

# 基于分层 Logit 的多方式随机用户均衡分配模型

刘诗序<sup>1</sup>,池其源<sup>2</sup>,阎 昊<sup>1</sup>,郭丽丹<sup>1</sup>,唐颖诺<sup>1</sup>,严 海<sup>3</sup>

(1. 福州大学 土木工程学院,福建 福州 350116; 2. 福建省高速技术咨询有限公司,福建 福州 350108;  
3. 北京工业大学 北京城市交通协同创新中心,北京 100124)

**摘 要:**为了完善现有的交通分配模型,综合考虑出行者的方式选择与路径选择行为,建立了基于分层 Logit 的多方式随机用户均衡分配模型。首先,在多方式交通网络中,根据出行者出行决策的 2 个步骤,即首先选择合适的交通出行方式、然后选择该方式交通网络中的出行路径,采用分层 Logit 模型描述出行者的交通方式和路径联合选择行为。在建立的分层 Logit 模型中,出行效用与流量分布相互制约,出行效用受路网流量影响,而路网流量由效用所决定,最终要达到平衡。接着,构造了一个数学规划模型来求平衡解,证明数学规划模型的最优解与分层 Logit 模型的流量解等价,并进一步证明等价数学规划模型的目标函数是凸的,而约束集也是凸的,因此等价数学规划模型是一个凸规划问题,模型的解是唯一的。随后,给出了求解提出的基于分层 Logit 的多方式随机用户均衡分配模型改进的方向搜索算法步骤。最后,以含公交车和小汽车 2 种方式的方格形路网为算例,分析公交票价、出行者的时间价值和分层 Logit 模型的层间比例参数的变化对交通分配结果的影响。结果表明:公交车票价对流量分配的影响不大;公交需求量随出行者时间价值的增加而下降;当出行者的时间价值较低时,公交需求量随分层 Logit 模型的层间比例参数增加而增加,当出行者的时间价值较高时,公交需求量随分层 Logit 模型的层间比例参数的增加而减小。

**关键词:**交通工程;随机用户均衡;Logit 模型;多方式网络;路径选择行为

**中图分类号:**U491 **文献标志码:**A

## Multimodal stochastic user equilibrium model based on nested Logit

LIU Shi-xu<sup>1</sup>, CHI Qi-yuan<sup>2</sup>, YAN Hao<sup>1</sup>, GUO Li-dan<sup>1</sup>, TANG Ying-nuo<sup>1</sup>, YAN Hai<sup>3</sup>

(1. School of Civil Engineering, Fuzhou University, Fuzhou 350116, Fujian, China; 2. Fujian Provincial Expressway Technology Consulting Co., Ltd., Fuzhou 350108, Fujian, China; 3. Beijing Collaborative Innovation Center for Metropolitan Transportation, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China)

**Abstract:** In order to improve the current urban traffic assignment models, a multimodal stochastic user equilibrium model based on nested Logit was proposed, considering the behaviors of mode choice and route choice. Firstly, in a multimodal traffic network, a nested Logit model was proposed to describe the behavior of the combined traffic mode and route choice, according to the two steps of a traveler's travel decision (he or she chooses an appropriate traffic mode and then chooses a route in the traffic network). In the proposed nested Logit model, the utility and traffic flow distribution were mutually restricted, the utility of the travel was influenced by the

收稿日期:2018-01-30

基金项目:国家自然科学基金项目(51308126,51308018);福建省教育厅中青年教师教育科研项目(JAT170065);

北京市属高等学校人才强教计划项目

作者简介:刘诗序(1983-),男,湖北大冶人,讲师,工学博士,E-mail:37815671@qq.com。

network traffic flow, and the traffic flow was determined by the utility, thus leading to equilibrium. Therefore, a mathematical programming model for finding the equilibrium solution was developed in this study. It was proved that the optimal solution of the mathematical programming model and the flow solution of the nested Logit model were equivalent. It was further proved that both the objective function of the equivalent mathematical programming model and the constraint set were convex. Therefore, the equivalent mathematical programming model was a convex programming problem, and the solution of the model was unique. Subsequently, the step of improved the direction search algorithm was given to solve the proposed multimodal stochastic user equilibrium assignment model based on nested Logit. Finally, a case study of a grid network with two modes, namely bus and car, was carried out to analyze the impact of bus fare, traveler's time value, and the interlayer ratio parameter of the nested Logit model on traffic assignment results. The results show that the changes in bus fare have little effect on the traffic assignment results, and that bus demand decreases with increase in travelers' time value. When the travelers' time value is low, the bus demand increases with increase in the interlayer ratio parameter of the nested Logit model, whereas when the travelers' time value is high, the bus demand decreases with increase in the interlayer ratio parameter of the nested Logit model. 2 tabs, 7 figs, 20 refs.

**Key words:** traffic engineering; stochastic user equilibrium; Logit model; multi-modal network; route choice behavior

## 0 引言

自 Wardrop 提出了用户均衡 (user equilibrium, UE) 原则<sup>[1]</sup>, 学者在此基础上对均衡分配做了大量研究<sup>[2]</sup>, Boyce 对早期的平衡分配问题建模和算法发展历史做了全面的评述<sup>[3]</sup>。随着对用户均衡的假设不断放宽, 如果出行者不完全了解交通系统, 其路段理解时间与实际存在偏差, Daganzo 等提出了随机用户平衡原则 (stochastic user equilibrium, SUE)<sup>[4]</sup>, 由此从用户均衡模型的研究扩展到随机用户均衡模型。Sheffi 提出了 SUE 的等价无约束数学规划模型, 并设计了求解 SUE 等价数学规划模型的相继平均法 (method of successive averages, MSA), 假设出行者效用的随机项服从不同的分布, 可以得到不同的 SUE 模型, 典型的 SUE 模型有 probit 和 Logit 两种<sup>[5]</sup>。随后, 学者对 SUE 模型进行了大量研究<sup>[6-7]</sup>, 尤其对 Logit 的 SUE 模型做了很多扩展, 如 Prashker 等构建了基于广义分层 Logit (generalized nested Logit, GNL) 的随机用户均衡分配模型<sup>[8]</sup>, Bekhor 等构建了基于交叉分层 Logit 模型 (crossed nested Logit, CNL) 的随机用户均衡分配模型<sup>[9]</sup>。

