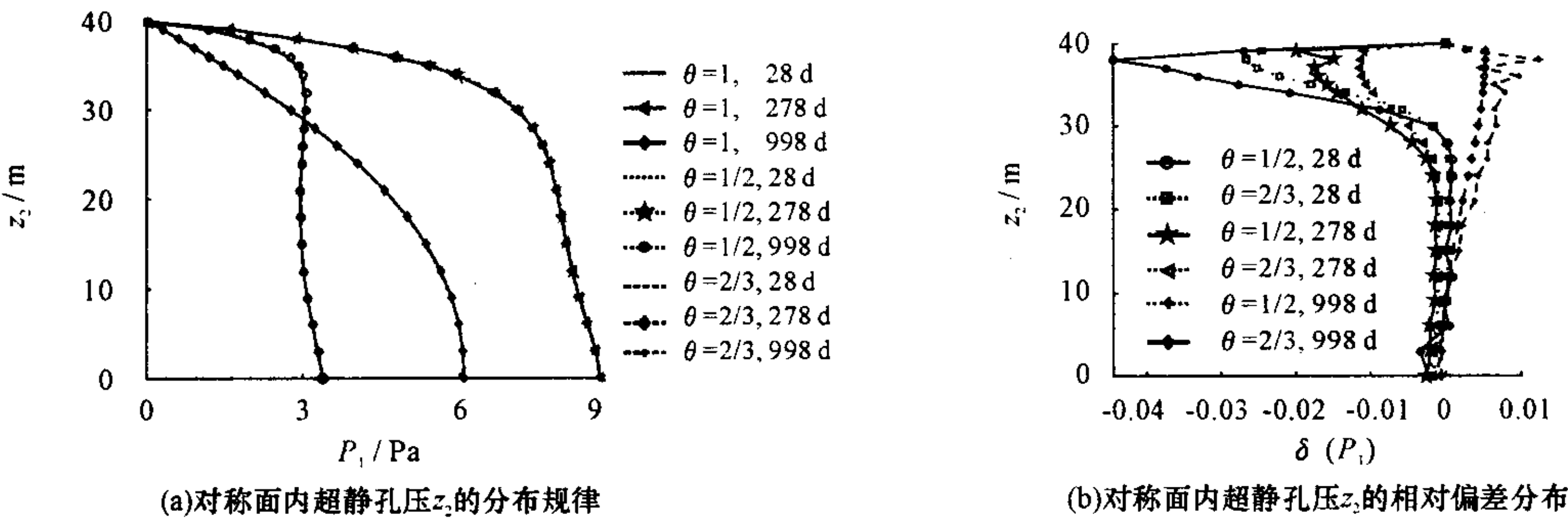


图 8 对称面内超静孔压

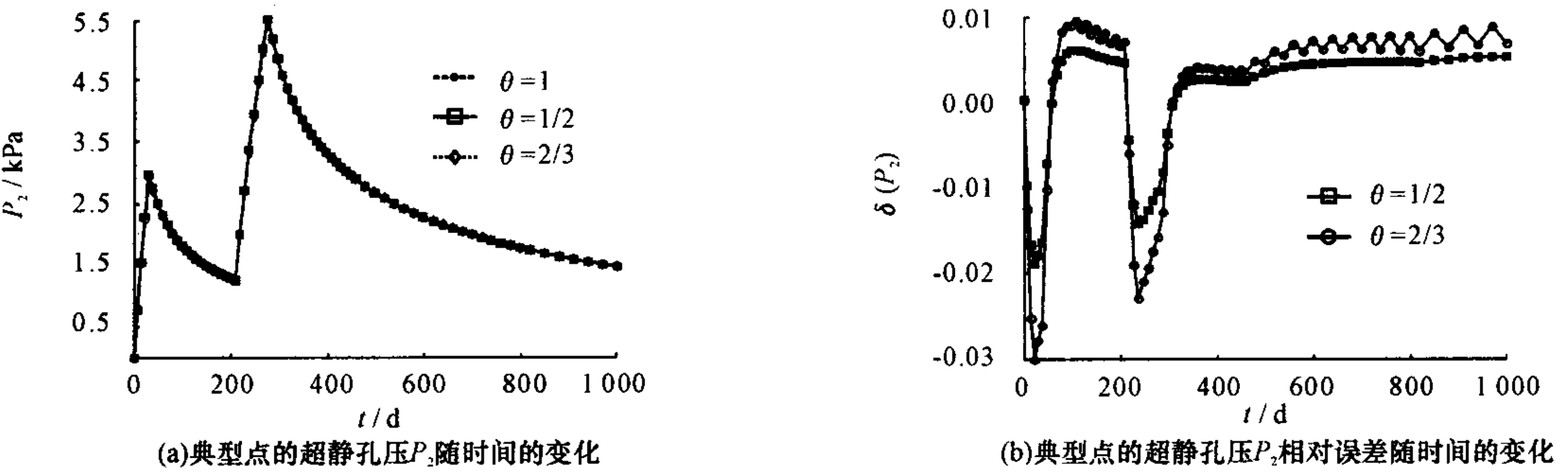


图 9 典型点的超静孔压



对称面内超静孔压的偏差范围如表 3 所示。

表 3 超静孔压的相对偏差 /%

位置		上部土体	下部土体
格 式	$\theta=1/2$	-4.5~1.2	-1.0~0.7
	$\theta=2/3$	-2.7~0.5	-0.5~0.4

3 结 语

(1)3 种差分格式预测的路基沉降、侧向变形和超静孔压的发展规律基本一致,彼此之间的绝对误差也较小。这说明工程计算中不会因为选择的差分格式不同而产生太大影响。在要求不高的条件下,工程分析中可以选择差分格式,而不必拘限于某一文献给出的形式。

(2)不同差分格式的相对偏差与固结过程有关。一般而言,中心差分和 Galerkin 差分计算的路基中心沉降在固结初期偏小,在固结后期则稍微偏大;而对于侧向位移和超静孔压,其规律在总体上刚好相反。差分格式对超静孔压和坡脚附近的竖向变形的影响程度较为明显。

(3)中心差分的偏差范围一般要大于 Galerkin 差分的相应范围。

参考文献:

References:

[1] Biot M A. General theory of three-dimensional consolidation[J]. J Appl Phys, 1941, 12: 155-164.

[2] Sandhu R S, Wilson E L. Finite element analysis of seepage in elastic media[J]. J Eng Mech Div ASCE,

1969, 95(3):641-652.

[3] 沈珠江. 用有限单元法计算软土地基的固结变形[J]. 水利水运科技情报, 1977, (1): 7-23.

SHEN Zhu-jiang. Predicting consolidation deformation of soft foundation using finite element method [J]. Journal of Nanjing Hydraulic Research Institute, 1977, (1): 7-23.

[4] 龚晓南. 土工计算机分析[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2000.

GONG Xiao-nan. Numerical methods in geotechnical engineering[M]. Beijing: China Architecture and Building Press, 2000.

[5] Small J C, Booker J R, Davis E H. Elasto-plastic consolidation of soil [J]. Int J Solids Structures, 1976, 12: 431-448.