上述文献论述了单一交通方式 (小汽车) 下的交通分配模型的构建, 但是对交通网络中存在多种交

通方式下的交通分配问题考虑不够, 在实际中, 人们的出行会采用多种交通方式, 如公共交通、小汽车等, 因此, 多方式下的交通分配问题亟待解决。针对此问题, 学者构建了交通方式与路径联合选择概率模型以及网络均衡分配模型。四兵锋等构建了多项 Logit (multinomial Logit, MNL) 模型来分析多方式网络下的方式和路径选择行为, 但所采用的 MNL 模型具有不相关备选方案的独立性 (independence of irrelevant alternatives, IIA) 特性<sup>[10]</sup>。Ryu 等提出方式划分与分配组合模型中存在 2 种不同阻抗函数的解决办法, 并构建了方式划分与交通分配组合模型<sup>[11]</sup>。张锐等构建了出行方式和路径联合选择的分层 Logit (nested Logit, NL) 模型<sup>[12]</sup>。Wu 等构建了弹性需求下的多方式交通分配变分不等式模型<sup>[13]</sup>。但这些研究并未针对交通方式-路径联合选择模型建立等价的数学规划模型。Friesz 提出了交通分布、方式划分、交通分配联合选择的组合模型<sup>[14]</sup>, Safwat 在此基础上加入了交通发生, 构建了联合交通发生、交通分布、方式划分、交通分配的四阶段组合模型, 但是这 2 个组合模型中的交通分配均为用户均衡分配, 并非随机用户均衡分配<sup>[15]</sup>。Lo 等构建了交通方式及路径联合选择模型<sup>[16]</sup>, 其与 Zhou 等提出的四阶段组合模型<sup>[17]</sup>相似, 都采用多层 Logit 结构, 但其效用中均未考虑仅随交通方

式变化的固定项。陈坚等建立了两层次三随机用户平衡的多方式弹性需求随机用户平衡分配模型,但其研究假设交通网络中仅含公交车和小汽车 2 种特定的交通方式<sup>[18]</sup>。胡文君等基于 CNL 模型建立了多用户模式随机用户网络均衡模型,路径选择采用克服 MNL 模型的不相关备选方案独立属性的 CNL 模型,但其研究假设交通网络中只有小汽车、公交车和自行车 3 种交通方式<sup>[19]</sup>。

从上述文献可以看出,对于多方式网络的方式及路径联合选择概率模型主要为 MNL,但是 MNL 模型忽略了不同出行方式间的相互作用,为了克服 MNL 模型的 IIA 特性,学者们将 NL 模型用在多方式随机用户均衡分配的研究中,但是建立的模型中效用函数的表达不具有一般性,交通网络中假设的交通方式也有限,所建立的等价数学规划模型不具有普适性。因此,本文在考虑多交通方式的路网中,综合考虑出行者的方式选择与路径选择行为,效用中考虑仅随交通方式选择变化的固定项,并且假设交通网络中存在任意种交通方式,基于一般的 NL 模型建立多方式路径选择模型,并建立与之等价的数学规划模型,通过算例对模型进行分析。

## 1 交通方式和路径联合选择 NL 模型

出行者在多方式网络中出行时,其出行决策主要有 2 个步骤:①出行者选择合适的交通出行方式;②出行者选择该方式交通网络中的出行路径。因此,针对多交通方式网络所对应的出行决策行为,可以构建 NL 模型的选择树,如图 1 所示。

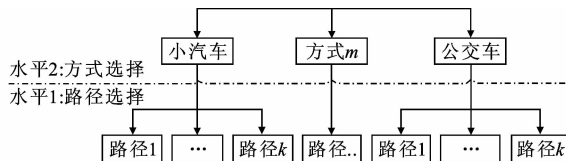


图 1 NL 模型结构

Fig. 1 NL model structure

由随机效用理论,出行者  $n$  选择方案  $(km)$  时的效用  $U_{kmn}$  为

$$U_{kmn} = V_{(k|m)n} + V_{nm} + \xi_{(k|m)n} + \xi_{nm} \quad (1)$$

式中: $V_{(k|m)n}$  为出行者  $n$  在选择了方案  $(km)$  时,效用随由  $(km)$  和方式  $m$  的组合变化部分的固定项; $V_{nm}$  为出行者  $n$  选择了方案  $(km)$  时,效用中与路径  $k$  无关,而仅随方式  $m$  变化部分的固定项; $\xi_{(k|m)n}$  为在选择了方式  $m$  条件下,选择  $(km)$  的效用的概率项, $\xi_{nm}$  为选择方式  $m$  的效用的概率项。

设这 2 个概率项服从 Gumbel 分布。出行者选

择交通方式  $m$ ,并且同时选择该方式中的路径  $k$  概率为

$$P_{n(km)} = P_{n(k|m)} P_{n(m)} \quad (2)$$

式中: $P_{n(k|m)}$  为出行者  $n$  在选择交通方式  $m$  下选择路径  $k$  的概率,计算公式见式(3); $P_{n(m)}$  为出行者  $n$  选择交通方式  $m$  的概率,其值受各交通方式效用函数以及该交通方式  $m$  中的路径选择层影响,选择概率见式(4)

$$P_{n(k|m)} = \frac{\exp(\lambda_1 V_{(k|m)n})}{\sum_k \exp(\lambda_1 V_{(k|m)n})} \quad (3)$$

$$P_{n(m)} = \frac{\exp(\lambda_2 (V_{nm} + V_{nm}^*))}{\sum_m \exp(\lambda_2 (V_{nm} + V_{nm}^*))} \quad (4)$$

$$V_{nm}^* = \frac{1}{\lambda_1} \ln \left[ \sum_k \exp(V_{(k|m)n}) \right] \quad (5)$$

式中: $\lambda_1$ 、 $\lambda_2$  分别为上下层随机效用项概率分布方差相关的参数。

$\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$  为 NL 模型的层间比例参数,满足: $\lambda_1 > 0$  且  $0 < \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \leq 1$ 。若  $\lambda_1 = 1$ ,则  $\lambda_2 \leq 1$ 。当  $\lambda_1 = \lambda_2$  时,NL 模型退化为 MNL 模型。 $V_{nm}^*$  为合成变量,它表示下层(路径选择)对上层(方式选择)的影响变量,一般形式的 NL 模型将  $V_{nm}^*$  作为上层的一个影响变量,其他变量为  $V_{nm}$ 。在 CNL、GNL 模型中,参数特殊化可以变成 NL 模型,但是这种 NL 模型的上层效用只有影响变量  $V_{nm}^*$ ,而无与路径选择无关仅随方式选择变化的影响变量  $V_{nm}$ 。在以往研究中常把  $V_{nm}$  这一项忽略了。

由于 NL 模型结构复杂,模型中的效用与流量分布相互制约:出行效用受路网流量影响,而路网流量由效用所决定,最终要达到平衡。对于复杂的交通网络,通过联立方程组的方法无法求得路网的平衡解,下文通过建立等价数学规划模型来求平衡解。

## 2 多方式随机用户均衡分配等价数学规划模型

假设以赋权有向图  $G(N, A)$  表示多方式交通网络系统,其中  $N$  为交通网络中的所有节点集合, $A$  为交通网络中的所有路段集合。 $W$  为交通网络中的所有 OD 对集合, $w$  为路网的 1 个 OD 对, $w \in W$ 。 $M$  为交通方式的集合, $m \in M$ 。 $K$  为所有的路径选择集, $K_m$  为交通方式  $m$  之间的有效路径集合, $k \in K$ 。 $x_{a,m}$  表示路段  $a$  上以  $m$  方式出行的流量。 $q^w$  为 OD 对  $w$  间的出行需求量,本文设为定值。 $q_m^w$  为

OD 对  $w$  之间交通方式  $m$  出行需求量。 $f_{km}^w$  为 OD 对  $w$  之间选择方式  $m$  且选择路径  $k$  的流量。针对分层 Logit 模型,假设所有出行者的效用有相同的形式,效用如下

$$V_{(k|m)} = \sum_a V_{a,m}(x_{a,m}) \delta_{a,m,k} \quad (6)$$

$$V_{(m)} = V_m(q_m^w) \quad (7)$$

式中: $V_{(k|m)}$  为出行者选择了方式  $m$  条件下,选择路径  $k$  的效用; $V_{(m)}$  为出行者选择方式  $m$  共同效用部分,与路径无关; $V_{a,m}(x_{a,m})$  为以方式  $m$  出行时在路段  $a$  上的出行效用; $V_m(q_m^w)$  为仅随方式  $m$  变化而与路径无关的效用,一般地, $V_{a,m}(x_{a,m})$  和  $V_m(q_m^w)$  都是减函数; $\delta_{a,m,k}$  为若以  $m$  方式出行选择的路径  $k$  经过路段  $a$  时,则为 1,否则为 0,  $\forall w \in W, \forall m \in M, \forall k \in K$ 。

参考已有文献的交通均衡分配模型建模思路<sup>[6-9,14-19]</sup>,构造如下数学规划模型

$$\begin{aligned} \min Z(f, q) = & \frac{1}{\lambda_1} \sum_{w \in W} \sum_{m \in M} \sum_{k \in K} f_{(k|m)}^w \ln(f_{(k|m)}^w) - \\ & \sum_{m \in M} \sum_{a \in A} \int_0^{x_{a,m}} V_{a,m}(\omega) d\omega - \sum_{w \in W} \int_0^{q_m^w} V_m(\tau) d\tau + \\ & \frac{1}{\lambda_2} \left[ \sum_{w \in W} \sum_{m \in M} q_m^w (\ln q_m^w - 1) \right] - \\ & \frac{1}{\lambda_1} \sum_{w \in W} \sum_{m \in M} q_m^w (\ln(\sum_{k \in K} f_{(k|m)}^w)) \end{aligned} \quad (8)$$

s. t.

$$q_m^w = \sum_{k \in K} f_{(k|m)}^w \quad (9)$$

$$q^w = \sum_{m \in M} q_m^w \quad (10)$$

$$x_{a,m} = \sum_{w,k} \delta_{a,m,k}^w f_{(k|m)}^w \quad (11)$$

$$f_{(k|m)}^w \geq 0 \quad (12)$$

$$q_m^w \geq 0 \quad (13)$$

式中: $Z(f, q)$  为模型函数; $f$  为所有路径流量  $f_{(k|m)}^w$  组成的向量; $q$  为所有方式流量  $q_m^w$  组成的向量,  $\forall w \in W, \forall m \in M$ 。

式(8)为模型的目标函数,本身无直观的经济含义,其构建目的是为了便于求解基于 NL 的随机用户均衡分配解。式(9)、式(10)表示路径流量与 OD 需求量的关系,式(11)表示路径流量与路段流量之间的关系,式(12)、式(13)表示路径流量的非负约束。需说明的是,已有研究没有考虑随方式  $m$  变化而与路径无关的效用  $V_m(q_m^w)$ ,得到的数学规划模型和本文模型完全不同,本文模型具有一般性。