[6] 杨 虹, 高 萍, 谢永利. 填土路堤下复合地基性状[J]. 长安大学学报(自然科学版), 2003, 23(5): 18-20.

YANG Hong, GAO Ping, XIE Yong-li. Properties of soil for embankment composite foundation[J]. Journal of Chang'an University (Natural Science Edition), 2003, 23(5): 18-20.

[7] 冯瑞玲, 谢永利, 方 磊. 柔性基础下复合地基的数值分析[J]. 中国公路学报, 2003, 16(1): 40-43.

FENG Rui-ling, XIE Yong-li, FANG Lei. Numerical analysis of the composite ground under the flexible foundation[J]. China Journal of Highway and Transport, 2003, 16(1): 40-43.

[8] 景宏君, 张 斌. 黄土路基强度规律[J]. 交通运输工程学报, 2004, 4(2): 14-18.

JING Hong-jun, ZHANG Bin. Loess subgrade strength law[J]. Journal of Traffic and Transportation Engineering, 2004, 4(2): 14-18.

《长安大学学报》(自然科学版)2005 年征订通知

《长安大学学报》(自然科学版)系中华人民共和国教育部主管,长安大学主办的学术性双月刊,她在中国乃至世界范围内的公路交通科技领域具有广泛的影响,她是中国期刊方阵“双效”期刊,国务院学位委员会、国家教育部学位与研究生教育中文重要期刊,《中文核心期刊要目总览》(第四版)鉴定的中国公路运输类核心期刊,中国科技论文统计源期刊(中国科技核心期刊),Ei(Page One 数据库)固定刊源,国际道路科研信息(IRRD)书目文献数据库固定刊源,中国道路文献服务中心(CRDS)核心报道期刊,自 1981 年创刊以来多次获国家交通部和陕西省奖励。

《长安大学学报》(自然科学版)以繁荣公路交通科技为己任,促进公路交通科技交流和转化。她主要刊载道路工程、桥梁工程、交通工程、隧道工程、汽车工程、筑路机械、交通控制、交通运输管理、基础学科等具有国内先进水平的论文,同时刊载公路交通科技动态方面的简要评述和通讯。

《长安大学学报》(自然科学版)的主要读者对象为大专院校师生、公路交通科研人员、公路交通管理决策人员、公路交通领域的勘测、设计和施工单位的技术人员。

《长安大学学报》(自然科学版)全年 6 期,大 16 开本,112 页,欢迎订阅,各地读者可在当地邮局订阅,每期定价 10.00 元,全年定价 60.00 元。

地 址:西安市南二环路中段,《长安大学学报》(自然科学版)编辑部

电 话:(029)82334383

国内邮发代号:52-137

国外发行代号:BM5720

E-mail:xuebao@chd.edu.cn

邮政编码:710064