当 GNL 模型的各巢系数相等且各方案属于巢的程度系数取 0 或 1 时, CNL 中各方案属于巢的程

度系数取 0 或 1 时,2 个模型对应的等价数学规划模型可转化为 NL 模型,但转化的 NL 模型与本文模型并不等价,其缺少仅随方式选择变化的效用。

注意到,构造的等价数学规划模型[式(8)~式(13)]应满足:模型的一阶条件(驻点)应等价于基于 NL 的交通方式-路径联合选择模型,并且模型的驻点只有 1 个。下文对此予以证明。

### 3 模型的等价性与唯一性证明

#### 3.1 等价性

为证明模型等价性,首先构造 Lagrange 函数

$$\begin{aligned} L = & Z + u_m \sum_{w \in W} (q_m^w - \sum_{k \in K} f_{(k|m)}^w) + \\ & u_w \sum_{w \in W} (q^w - \sum_{m \in M} q_m^w) \end{aligned} \quad (14)$$

式中: $u_m$ 、 $u_w$  分别为其对应约束条件式的 Lagrange 乘子。

考虑到  $x_{a,m} = \sum_{w,k} \delta_{a,m,k}^w f_{(k|m)}^w$ , 因此

$$\frac{\partial x_{a,m}}{\partial f_{(k|m)}^w} = \delta_{a,m,k}^w \quad (15)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_{a,m}} \int_0^{x_{a,m}} V_{a,m}(\omega) d\omega = V_{a,m}(x_{a,m}) \quad (16)$$

$$\frac{\partial}{\partial f_{(k|m)}^w} \sum_{a \in A} \int_0^{x_{a,m}} V_{a,m}(\omega) d\omega =$$

$$\sum_{a \in A} \frac{\partial x_{a,m}}{\partial f_{(k|m)}^w} \frac{\partial}{\partial x_{a,m}} \int_0^{x_{a,m}} V_{a,m}(\omega) d\omega =$$

$$\sum_{a \in A} \delta_{a,m,k}^w V_{a,m}(x_{a,m}) = V_{(k|m)} \quad (17)$$

由根据数学规划一阶条件(Kuhn-Tucker 条件)可得

$$\frac{\partial L}{\partial f_{(k|m)}^w} = -V_{(k|m)} + \frac{1}{\lambda_1} \ln(f_{(k|m)}^w) - u_m \geq 0 \quad (18)$$

$$\frac{\partial L}{\partial f_{(k|m)}^w} f_{(k|m)}^w = (-V_{(k|m)} +$$

$$\frac{1}{\lambda_1} \ln(f_{(k|m)}^w) - u_m) f_{(k|m)}^w = 0 \quad (19)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_m^w} = -V_{(m)} + \frac{1}{\lambda_2} \ln(q_m^w) -$$

$$\frac{1}{\lambda_1} \ln(\sum_{k \in K} f_{(k|m)}^w) + u_m - u_w \geq 0 \quad (20)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_m^w} q_m^w = (-V_{(m)} + \frac{1}{\lambda_2} \ln(q_m^w) -$$

$$\frac{1}{\lambda_1} \ln(\sum_{k \in K} f_{(k|m)}^w) + u_m - u_w) q_m^w = 0 \quad (21)$$

根据式(18)、式(19),可得

$$-V_{(k|m)} + \frac{1}{\lambda_1} \ln(f_{(k|m)}^w) - u_m = 0 \quad (22)$$

$$f_{(k|m)}^w = \exp[\lambda_1 (V_{(k|m)} + u_m)] \quad (23)$$

$$q_m^w = \sum_{k \in R} f_{(k|m)}^w = \sum_{k \in K} \exp[\lambda_1 (V_{(k|m)} + u_m)] \quad (24)$$

$$f_{(k|m)}^w = q_m^w \frac{\exp[\lambda_1 (V_{(k|m)} + u_1)]}{\sum_{k \in K} \exp[\lambda_1 (V_{(k|m)} + u_1)]} = q_m^w \frac{\exp(\lambda_1 V_{(k|m)})}{\sum_{k \in K} \exp(\lambda_1 V_{(k|m)})} \quad (25)$$

同理,由式(20)、式(21)可得

$$-V_{(m)} + \frac{1}{\lambda_2} \ln q_m^w - \frac{1}{\lambda_1} \ln \left( \sum_{k \in K} f_{(k|m)}^w \right) + u_m - u_w = 0 \quad (26)$$

$$q_m^w = \exp \left[ \lambda_2 \left( V_{(m)} + \frac{1}{\lambda_1} \ln \left( \sum_{k \in K} f_{(k|m)}^w \right) - u_m + u_w \right) \right] \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \ln \sum_{k \in K} f_{(k|m)}^w &= \ln \left\{ \sum_{k \in K} \exp[\lambda_1 (V_{(k|m)} + u_m)] \right\} = \\ &= \ln \left\{ \exp(\lambda_1 u_m) \left[ \sum_{k \in K} \exp(\lambda_1 V_{(k|m)}) \right] \right\} = \\ &= \lambda_1 u_m + \ln \left[ \sum_{k \in K} \exp(\lambda_1 V_{(k|m)}) \right] \end{aligned} \quad (28)$$

将式(28)代入式(26)得

$$q_m^w = \exp \left[ \lambda_2 \left( V_{(m)} + \frac{1}{\lambda_1} \ln \left( \sum_{k \in K} (\lambda_1 V_{(k|m)}) + u_w \right) \right) \right] \quad (29)$$

$$q^w = \sum_{w \in W} q_m^w = \sum_{w \in W} \exp \left[ \lambda_2 \left( V_{(m)} + \frac{1}{\lambda_1} \ln \left( \sum_{k \in K} (\lambda_1 V_{(k|m)}) + u_w \right) \right) \right] \quad (30)$$

$$\begin{aligned} q_m^w &= q^w \exp \left[ \lambda_2 \left( V_{(m)} + \frac{1}{\lambda_1} \ln \left( \sum_{k \in K} (\lambda_1 V_{(k|m)}) \right) \right) \right] \cdot \\ &\quad \left\{ \sum_{w \in W} \exp \left[ \lambda_2 \left( V_{(m)} + \frac{1}{\lambda_1} \ln \left( \sum_{k \in K} (\lambda_1 V_{(k|m)}) \right) \right) \right] \right\}^{-1} \end{aligned} \quad (31)$$

由式(25)可知数学规划模型[式(8)~式(13)]的最优解满足分层 Logit 模型的概率选择式(3),由式(31)可知该数学规划模型的最优解也满足分层 Logit 模型的概率选择式(4),因此,该数学规划模型的最优解与分层 Logit 模型的流量解等价,其等价性满足要求。

### 3.2 唯一性

等价数学规划模型是由线性等式约束、非负条件和目标函数构成的,约束集自然是凸的,若目标函数也是凸的,则等价数学规划模型是一个凸规划问题,模型的解是唯一的。

因此,为证明等价数学规划模型解的唯一性,可以证明目标函数为严格凸的,也就是判定目标函数的 Hessian 矩阵的正定性,以此表述目标函数的凸性。

首先将目标函数式(8)分解成 3 项  $Z(f, q) = Z_1 + Z_2 + Z_3$ , 其中,  $Z_1 = - \sum_{m \in M} \sum_{a \in A} \int_0^{x_{a,m}} V_{a,m}(\omega) d\omega$ ,  $Z_2 = - \sum_{w \in W} \int_0^{q_m^w} V_m(\tau) d\tau$ , 剩余的为  $Z_3$ 。由式(17)可知,目标函数的  $Z_1$  是路径流量  $f_{(km)}^w$  的严格凸函数(因为出行效用是关于流量的减函数),  $Z_2$  是路径流量  $f_m^w$  的严格凸函数,目标函数其他剩余项

$$\begin{aligned} Z_3 &= \frac{1}{\lambda_1} \sum_{w \in W} \sum_{m \in M} \sum_{k \in K} f_{(k|m)}^w \ln(f_{(k|m)}^w) + \\ &\quad \frac{1}{\lambda_2} \left[ \sum_{w \in W} \sum_{m \in M} q_m^w (\ln(q_m^w) - 1) \right] - \\ &\quad \frac{1}{\lambda_1} \sum_{w \in W} \sum_{m \in M} q_m^w \left( \ln \left( \sum_{k \in K} f_{(k|m)}^w \right) \right) = \\ &\quad \sum_{w \in W} \left\{ \frac{1}{\lambda_1} \sum_{m \in M} \sum_{k \in K} f_{(k|m)}^w \ln(f_{(k|m)}^w) + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{\lambda_2} \left[ \sum_{m \in M} q_m^w (\ln(q_m^w) - 1) \right] - \frac{1}{\lambda_1} \cdot \right. \\ &\quad \left. \sum_{m \in M} q_m^w \left[ \ln \left( \sum_{k \in K} f_{(k|m)}^w \right) \right] \right\} = \sum_{w \in W} Z_3^{(w)} \end{aligned} \quad (32)$$

由等价性证明可知,函数  $Z_3^{(w)}$  对于路径流量的一阶导数为

$$\frac{\partial Z_3^{(w)}}{\partial f_{(k|m)}^w} = \frac{1}{\lambda_1} \ln(f_{(k|m)}^w) \quad (33)$$

$$\frac{\partial Z_3^{(w)}}{\partial q_m^w} = \frac{1}{\lambda_2} \ln(q_m^w) - \frac{1}{\lambda_1} \ln \left( \sum_{k \in K} f_{(k|m)}^w \right) \quad (34)$$

则函数  $Z_3^{(w)}$  的二阶导数为

$$\frac{\partial^2 Z_3^{(w)}}{\partial f_{(k|m)}^w \partial f_{(j|i)}^w} = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_1 f_{(k|m)}^w} & j=k, i=m, w=l \\ 0 & \text{否则} \end{cases} \quad (35)$$

$$\frac{\partial^2 Z_3^{(w)}}{\partial f_{(k|m)}^w \partial q_i^w} = 0 \quad (36)$$

$$\frac{\partial^2 Z_3^{(w)}}{\partial q_m^w \partial f_{(k|i)}^w} = \begin{cases} -\frac{1}{\lambda_1 q_m^w} & i=m, w=l \\ 0 & \text{否则} \end{cases} \quad (37)$$

$$\frac{\partial^2 Z_3^{(w)}}{\partial q_m^w \partial q_i^w} = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_2 q_m^w} & i=m, w=l \\ 0 & \text{否则} \end{cases} \quad (38)$$

$Z_3^{(w)}$  的 Hessian 矩阵正定,所以函数  $Z_3^{(w)}$  为严格凸的,故函数  $Z_3 = \sum_{w \in W} Z_3^{(w)}$  也是严格凸的。由于  $Z_1, Z_2, Z_3$  都是严格凸函数,所以目标函数  $Z = Z_1 + Z_2 + Z_3$  是路径流量的严格凸函数。因此,该等价数学规划模型的解唯一。设 OD 对  $w$  之间的有效路径函数  $Z_3^{(w)}$  的 Hessian 矩阵  $H^w(f)$  为

假设含 9 个节点的多方式交通网络,如图 2 所示,路段上侧的数字表示路段的标号,路段下侧的数字分别表示路段的自由流行驶时间(单位: min)与路段通行能力(单位: veh/h)。路网有且仅有 1 个 OD 对 1-9,该 OD 间含小汽车和公交车 2 种交通方式;假设 OD 间的交通需求为 5 000 人/h。小汽车的费用为行驶所消耗的油费,公交车的费用为公共交通票价。

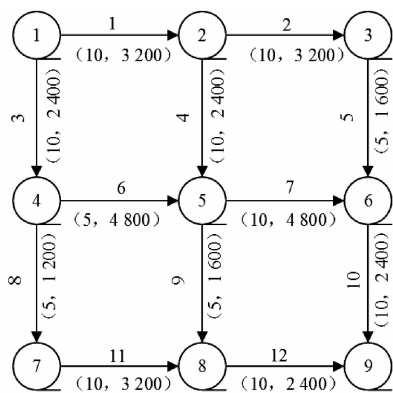


图2 多方式道路交通网络  
Fig. 2 Multimodal road traffic network

假设公交车行驶时间为定值,包含等待时间与运行时间,且不受小汽车影响。小汽车在路段上的行驶时间采用经典 BPR 函数形式

$$t_a = t_a^0 \left[ 1 + 0.15 \left( \frac{x_a^c}{Q_a} \right)^4 \right]$$

(43)

式中: $x_a^c$  为路段上小汽车的实际交通量,假定小汽车需求量与小汽车交通量换算系数为 1,即  $f_a^c = x_a^c$ ;  $t_a$  为小汽车路段  $a$  上的行驶时间; $t_a^0$  为小汽车在路段  $a$  上的自由流行驶时间; $Q_a$  为路段  $a$  的通行能力。

具体出行方案如表 1 所示。

表 1 各方式各路径的出行方案

Tab. 1 Scenarios for modes and routes

出行方式	出行路径	路段组成	费用/元	等待和走行时间/min
小汽车	路径 1	1-2-5-10	50	
	路径 2	1-4-7-10	50	
	路径 3	1-4-9-12	50	
	路径 4	3-6-7-10	50	
	路径 5	3-6-9-12	50	
	路径 6	3-8-11-12	50	
公交车	路径 2	1-4-7-10	2	50

5.2 特性变量选取

建立分层 Logit 模型的效用函数如下

$$V_{(k|m)} = \sum_i \beta_i X_{k|m(i)}$$

(44)

$$V_m = \sum_j \theta_j X_{m(j)}$$

(45)

式中: $V_{(k|m)}$  为交通方式  $m$  路径  $k$  的效用( $k=1,2,3,4,5,6$ ;  $m=1$  为小汽车交通方式,  $m=2$  为公交车交通方式);  $V_m$  为仅随交通方式  $m$  变化的固定项;  $X_{k|m(i)}$  为路径  $k$  的第  $i$  个特征变量,本文取行驶时间 1 个特征变量;  $X_{m(j)}$  为方式  $m$  的第  $j$  个特征变量,本文取费用 1 个特征变量;  $\theta_1$ 、 $\beta_1$  为待定系数。

模型中各参数值引用 Lo 等<sup>[16]</sup> 的取值,分别如

表 2 所示。

表 2 NL 模型参数

Tab. 2 Parameters of NL model

参数	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\theta_1$	$\beta_1$
参数值	1	0.4	-0.04	-0.36

5.3 结果分析

5.3.1 公交车票价影响分析

图 3 列出了公交票价变化时,均衡分配的公交需求量结果。由图 3 可以看出,随着公交票价的增大,少部分出行者选择放弃公交方式,而改用小汽车方式出行。但需求量随公交票价变化的幅度不大,说明公交票价的改变,尚不足以引起大量的小汽车出行者改用公交出行。

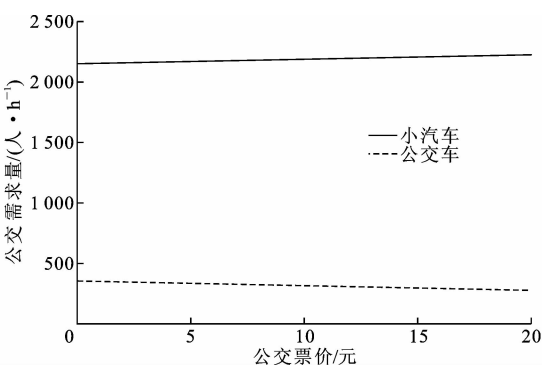


图 3 不同公交票价下的公交需求量

Fig. 3 Bus demand under different bus fare

图 4 为公交需求对票价弹性值随公交票价的变化情况。公交需求量对票价的弹性  $E_{c_b}^{q_b}$  反映公交需求量变动对价格变动的敏感程度,其计算式为

$$E_{c_b}^{q_b} = \frac{\Delta q_b / q_b}{\Delta c_b / c_b}$$

(46)

式中: $q_b$  为公交需求量;  $c_b$  为公交车票价;  $\Delta q_b$  为  $q_b$  的变化量,  $\Delta c_b$  为  $c_b$  的变化量。

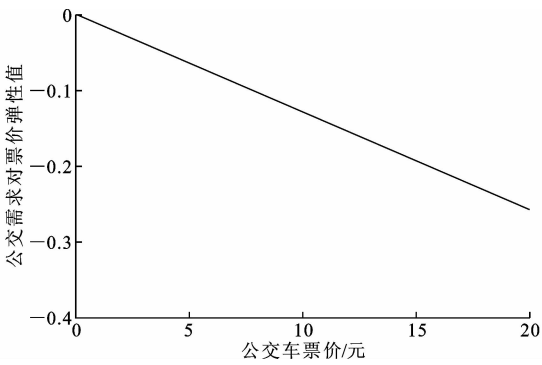


图 4 不同票价下公交需求对票价弹性值

Fig. 4 Bus demand elasticity with bus fare under different bus fare

由图 4 可知,公交需求量对票价的弹性为负值,说明公交需求量随票价的增加而减小。公交需求量

对票价弹性的绝对值随票价的增加而增加,说明出行者出行时,公交票价基数越大,公交需求量对票价变动越敏感。从图 4 还可以看到,公交票价小于 20 元内,公交需求量对票价弹性的绝对值小于 1,说明公交需求量对票价缺乏弹性。

5.3.2 参数  $\lambda_2$ 、 $\beta_1/\theta_1$  变化分析

多方式随机用户均衡分配模型的层间比例参数  $\lambda_2/\lambda_1$  反映每个方式下的路径选择枝的相关程度。当  $\lambda_2$  越接近  $\lambda_1$ ,同方式下的路径选择枝之间的相关性越小; $\lambda_2$  越接近于 0,各选择枝间相关性越大。本文算例中  $\lambda_1=1$ ,因此  $\lambda_2$  即为层间比例参数。图 5 为  $\lambda_2$  变化时实现的多方式随机用户均衡分配结果。由图 5 可知,随着  $\lambda_2$  值的增大,路径流量  $f_{22}$  (公交流量)不断减少,其他各路径流量不断增大,即当  $\lambda_2$  增大时,选择小汽车出行的出行者增加。这是因为  $\lambda_2$  表示各出行方式的路径间的相关程度, $\lambda_2$  越大,不同方式间的差异性越明显,在方式选择中公交车劣于小汽车的特征越明显,因而当  $\lambda_2$  增大时,出行者对公交车的需求下降。

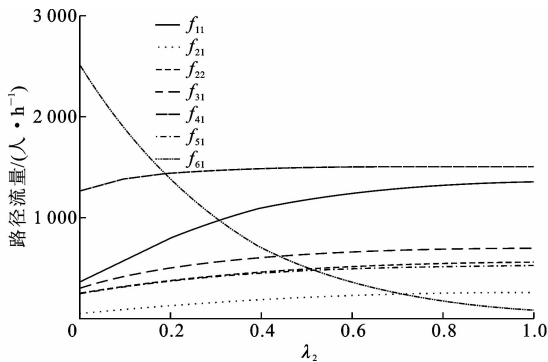


图 5 不同  $\lambda_2$  下各路径流量

Fig. 5 Each route's flow under different  $\lambda_2$

参数  $\beta_1$  为时间的转换系数,  $\theta_1$  为费用的转换系数,则  $\beta_1/\theta_1$  为出行者的时间价值 (元/min)。图 6 给出了  $\beta_1/\theta_1$  取不同值时,公交需求对票价弹性值随公交票价的变化。从图 6 可以看出,不论公交票价为何值时,  $\beta_1/\theta_1$  越大,弹性值的绝对值越大,但是票价较小时弹性值变动不大。

图 7 是公交需求量随  $\lambda_2$  和  $\beta_1/\theta_1$  的变化情况,由图 7 可知,当  $\lambda_2$  固定时,出行者对公交的需求随  $\beta_1/\theta_1$  的增加而下降。这是因为,当出行者的时间价值增加,出行者更愿意选择牺牲费用来减少出行的时间损耗,因此出行者更倾向于选择小汽车出行,对公交需求下降。

当  $\beta_1/\theta_1 < 0.28$  时,公交需求量随  $\lambda_2$  增加而增加,而当  $\beta_1/\theta_1 > 0.28$  时,公交需求量随  $\lambda_2$  的增加而

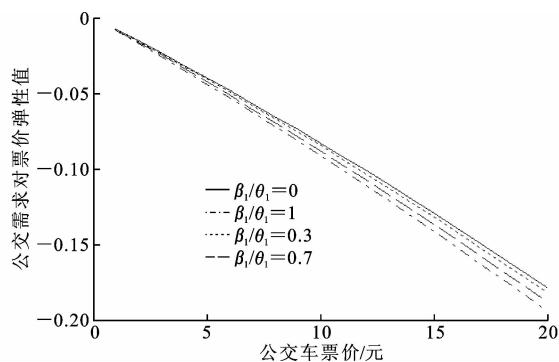


图 6 不同公交票价和  $\beta_1/\theta_1$  下公交需求对票价弹性值

Fig. 6 Bus demand elasticity with bus fare under different bus fare and  $\beta_1/\theta_1$

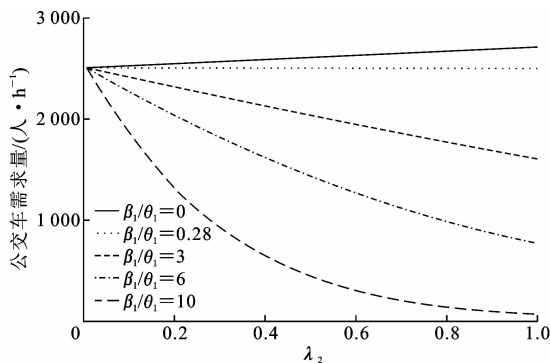


图 7 不同  $\lambda_2$  和  $\beta_1/\theta_1$  下公交需求量

Fig. 7 Bus demand under different  $\beta_1/\theta_1$  and  $\lambda_2$

减小。这是因为当  $\beta_1/\theta_1 < 0.28$  时,出行者出行时间价值较低,出行者出行决策更侧重于节省费用, $\lambda_2$  越大时公交车与小汽车效用随机项的差异性越大,公交车节省费用的特征越明显,出行者对公交需求增加;反之,当  $\beta_1/\theta_1 > 0.28$  时,出行者时间价值较高,出行决策更侧重于时间的节省,出行者对公交需求随之降低;当  $\beta_1/\theta_1 = 0.28$  时,出行者对时间与费用同等重视,公交需求量不变。

## 6 结 语

(1)基于 NL 模型建立了多方式随机用户均衡分配的数学规划模型,证明该模型的解与基于 NL 的多方式路径联合选择模型的解等价,并进一步证明了等价数学规划模型解的唯一性。

(2)公交需求量对票价缺乏弹性,公交票价对出行者出行路径决策影响程度不大。

(3)当层间比例参数  $\lambda_2$  固定时,出行者对公交车的需求随时间价值  $\beta_1/\theta_1$  的增加而下降;当时间价值  $\beta_1/\theta_1 < 0.28$  时,公交需求量随  $\lambda_2$  增加而增加,而当时间价值  $\beta_1/\theta_1 > 0.28$  时,公交需求量随  $\lambda_2$  的增加而减小。



(4)提出的多方式随机用户均衡分配模型需要进一步的检验,下一步可以在实际的大规模路网上开展测试。

#### 参考文献:

#### References:

- [1] WARDROP J G. Some theoretical aspects of road traffic research[J]. Proceedings Institution of Civil Engineering, 1952, 1(3): 325-362.
- [2] LEBLANC L J, MORLOK E K, PIERSKALLA W P. An efficient approach to solving the road network equilibrium traffic assignment problem[J]. Transportation Research, 1975, 9(5): 309-318.
- [3] BOYCE D E. Urban transportation network-equilibrium and design models: Recent achievements and future prospects[J]. Environment & Planning A, 1984, 16(11): 1445-1474.
- [4] DAGANZO C F, SHEFFI Y. On stochastic models of traffic assignment[J]. Transportation Science, 1977, 11(3): 253-274.
- [5] SHEFFI Y. Urban transportation networks: equilibrium analysis with mathematical programming methods [J]. Transportation Science, 1985, 19(4): 463-466.
- [6] PRASHKER J N, BEKHOR S. Route choice models used in the stochastic user equilibrium problem: A review[J]. Transport Reviews, 2004, 24(4): 437-463.
- [7] MAHER M J, HUGHES P C. A probit-based stochastic user equilibrium assignment model[J]. Transportation Research Part B, 1997, 31(4): 341-355.
- [8] RASHKER J N, BEKHOR S. Stochastic user-equilibrium formulations for extended-Logit assignment models [J]. Transportation Research Record, 1999 (1676): 145-152.
- [9] BEKHOR S, TOLEDO T, REZNIKOVA L. A path-based algorithm for the cross-nested Logit stochastic user equilibrium traffic assignment[J]. Computer — Aided Civil and Infrastructure Engineering, 2009, 24(1): 15-25.
- [10] 四兵锋, 钟 鸣, 高自友. 城市混合交通条件下路段阻抗函数的研究[J]. 交通运输系统工程与信息, 2008, 8(1): 68-73.  
SI Bing-feng, ZHONG Ming, GAO Zi-you. A link resistance function of urban mixed traffic network[J]. Journal of Transportation Systems Engineering and Information Technology, 2008, 8(1): 68-73.
- [11] RYU S, CHEN A, CHOI K. Solving the combined modal split and traffic assignment problem with two types of transit impedance function [J]. European Journal of Operational Research, 2016, 257(3): 870-880.
- [12] 张 锐, 姚恩建, 杨 扬. 多方式条件下城市交通分配研究[J]. 交通运输系统工程与信息, 2014, 14(6): 107-112.  
ZHANG Rui, YAO En-jian, YANG Yang. Multimodal urban traffic assignment analysis[J]. Journal of Transportation Systems Engineering and Information Technology, 2014, 14(6): 107-112.
- [13] WU Z X, LAM W H K. Network equilibrium for congested multi-mode networks with elastic demand [J]. Journal of Advanced Transportation, 2003, 37(3): 295-318.
- [14] FRIESZ T L. An equivalent optimization problem for combined multiclass distribution, assignment and modal split which obviates symmetry restrictions [J]. Transportation Research Part B, 1981, 15(5): 361-369.
- [15] ALISAFWAT K N, MAGNANTI T L. A combined trip generation, trip distribution, modal split, and trip assignment model[J]. Transportation Science, 1988, 22(1): 14-30.
- [16] LO H K, YIP C W, WAN Q K. Modeling competitive multi-modal transit services: A nested Logit approach [J]. Transportation Research Part C, 2004, 12(3/4): 251-272.
- [17] ZHOU Z, CHEN A, WONG S C. Alternative formulations of a combined trip generation, trip distribution, modal split, and trip assignment model[J]. European Journal of Operational Research, 2009, 198(1): 129-138.
- [18] 陈 坚, 杨 飞, 晏启鹏. 多方式复合城市交通网络弹性需求随机用户平衡分配模型[J]. 计算机应用研究, 2012, 29(10): 3693-3696.  
CHEN Jian, YANG Fei, YAN Qi-peng. Stochastic user equilibrium assignment model of multimodal composite urban transportation network with elastic demand [J]. Application Research of Computers, 2012, 29(10): 3693-3696.
- [19] 胡文君, 周溪召. 基于交叉巢式 Logit 的多用户多模式随机用户均衡模型[J]. 中国公路学报, 2012, 25(4): 133-140.  
HU Wen-jun, ZHOU Xi-zhao. Multi-user and multi-mode stochastic user equilibrium model base on cross-nest Logit [J]. China Journal of Highway and Transport, 2012, 25(4): 133-140.
- [20] LAM W H K, HUANG H J. Link choice proportions from trip distribution and assignment models: An overview and comparison [J]. Journal of Advanced Transportation, 1996, 30(1): 1-21.